# Zasady wariacyjne

- Wariacja funkcji i całki bez wariacji zmiennej całkowania, równania Eulera – Lagrange'a,
- Przykład zastosowania rachunku wariacyjnego –brachistochrona
- Wariacja współrzędnych uogólnionych i działania Hamiltona bez wariacji czasu i zasada Hamiltona
- Związek symetrii układu z zasadami zachowania – twierdzenie Noether (także z wykorzystaniem pojęcia wariacji funkcjonału z wariacją czasu )

# Równania i zasady mechaniki

## Infinitezymalne (różniczkowe)

(sformułowane przy wykorzystaniu równań różniczkowych, które wiążą ze sobą położenia układu mechanicznego w nieskończenie sobie bliskich chwilach czasu )

## Wariacyjne (całkowe)

(sformułowane przy wykorzystaniu rachunku wariacyjnego, charakteryzują ruch w skończonym przedziale czasu )

Przykłady:
Zasada d'Alemberta
równania Lagrange'a I i II rodzaju, równania Newtona, równania Hamiltona

Przykłady:
Zasada Hamiltona
Zasada Maupertuis
Zasada Jacobiego

# Sformułowanie zagadnienia wariacyjnego, funkcjonał, wariacja

Rozważamy całkę typu $I=\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(q_1(\tau),q_2(\tau),.......q_f(\tau),\frac{dq_1(\tau)}{d\tau},\frac{dq_2(\tau)}{d\tau},.......\frac{dq_f(\tau)}{d\tau},\tau\right)d\tau$

jako funkcjonał niezależnych od siebie funkcji $q_1(\tau),q_2(\tau),.......q_f(\tau)$ zależnych od zmiennej $\tau$ czyli *I=I[$q_1$,$q_2$,.....$q_f$]*

Poszukujemy takich optymalnych funkcji $q_l(\tau)$ żeby całka ta osiągała dla tych funkcji wartość ekstremalną (minimalną lub maksymalną ).

Koniecznym warunkiem spełnienia tego warunku jest to by infinitezymalnie małe zmiany funkcji $q_l(\tau)$ (*l=1,...,f*) nie zmieniały wartości rozważanej całki (w przybliżeniu liniowym). Funkcje spełniające ten warunek będziemy nazywać ekstremalami funkcjonału choć funkcjonał nie musi przyjmować dla tych funkcji wartości ekstremalnej lecz odpowiadają one punktowi stacjonarnemu funkcjonału.

Różnicę funkcji porównawczych $q_l^*(\tau)$ i funkcji wybranych $q_l(\tau)$ określa się mianem wariacji funkcji $q_l(\tau)$ (bez wariacji zmiennej $\tau$ ) i oznacza

$$\boxed{\delta q_l = q_l^*(\tau)-q_l(\tau)}$$

Różnicę funkcjonału określonego dla funkcji porównawczych $q_l^*(\tau)$ i funkcji wybranych $q_l(\tau)$ w przybliżeniu liniowym względem $\delta q_l$ określa się mianem wariacji funkcjonału $\delta I$ bez wariacji zmiennej $\tau$ .

W przypadku gdy funkcje $q_l(\tau)$ są ekstremalami funkcjonału znika wariacja funkcjonału $\delta I=0$

# Wariacja funkcjonału

Wprowadzamy oznaczenie $q'_l = \frac{dq_l}{d\tau}$ , $q^{*'}_l = \frac{dq_l^*}{d\tau}$ , $\delta q_l^{'} = \frac{d}{d\tau}\delta q_l$

Dodatkowo mamy relacje $q_l^* = q_l + \delta q_l$ $q^{*'}_l = \frac{d}{d\tau}\left(q_l^*\right) = \frac{d}{d\tau}\left(q_l + \delta q_l\right) = q_l^{'} + \delta q_l^{'}$

Różnica funkcjonału dla funkcji porównawczych $q_l^*(\tau)$ i funkcji wybranych $q_l(\tau)$ jest równa

$$I^* - I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(q_1^*, q_2^*, \ldots\ldots, q_f^*, q_1^{*'}, q_2^{*'}, \ldots\ldots, q_f^{*'}, \tau\right) d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_f, q_1^{'}, q_2^{'}, \ldots\ldots, q_f^{'}, \tau\right) d\tau$$

W przybliżeniu liniowym względem $\delta q_l$ różnice tą możemy wyrazić poprzez wariacje $\delta I$ funkcjonału *I* (bez wariacji zmiennej $\tau$ ) równą całce z wariacji F

$$I^* - I \approx \delta I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta F \, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \delta q_l^{'} \right) d\tau$$

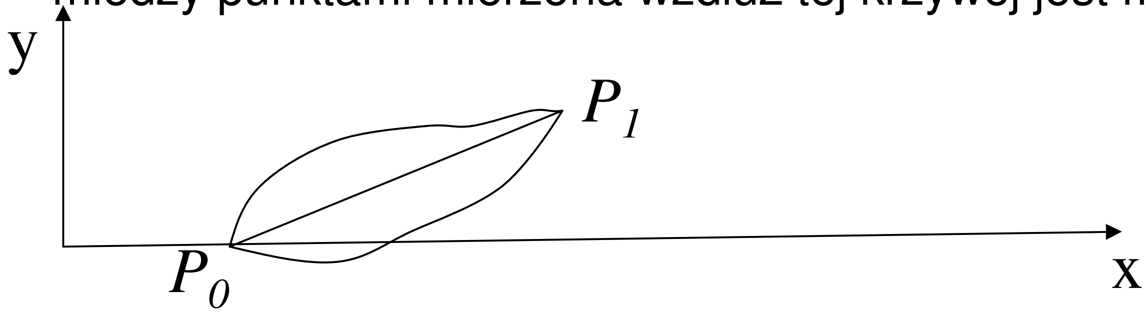
Dla $q_l(\tau)$ będących ekstremalami funkcjonału wariacja $\delta I$ znika.
Zwykle przy poszukiwaniu ekstremali funkcjonału na funkcje porównawcze nakładamy dodatkowe warunki $q_l^*(\tau = \tau_1) = q_l(\tau = \tau_1)$ oraz $q_l^*(\tau = \tau_0) = q_l(\tau = \tau_0)$

a zatem $\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0$

Wartości wszystkich funkcji porównawczych są równe wartościom poszukiwanych ekstremali funkcjonału dla argumentu $\tau$ równego dolnej i górnej granicy całkowania. Dla takich $\tau$ wariacje $\delta q_l$ ekstremali funkcjonału znikają.

## Przykład sformułowania zagadnienia wariacyjnego

Znaleźć postać funkcji y(x) opisującej krzywą leżącą w płaszczyźnie $z$=0 przechodzącą przez dwa punkty $P_0=(x_0,y_0)$ i $P_1=(x_1,y_1)$ o tej własności iż odległość miedzy punktami mierzona wzdłuż tej krzywej jest minimalna




Infinitezymalnie krótki odcinek tej krzywej ma długość

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Szukaną odległość można wyznaczyć jako $S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = I[y]$

(role zmiennej $\tau$ pełni $x$, $S$ jest funkcjonałem funkcji $q_1(x)=y(x)$, $f=1$ )

Poszukiwana krzywa optymalna o najkrótszej długości opisana funkcją y(x) musi

spełniać warunek $\delta S = 0$ czyli być ekstremalą funkcjonału $I[y]$

przy dodatkowym warunku $\delta y(x = x_0) = \delta y(x = x_1) = 0$ zapewniającym iż analizujemy tylko krzywe zaczynające się i kończące w punktach $P_0$ i $P_1$

## Zerowanie się wariacji a równania Eulera Lagrange'a dla zagadnienia wariacyjnego

Niezależne od siebie funkcje $q_l$ będące funkcjami ciągłymi są ekstremalami funkcjonału

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left( q_1(\tau), q_2(\tau), \ldots\ldots q_f(\tau), \frac{dq_1(\tau)}{d\tau}, \frac{dq_2(\tau)}{d\tau}, \ldots\ldots \frac{dq_f(\tau)}{d\tau}, \tau \right) d\tau$$

dla dowolnych $\tau_o$ i $\tau_1$ przy warunkach $\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0$ dla l=1,….,f
wtedy i tylko wtedy gdy spełniają równania Eulera-Lagrange'a

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{d\tau}\left( \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \right) = 0} \qquad l = 1, \ldots., f \qquad q'_l = \frac{dq_l}{d\tau}$$

Dowód: Dla ekstremali funkcjonału znika jego wariacja $\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} F \, d\tau = 0$

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} F \, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta F \, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial q'_l} \delta q_l^{'} \right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \frac{d}{d\tau} (\delta q_l) \right) d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \delta q_l \right) - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \right) \delta q_l \right) d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \right) \right) \delta q_l \, d\tau + \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \delta q_l \Bigg|_{\tau_0}^{\tau_1} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial q_l^{'}} \right) \delta q_l \, d\tau$$

$$\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0$$

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q,q',\tau)d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\right)\right)\delta q_l\, d\tau$$

$$(\Leftarrow)\quad \frac{\partial F}{\partial q_l}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\right)=0 \Rightarrow \delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\, d\tau = 0$$

$$(\Rightarrow)\quad \delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\, d\tau = 0 \Rightarrow \text{Niech}\quad \delta q_l = \begin{cases}\delta q_k(\tau)\neq 0 \text{ dla } l=k\\ 0 \text{ dla } l\neq k\end{cases}$$

Określamy w linowym przybliżeniu zmianę funkcjonału wynikająca z modyfikacji wybranej funkcji $q_k$, której zmiana nie powoduje zmiany pozostałych, wariacje różnych funkcji są od siebie niezależne

$$\Rightarrow \int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\right)\right)\delta q_l\, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k^{'}}\right)\right)\delta q_k\, d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k^{'}}\right)=0,\ \text{bo } \delta q_k(\tau) \text{ dowolne.}$$

Gdyby dla $\tau$ z zakresu $\tau_0 \le \tau_A < \tau < \tau_B \le \tau_1$ zachodziłoby $\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial q_k^{'}} > 0$

lub $\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial q_k^{'}} < 0$ to dobierając $\delta q_k = \left\{\begin{matrix} & \delta(\tau)>0 & gdy & \tau_A<\tau<\tau_B & & \\ 0 & gdy & \tau<\tau_A & \text{lub} & \tau>\tau_B & \end{matrix}\right\}$

otrzymalibyśmy to iż $\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial q_k^{'}}\right)\delta q_k\, d\tau \neq 0$

Koniec dowodu

Warunkiem koniecznym na to, by funkcjonał $I=\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_f, q_1^{'}, q_2^{'}, \ldots\ldots, q_f^{'}, \tau\right) d\tau$ przybierał wartość ekstremalną dla określonych funkcji $q_l(\tau)$ jest znikanie wariacji powyższego funkcjonału dla tych funkcji (równoważne równaniom Eulera-Lagrange'a) gdy $\delta q_i(\tau=\tau_0)=\delta q_i(\tau=\tau_1)=0$ czyli funkcje $q_l(\tau)$ muszą być ekstremalami funkcjonału

Dowód:

Niech $q_l^*(\tau)=q_l(\tau)+\alpha_l\eta_l(\tau) \Rightarrow \delta q_l(\tau)=\alpha_l\eta_l(\tau), \quad \eta_l(\tau_0)=\eta_l(\tau_1)=0, \quad l=1,2,\ldots,f$

Ustalmy funkcje $\eta_l(\tau)$. Definiujemy funkcje (nie funkcjonał) zmiennych $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_f$

$$\Phi\left(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_f\right) \equiv I\left[q_1(\tau)+\alpha_1\eta_1(\tau), \ldots\ldots, q_f(\tau)+\alpha_f\eta_f(\tau), q'_1(\tau)+\alpha_1\eta'_1(\tau), \ldots\ldots, q'_f(\tau)+\alpha_f\eta'_f(\tau)\right]$$

$\Phi(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$ -funkcja zmiennych $\alpha_{l}, \alpha_{2}, \ldots \ldots, \alpha_f$ musi przyjmować wartość ekstremalną dla $\alpha_l=0$ ( $l=1,\ldots.,f$) niezależnie od wyboru funkcji $\eta_l$ żeby rozpatrywany funkcjonał przyjmował wartość ekstremalną dla $q_l(\tau)$

Implikacja jednostronna

$$\Phi\left(\alpha_1=\alpha_2=\ldots\ldots=\alpha_f=0\right)=ekstremum \Rightarrow \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_l}\right|_{\alpha=0}=0, \quad l=1,2,\ldots,f$$

$$0=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_l}\right|_{\alpha=0}=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\eta_l+\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\eta_l^{'}}\right)d\tau=\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\eta_l\right|_{\tau_0}^{\tau_1}}+\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\boxed{-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\right)}\right)\eta_l d\tau=$$

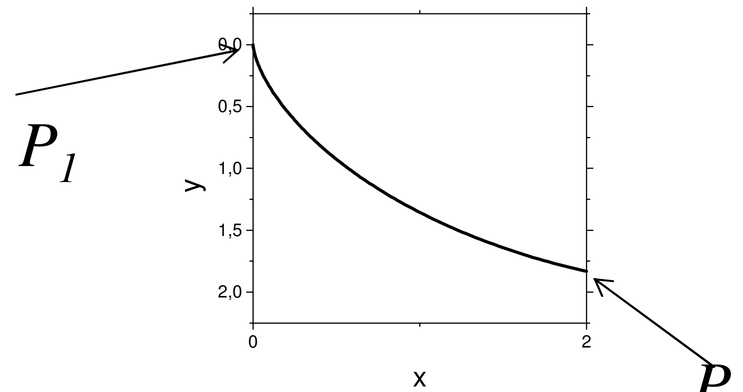
$$\eta_l^{'}=\frac{d\eta_l}{d\tau}$$

$$=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\right)\right)\eta_l d\tau \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial q_l}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{'}}\right)=0, \text{ bo } \eta_l(\tau) \text{ dowolne} \Leftrightarrow \delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\, d\tau=0.$$

Znikanie wariacji funkcjonału *I* nie jest jednak warunkiem dostatecznym

Zagadnienie brachistochrony- przykładem zagadnienia wariacyjnego

Brachistochrona-krzywa łącząca dwa punkty o takiej własności iż czas zsuwania się ciała po tej krzywej w polu siły ciężkości jest najkrótszy . Zakładamy iż znamy współrzędne punktów początkowego $P_1=(x_1,y_1)=(0,0)$ i końcowego $P_2(x_2,y_2)$




Czas zsuwania się ciała po infinitezymalnie krótkim odcinku krzywej o długości $dS$ z prędkością o wartości $V$

$$dt = \frac{dS}{V}$$

Długość $dS$ można podwiązać z równaniem krzywej $y=y(x)$ po którym porusza się ciało

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+\left(y'\right)^2} \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

Wartość prędkości można związać z wysokością na której znajduje się ciało w oparciu o zasadę zachowania energii.

Zakładając iż w punkcie początkowym $y_1=0$ ciało spoczywało i oś Oy jest skierowana pionowo do dołu otrzymujemy relacje

$$\frac{mV^2}{2} - mgy = 0 \Rightarrow V = \sqrt{2gy}$$

Całkowita energia jest stała i równa energii w chwili początkowej równej zeru

Czas zsuwania się ciała od punktu $P_1$ do $P_2$

$$t = \int_{x_1=0}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx = \int_{x_1=0}^{x_2} F(y, y')dx \qquad F(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

Opisany powyższym wzorem czas zsuwania się ciała $t[y]$ od punktu $P_1$ do $P_2$ można traktować jako funkcjonał zależny od postaci funkcji $y=y(x)$
Poszukujemy minimum tego funkcjonału przy warunku, iż krzywe opisane funkcjami $y=y(x)$ muszą przechodzić przez punkty $P_1$ i $P_2$.
Warunkiem koniecznym jest $\delta t = 0$ czyli znikanie wariacji funkcjonału t[$y$] bez wariacji $x$ przy warunku dodatkowym, iż $\delta y(x = x_1) = \delta y(x = x_2) = 0$
Role zmiennej $\tau$ pełni $x$, zaś $q_1=q(\tau)$ odpowiada $y=y(x)$, zaś funkcjonałowi $I[q]$ odpowiada funkcjonał $t=t[y]$, $f=1$
Z wcześniejszych rozważań wynika iż warunkiem koniecznym i dostatecznym na to by znikała wariacja funkcjonału $t[y]$ jest to, żeby były spełnione równania Eulera-Lagrange'a czyli zachodziło

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$f$=1, dlatego 1 równanie

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$F(y,y')=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \Rightarrow$ Z równania Eulera-Lagrange'a wynika równanie $\boxed{y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F=h}$

$h$-stała

Dowód.

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right)=\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{dF}{dx}=y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}y'-\frac{\partial F}{\partial y'}y''-\frac{\partial F}{\partial x}=$$

$$=y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}y'-\frac{\partial F}{\partial x}=y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}\right]-\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ponieważ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$

to $y'\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]-\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}$

A zatem ponieważ w rozważanym zagadnieniu $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$ to

$\dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F\right)=-\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$ czyli $y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F=const$ c.n.d.

Dla rozważanego zagadnienia $F(y,y')=\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{2gy}}-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}=-\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{2gy}}$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=h\Rightarrow-\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{2gy}}=h$$

$$1+(y')^2=\frac{1}{2gyh^2}\Rightarrow y'=\pm\sqrt{\frac{1}{2gyh^2}-1}\ \overset{\frac{1}{4gh^2}\overset{ozn.}{=}a}{\Rightarrow}\ y'=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{2a}{y}-1}=\pm\frac{1}{y}\sqrt{2ay-y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pm\frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}=dx\Rightarrow\qquad x=\pm\int\frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}dy+const$$

$$x = \pm \int \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}} dy + const$$

Poszukujemy funkcji *y=y(x)* spełniającej powyższe równanie w postaci parametrycznej znajdując zależności $y=y(\varphi)$ oraz $x=x(\varphi)$ gdzie $\varphi$ -parametr
Zakładamy na początku iż

$$y(\varphi) = a(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow dy = a\sin(\varphi)d\varphi$$

$$x = \pm \int \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}} dy + const \Rightarrow x = \pm \int \frac{a(1-\cos(\varphi))a\sin(\varphi)}{\sqrt{2a^2(1-\cos(\varphi)) - a^2(1-\cos(\varphi))^2}} d\varphi =$$

$$= \pm a \int \frac{\sin(\varphi)(1-\cos(\varphi))}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}} d\varphi = \pm a \int (1-\cos(\varphi)) d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(\varphi) = \pm a(\varphi - \sin(\varphi)) + b$$

Stałą całkowania *b* można wyznaczyć z warunku iż szukana krzywa przechodzi przez punkt $P_1=(0,0)$ czyli $x(y=0)=0$

Ponieważ $y(\varphi) = a(1-\cos(\varphi))$ to $y=0$ odpowiada $\varphi = \varphi_0$ taki iż $\cos(\varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

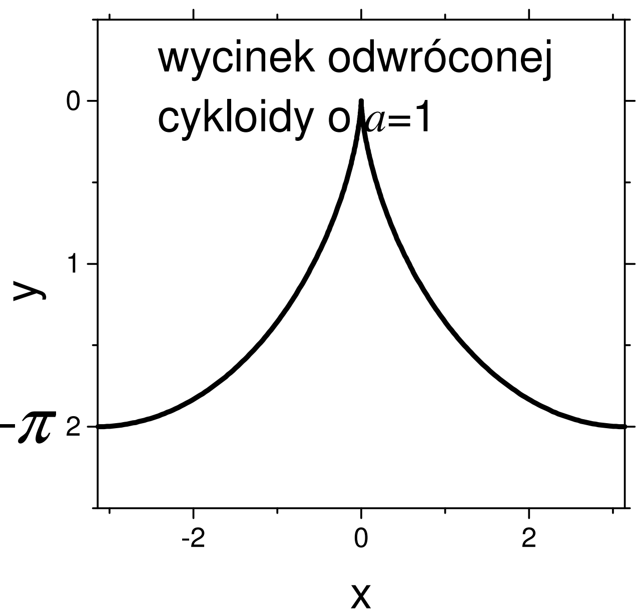
A zatem $x(y=0) = x(\varphi=0) = b = 0$ Drugą stałą *a* można wyznaczyć z warunku: $y(x=x_2)=y_2$ co w ogólności prowadzi do równania przestępnego

Układ równań :

$$x(\varphi) = \pm a(\varphi - \sin(\varphi)) \qquad y(\varphi) = a(1 - \cos(\varphi))$$

przestawia w parametrycznej postaci równanie odwróconej cykloidy o wierzchołku w początku układu współrzędnych

$\varphi = -\pi$




$\varphi = \pi$

Przeprowadzone rozważania wskazują na to ze jeżeli istnieje funkcja y(x) opisująca krzywą łącząca punkty P1 i P2, po której czas zsuwania się ciała jest najkrótszy spośród krzywych łączący te dwa punkty to jest nią funkcja opisująca znalezioną krzywą. Oczywiście wiemy iż w rozpatrywanym przykładzie taka krzywa winna istnieć.

Długość krzywej o równaniu $\varphi = \varphi(\theta)$ łączącej dwie punkty na sferze o promieniu R

Funkcjonał przyjmuje postać ( dowód na następnej stronie)

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta, \varphi')d\theta \qquad gdzie \quad F(\theta, \varphi') = R\sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\varphi')^2} \qquad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Równanie Eulera- Lagrange'a przyjmuje postać

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \varphi'} = const \Rightarrow$$

$$\frac{R\sin^2(\theta)\varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\varphi')^2}} = const$$

Jego rozwiązaniem są dwa łuki koła wielkiego przechodzącego przez punkty na sferze, przy czym tylko jeden luk odpowiada minimum funkcjonału a drugi spełnia tylko warunek stacjonarności

Układ sferyczny

$$x = R\sin(\theta)\cos(\varphi) \Rightarrow$$
$$dx = R\cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - R\sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi$$

$$y = R\sin(\theta)\sin(\varphi) \Rightarrow$$
$$dy = R\cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + R\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi$$

$$z = R\cos(\theta) \Rightarrow dz = -R\sin(\theta)d\theta$$

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{R^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\varphi)^2\right]} = R\sqrt{1+\sin^2(\theta)(\varphi')^2}\,d\theta$$

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta,\varphi')d\theta \qquad gdzie \quad F(\theta,\varphi') = R\sqrt{1+\sin^2(\theta)(\varphi')^2} \qquad \varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

Wariacja bez czasu funkcjonału zależnego od funkcji opisujących zależność czasową współrzędnych uogólnionych

Opis ruchu rzeczywistego dokonujemy podając zależność współrzędnych uogólnionych od czasu $q_l(t)$ (*l=1,...,f*). Ewentualne więzy nie wprowadzają związków między współrzędnymi uogólnionymi, których zmiany można dokonywać w sposób niezależny

Rozważamy zbiór ruchów porównawczych, opisanych funkcjami opisującymi zależność współrzędnych uogólnionych od czasu w trakcie tych ruchów w postaci

$$q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t) \qquad l = 1, 2, \ldots, f$$

gdzie:

$$\boxed{\delta q_l(t) = q_l^*(t) - q_l(t)}$$

wariacja bez wariacji czasu wsp. uogólnionej

Rozpatrujemy dalej funkcjonał zwany działaniem Hamiltona zdefiniowany wzorem

$$W_H[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L\left(q_1(t), \ldots\ldots q_f(t), \dot{q}_1(t), \ldots\ldots\ldots \dot{q}_f(t), t\right) \right\} dt$$

$t_0$-czas rozpoczęcia analizy ruchu
$t_1$-czas zakończenia analizy ruchu

Widać iż role zmiennej $\tau$ pełni obecnie czas, zaś funkcji $F$ funkcja Lagrange'a $L=T-V$ (lub $L=T-U$)

Zakładamy iż zachodzi $\delta q_l(t = t_0) = \delta q_l(t = t_1) = 0$

Wszystkie ruchy porównawcze zaczynają się i kończą w tej samej chwili czasu i w tym samym położeniu co ruch rzeczywisty

Wariacja $\delta W_H$ funkcjonału $W_H$ bez wariacji czasu jest równa

$$\delta W_H = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt \qquad \text{gdzie} \qquad \delta \dot{q}_l = \frac{d}{dt} \delta q_l$$

Zasada Hamiltona Jeżeli dla układu istnieje funkcja Lagrange'a, wówczas dla ruchu rzeczywistego, i tylko dla ruchu rzeczywistego analizowanego w dowolnym przedziale czasu ($t_0$, $t_1$) znika wariacja z działania Hamiltona bez wariacji czasu jeżeli jednocześnie znikają wariacje współrzędnych uogólnionych dla chwili czasu $t_0$ i $t_1$ ruchu

$$\delta W_H[q] = \delta\int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\,dt = 0 \qquad \text{gdzie} \quad \delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

Zasada Hamiltona wynika z tego iż znikanie wariacji $\delta I$ funkcjonału

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(q_1(\tau), q_2(\tau), \ldots\ldots q_f(\tau), \frac{dq_1(\tau)}{d\tau}, \frac{dq_2(\tau)}{d\tau}, \ldots\ldots \frac{dq_f(\tau)}{d\tau}, \tau\right) d\tau$$

dla dowolnych $\tau_0$ oraz $\tau_1$ przy założeniu iż wariacje $\delta q_l$ są niezależne od siebie oraz przy warunkach dodatkowych $\delta q_l(\tau=\tau_0) = \delta q_l(\tau=\tau_1) = 0, \quad l = 1,2,\ldots,f$

zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy są spełnione równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q'_l}\right) - \frac{\partial F}{\partial q_l} = 0 \qquad \text{gdzie} \quad q'_l = \frac{dq_l}{d\tau}$$

Po podstawieniu $F=L$, $\tau = t,\ \ \tau_0 = t_0, \tau_1 = t_1$ można zauważyć iż $I=W_H$

A równania E-L stają się równaniami Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \qquad \text{gdzie} \quad \dot{q}_l = \frac{dq_l}{dt}$$

Prawdziwość równań Lagrange'a II rodzaju jest dowodem prawdziwości zasady wariacyjnej Hamiltona dla rozważanych układów

Znikanie wariacji działania Hamiltona dla dowolnie wybranych $t_0, t_1$ jest równoważne równaniom Lagrange'a II rodzaju

$$\boxed{\delta W_H[q] = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)dt = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0}$$

$$gdy \qquad \delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0$$

$$dla \quad l = 1,2,\dots f$$

Dowód:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta \dot{q}_l\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\frac{d}{dt}(\delta q_l)\right)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right)\delta q_l\right)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right)\right)\delta q_l\,dt + \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l\Bigg|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right)\right)\delta q_l\,dt.$$

$$(\Leftarrow) \quad \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) = 0 \Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

$$\delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt = 0 \Rightarrow \text{Niech} \quad \delta q_l = \begin{cases}\delta q_k(t) \neq 0 \text{ dla } l = k \\ 0 \text{ dla } l \neq k\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right)\delta q_k\,dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0, \text{ bo } \delta q_k(t) \text{ dowolne.}$$

## Zalety sformułowania praw mechaniki przy pomocy zasad wariacyjnych

Zasady wariacyjne mechaniki (których przykładem jest zasada Hamiltona) stanowią najbardziej zwięzłe sformułowanie praw mechaniki klasycznej.
Pozwalają one na formułowanie analogi praw mechaniki klasycznej z innymi działami fizyki, w których podstawowe prawa również można sformułować w postaci zasad wariacyjnych.
Metody wariacyjne ułatwiają powiązanie zasad zachowania wielkości fizycznych z symetrią układu w oparciu np. o analizę niezmienniczości działania Hamiltona przy ciągłych transformacjach współrzędnych uogólnionych odpowiadających operacjom symetrii układu.

Spełnienie zasady Hamiltona dla ruchu rzeczywistego jest warunkiem koniecznym na to, by działanie Hamiltona

$$W_H[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

dla ruchu rzeczywistego analizowanego w dowolnie wybranym przedziale czasu ($t_0$, $t_1$) przyjmowało wartość ekstremalną (w szczególności zwykle minimalną) w zbiorze wszystkich ruchów porównawczych, których wariacje w chwilach $t_0$, $t_1$ znikają. Spełnienie tej zasady w ogólnym przypadku nie jest jednak warunkiem wystarczającym na to by działanie Hamiltona określone powyżej przyjmowało wartość ekstremalną ( w szczególności minimalną) dla ruchu rzeczywistego w klasie ruchów porównawczych. Działanie to może nie przyjmować zawsze wartości minimalnej dla ruchu rzeczywistego gdy przedział czasu ($t_0$, $t_1$) jest odpowiednio długi.

Slajdy 22-29( przykłady i dodatkowe informacje dla zainteresowanych)

Przykład ( dla zainteresowanych): Rozważamy swobodny spadek ciała pod wpływem siły ciężkości. Oś Oz obieramy pionowo w dół i zakładamy iż w chwili startu czyli w chwili $t$=0 ciało znajdowało się w punkcie $z(t=0)=0$ . Czas spadku ciała wynosił $t_1$

Pokażemy że dla ruchu rzeczywistego : $z = \frac{1}{2}gt^2$ działanie Hamiltona

$$W_H\left[z(t)\right] = \int_0^{t_1} L[z(t), \dot{z}(t)]dt$$

przyjmuje wartość minimalną w klasie ruchów porównawczych

$$z^* = z_n = a_n t^n \qquad (n>0)$$

spełniających dodatkowo warunek $\delta z(t=0) = \delta z(t=t_1) = 0$

Pierwszy z warunków nałożonych na wariacje jest automatycznie spełniony. Z drugiego warunku wynika iż

$$z_n(t=t_1) = z(t=t_1) \Rightarrow a_n t_1^{\,n} = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}gt_1^{2-n}$$

czyli $z_n = \frac{1}{2}gt_1^{2-n}t^n$

$$z_n = \frac{1}{2} g t_1^{2-n} t^n \Rightarrow \dot{z}_n = \frac{1}{2} g n t_1^{2-n} t^{n-1}$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m\dot{z}_n^2}{2} + mgz_n = \frac{mg^2 n^2 t_1^{4-2n}}{8} t^{2n-2} + \frac{1}{2} mg^2 t_1^{2-n} t^n$$

Działanie Hamiltona

$$W = \int_0^{t_1} L dt = \frac{mg^2 n^2 t_1^{4-2n}}{8} \int_0^{t_1} t^{2n-2} dt + \frac{1}{2} mg^2 t_1^{2-n} \int_0^{t_1} t^n dt =$$

$$= \frac{mg^2 n^2 t_1^{4-2n}}{8(2n-1)} t_1^{2n-1} + \frac{1}{2(n+1)} mg^2 t_1^{2-n} t_1^{n+1} =$$

$$= \frac{mg^2 t_1^3}{2} \left( \frac{n^2}{4(2n-1)} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{mg^2 t_1^3}{2} f(n)$$

gdzie $f(n) = \frac{n^2}{4(2n-1)} + \frac{1}{n+1}$

Pokażemy iż dla ruchu rzeczywistego o $n$=2 działanie Hamiltona przyjmuje wartość ekstremalną gdy pokażemy iż $\frac{df}{dn}(n=2)=0$

( gwarancją spełnienia tego warunku jest znikanie wariacji

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(z,\dot{z},t)\,dt = 0 \qquad \text{gdzie} \quad \delta z(t=t_0)=\delta z(t=t_1)=0, \quad l=1,2,\dots,f$$

w ruchu rzeczywistym gdy $n$=2)

oraz to iż dla $\frac{df}{dn}(n>2)>0 \quad i \quad \frac{df}{dn}(n<2)<0$ lub $\frac{df}{dn}(n>2)<0 \quad i \quad \frac{df}{dn}(n<2)>0$

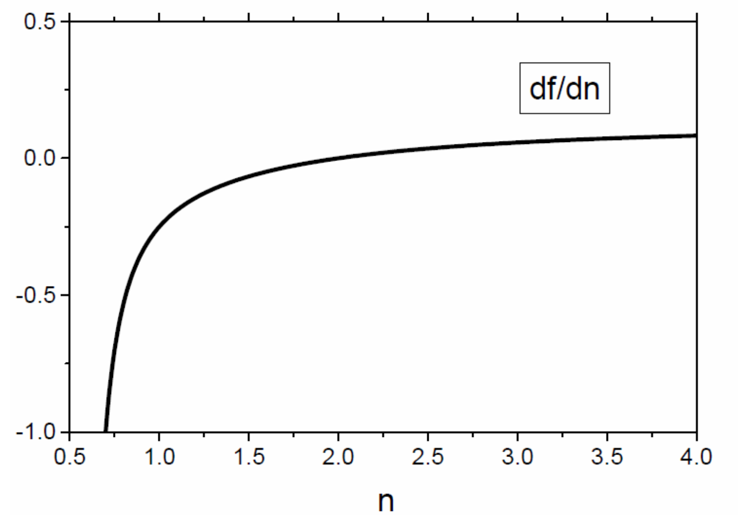
$$f(n)=\frac{n^2}{4(2n-1)}+\frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{df}{dn}=\frac{2n\cdot 4(2n-1)-8n^2}{16(2n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=$$

$$=\frac{8n^2-8n}{16(2n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n-1)}{2(2n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Rightarrow\frac{df}{dn}(n=2)=0$$

Dodatkowo można pokazać iż

$$\frac{df}{dn}(n>2)>0 \qquad \frac{df}{dn}(n<2)<0$$

a więc ruch rzeczywisty odpowiada w rozważanej klasie ruchów porównawczych minimum działania Hamiltona



Przykład ( dla zainteresowanych) : Rozważamy ciało o masie $m$ które porusza się pod wpływem siły harmonicznej $\vec{F} = -kx\vec{i}$

Ponadto wiadomo iż $x(t=0)=0$ oraz $x(t=t_1)=x_1$, a $\dot{x}(t=0) > 0$

Wiadomo iż zależność położenia ciała od czasu w ruchu rzeczywistym dana jest

wzorem $x = \dfrac{x_1}{\sin(\omega t_1)}\sin(\omega t)$ gdzie $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

czyli zachodzi także $\dot{x} = \dfrac{x_1\omega}{\sin(\omega t_1)}\cos(\omega t)$

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \dfrac{m}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{k}{2}x^2 = \dfrac{mx_1^2\omega^2}{2\sin^2(\omega t_1)}\cos^2(\omega t) - \dfrac{kx_1^2}{2\sin^2(\omega t_1)}\sin^2(\omega t)$

$$= \frac{kx_1^2}{2\sin^2(\omega t_1)}\left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right] = \frac{kx_1^2}{2\sin^2(\omega t_1)}\cos(2\omega t)$$

Działanie Hamiltona dla ruchu analizowanego w przedziale czasu $(t_0, t_1)$

$$W_H = \int_0^{t_1} L\,dt = \frac{kx_1^2}{2\sin^2(\omega t_1)}\int_0^{t_1}\cos(2\omega t)dt = \frac{kx_1^2\sin(2\omega t_1)}{4\omega\sin^2(\omega t_1)} = \frac{kx_1^2}{2\omega}ctg(\omega t_1)$$

Rozważamy ruch porównawczy postaci $x^* = \frac{x_1}{t_1} t \Rightarrow \dot{x}^* = \frac{x_1}{t_1}$

Spełnia on warunek $\delta x(t=0) = \delta x(t=t_1) = 0$ gdyż $x^*(t=0)=0$ $x^*(t=t_1) = x_1$

Funkcja Lagrange'a $\tilde{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 = \frac{kx_1^2}{2t_1^2}\left(\frac{m}{k} - t^2\right) = \frac{kx_1^2}{2t_1^2}\left(\frac{1}{\omega^2} - t^2\right)$

Działanie Hamiltona

a)w ruchu porównawczym $\tilde{W}_H = \int_0^{t_1} L dt = \int_0^{t_1} \frac{kx_1^2}{2t_1^2}\left(\frac{1}{\omega^2} - t^2\right) dt = \frac{kx_1^2}{2t_1^2}\left(\frac{t_1}{\omega^2} - \frac{t_1^3}{3}\right) = \frac{kx_1^2}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3}\right)$

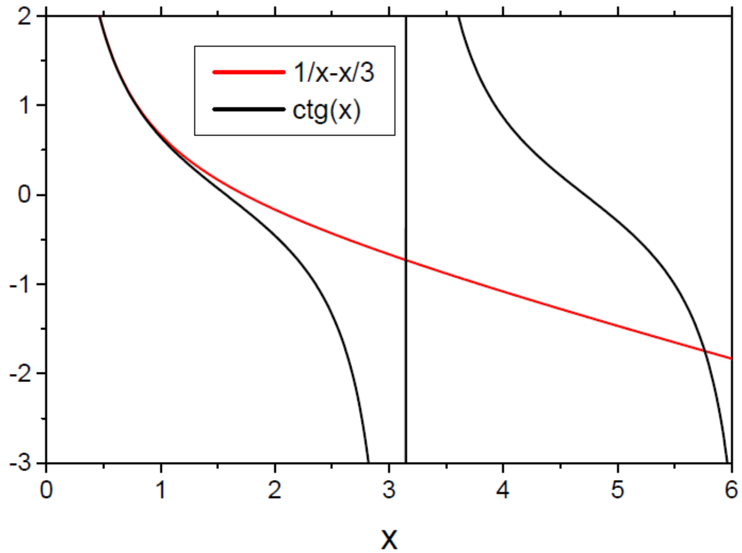
b)w ruchu rzeczywistym $W_H = \frac{kx_1^2}{2\omega} ctg(\omega t_1)$

Powyższy przykład pokazuje iż działanie w ruchu rzeczywistym nie zawsze musi być mniejsze niż działanie w ruchu porównawczym.

Działanie to rzeczywiście jest najmniejsze gdy czas ruchu $t_1$ jest odpowiednio krótki gdyż wówczas

$$ctg(\omega t_1) \overset{\omega t_1 \to 0}{\approx} \frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} - \frac{(\omega t_1)^3}{45} \quad \Rightarrow ctg(\omega t_1) < \frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} \Leftrightarrow W_H < \tilde{W}_H$$

Gdy $\omega t_1 > \pi \Leftrightarrow t_1 > \pi/\omega$ czyli $t_1$ jest większy od połowy okresu drgań równego $2\pi/\omega$ to działanie w ruchu rzeczywistym jest większe niż w rozpatrywanym ruchu porównawczym a więc nie przyjmuje ono wartości minimalnej w zbiorze wszystkich ruchów porównawczych choć wariacja działania dla ruchu rzeczywistego znika. Nie oznacza to iż działanie w rozważanym ruchu porównawczym przyjmuje wartość ekstremalną w zbiorze wszystkich ruchów porównawczych (co wynika z tego iż dla tego ruchu nie znika wariacja działania gdyż nie spełnia on równań Eulera-Lagrange'a dla zagadnienia wariacyjnego z działaniem Hamiltona czyli równań Lagrange'a II rodzaju ) .




Okazuje się iż funkcjonał $\int_{t_0}^{t_1} L[q(t),\dot{q}(t),t]dt$

może osiągnąć minimum dla ekstremali tego funkcjonału $q(t)$ tylko wówczas gdy nie ma innej ekstremali $\tilde{q}(t)$ funkcjonału $\int_{t_0}^{t_1} L[q(t),\dot{q}(t),t]dt$

o takiej własności iż dla pewnej chwili czasu $t$ z zakresu $(t_0,t_1)$ zachodzi $q(t)=\tilde{q}(t)$

oraz $\tilde{q}(t=t_0)=q(t=t_0)=0$ $\delta q(t=t_0)=\delta\tilde{q}(t=t_0)=0$ $\delta q(t=t_1)=\delta\tilde{q}(t=t_1)=0$

W przypadku rozważanym dla czasu $t=\dfrac{\pi}{\omega}$ następuje przecięcie ekstremal odpowiadających drganiom o tej samej częstości różniących się amplitudą drgań. We wszystkich ruchach opisywanych przez te ekstremale drgające ciało w chwili $t$=0 znajdowało się w położeniu równowagi a więc $\tilde{q}(t=t_0=0)=q(t=t_0=0)=0$

Zasada Hamiltona a równania Lagrange'a I rodzaju ( dla zainteresowanych)

Załóżmy iż ruch układu złożonego z *n* ciał analizujemy we współrzędnych kartezjańskich nie będących współrzędnymi uogólnionymi w *3n* wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej w obecności *p* więzów opisanych równaniami

$$f_k\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_j \ldots., x_{3n}\right) = 0 \qquad k = 1, \ldots., p$$

W ruchu rzeczywistym zachodzić musi nie tylko znikanie wariacji działania Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(x_j, \dot{x}_j, t)dt$ rozumianego jako funkcjonał współrzędnych $x_j$ ($j=1,\ldots\ldots.,3n$) ale także muszą być spełnione warunki dodatkowe

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\delta x_j = 0 \qquad k = 1, \ldots., p \qquad \delta x_j\left(t = t_0\right) = \delta x_j\left(t = t_1\right) = 0 \qquad j = 1, \ldots., 3n$$

Warunki te powodują iż wariacje $\delta x_j$ nie są niezależne od siebie . Można je jednak za takie traktować gdy zażąda się by znikała poniższa wariacja

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( L(x_j, \dot{x}_j, t) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k \right) dt = 0$$

$$\delta f_k = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\delta x_j$$

przy warunkach $\delta x_j\left(t = t_0\right) = \delta x_j\left(t = t_1\right) = 0 \qquad j = 1, \ldots., 3n$

$\lambda_k$ -odpowiednio dobrane nieoznaczone mnożniki Lagrange'a

Postępując analogicznie jak poprzednio można pokazać iż

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( L(x_j, \dot{x}_j, t) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{3n} \left( \frac{\partial L}{\partial x_j} + \left( \sum_{k=1}^{f} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) - \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \right) \delta x_j dt$$

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(L(x_j,\dot{x}_j,t)+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k f_k(x_j)\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{3n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}+\left(\sum_{k=1}^{f}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\right)\delta x_j dt$$

Przy braku wynikających z więzów warunków na $\delta x_j$ znikanie powyższej wariacji jest równoważne spełnieniu równań postaci

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)=0 \qquad j=1,......,3n$$

Ponieważ $L=T(\dot{x}_1,.....,\dot{x}_j,...,\dot{x}_{3n})-U\left(x_1,.....,x_j,...,x_{3n},\dot{x}_1,.....,\dot{x}_j,...,\dot{x}_{3n},t\right)=$

$$=\sum_{j=1}^{3n}\frac{m_j\dot{x}_j^2}{2}-U\left(x_1,.....,x_j,...,x_{3n},\dot{x}_1,.....,\dot{x}_j,...,\dot{x}_{3n},t\right)$$

to

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)=-\frac{\partial U}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right)=-\frac{\partial U}{\partial x_j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{d}{dt}\left(m_j\dot{x}_j\right)=X_j-m_j\ddot{x}_j$$

( $X_j=-\dfrac{\partial U}{\partial x_j}+\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right)$ –$j$-ta składowa siły)

czyli równania $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)=0\Leftrightarrow X_j+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}=m_j\ddot{x}_j$

są równaniami Lagrange’I rodzaju

# Informacje podstawowe

Równania Lagrange'a II rodzaju są niezmiennicze przy poniższej transformacji- zamianie funkcji Lagrange'a $L(q,\dot{q},t) \to \tilde{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \dfrac{d\Psi(q,t)}{dt}$

gdzie $\dfrac{d\Psi(q,t)}{dt}$ - pochodna zupełna po czasie dowolnej funkcji zależnej od współrzędnych uogólnionych i czasu

Oznacza to iż zachodzą jednocześnie równania

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0 \qquad l = 1,\dots,f$$

jak i równania

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_l} = 0 \qquad l = 1,\dots,f$$

Dowód opiera się pokazaniu iż zachodzi równość wariacji

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q,\dot{q},t)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

przy warunku $\delta q_l(t=t_1) = 0 = \delta q_l(t=t_2)$

skąd wynika niezmienniczość równań Lagrange'a II rodzaju

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q,\dot{q},t)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(L(q,\dot{q},t) + \frac{d\Psi(q,t)}{dt}\right)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\Psi(q,t)}{dt}dt =$$

$$= \delta\int_{t_1}^{t_2}\big(L(q,\dot{q},t)\big)dt + \delta\Psi(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \delta\int_{t_1}^{t_2}\big(L(q,\dot{q},t)\big)dt + \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial\Psi}{\partial q_l}\delta q_l\Big|_{t_1}^{t_2} = \delta\int_{t_1}^{t_2}\big(L(q,\dot{q},t)\big)dt$$

gdyż $\delta q_l(t=t_1) = 0 = \delta q_l(t=t_2)$ $\quad l=1,\dots\dots,f;\quad f$ -liczba współrzędnych uogólnionych

Przykład. Można pokazać iż  równania Lagrange'a II rodzaju dla funkcji Lagrange'a równej

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{4}m\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\left(x_1 - x_2\right)^2$$

są takie same jak funkcji Lagrange'a równej

$$L' = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1 - i\omega_0 x_1\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2 - i\omega_0 x_2\right)^2 - \frac{1}{4}m\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\left(x_1 - x_2\right)^2$$

i maja postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_1 + m\omega_0^2 x_1 + \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\left(x_1 - x_2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_2 + m\omega_0^2 x_2 - \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\left(x_1 - x_2\right) = 0$$

Wynika to z faktu iż

$$L' - L = -i\omega_o m\left(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2\right) = -\frac{i\omega_0 m}{2}\frac{d}{dt}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \frac{d}{dt}\Psi\left(x_1, x_2\right)$$

gdzie

$$\Psi(x_1, x_2) = -\frac{i\omega_0 m}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

# Zmiana działania Hamiltona przy transformacji współrzędnych

Zmiana funkcjonału będącego działaniem Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L\big(q_l(t), \dot{q}_l(t), t\big)dt$

przy infinitezymalnych transformacjach współrzędnych uogólnionych danych poprzez wariacje tych współrzędnych

$$q_l(t) \to q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t),$$

jest równa w pierwszym przybliżeniu wariacji tego funkcjonału czyli

$$W_H[q+\delta q] - W_H[q] \approx \delta W_H = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta \dot{q}_l \right) dt =$$

$$= \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right)\delta q_l + \frac{d}{dt}\left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l \right) \right] dt$$

Nie zakładamy iż

$$\cancel{\delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \Rightarrow \delta W_H = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt}\left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l \right) \right] dt$$

Gdy dla dowolnych $t_0, t_1$ $\quad \delta W_H = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l = const$

# Twierdzenie Noether (wersja uproszczona)

Jeżeli dla pewnej ciągłej grupy transformacji współrzędnych uogólnionych

$$q_l(t) \to q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t)$$

działanie Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(q_l(t), \dot{q}_l(t), t)\,dt$ dla dowolnych $t_0$, $t_1$

jest jej niezmiennikiem czyli jego wariacja znika $\delta W_H = 0$

to istnieje pewna liczba praw zachowania wielkości określonych poniższym wzorem

$$\boxed{\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = \mathrm{const}}$$

Wielkości tych jest tyle ile parametrów jest niezbędnych do sparametryzowania grupy transformacji współrzędnych dla których działanie Hamiltona jest ich niezmiennikiem

Ciągłość transformacji zapewnia iż można dowolną transformacje skończoną przedstawić zawsze jako złożenie infinitezymalnie małych transformacji w przypadku których zmianę działania można przybliżyć poprzez jego wariacje. Ponadto można przyjąć iż parametry przyjęte do sparametryzowania grupy transformacji mogą przyjmować dowolne wartości ze zbioru ciągłego.

Rozważamy układ złożony z *n* punktów materialnych na które nie nałożono więzów przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie kartezjańskim tych punktów
( $q_j = x_j$, $j=1\ldots\ldots,f=3n$).

Gdy działanie Hamiltona $W = \int_{t_o}^{t_1} L(x_j, \dot{x}_j, t)dt$

jest niezmiennikiem transformacji $x_j(t) \to x_j^*(t) = x_l(t) + \delta x_j(t),$
to wielkość określona poniższym wzorem jest całką ruchu

$$\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l\right) = \sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} p_j \delta x_j = \sum_{i=1}^{n}\left(p_{ix}\delta x_i + p_{iy}\delta y_i + p_{iz}\delta z_i\right) = const \qquad (*)$$

Niezmienniczość względem przesunięć w przestrzeni

Rozważmy przesunięcie układu wzdłuż osi Ox o dowolny $\delta x$ .
Wówczas

$$\delta x_i = \delta x \qquad \delta y_i = \delta z_i = 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_{ix}\delta x = \text{const} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_{ix} = \text{const}$$

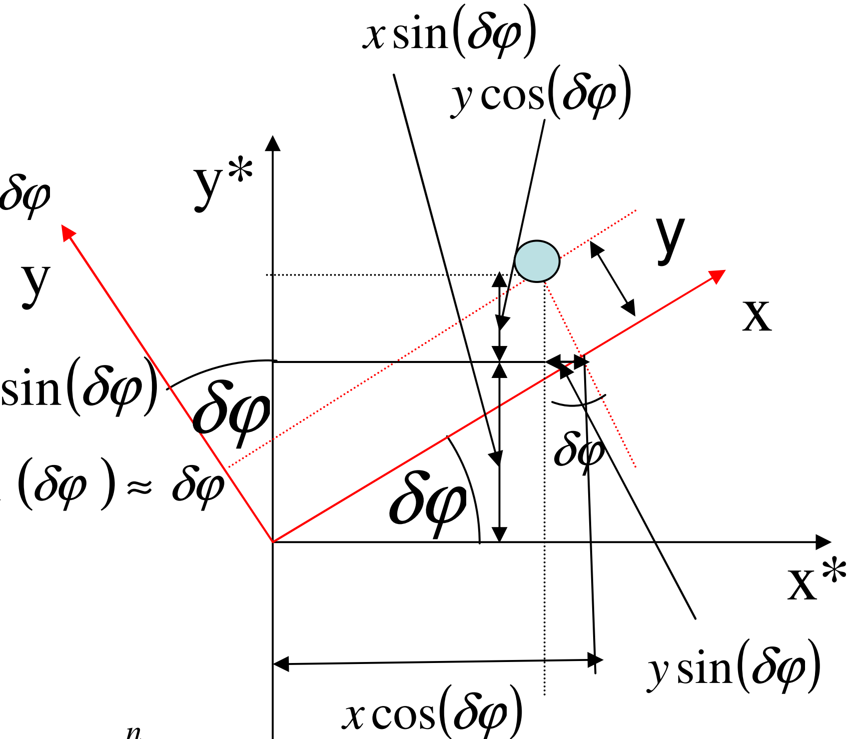
Zasada zachowania x-owej składowej pędu

Aby działanie Hamiltona było niezmiennicze względem tej transformacji funkcja Lagrange'a może zależeć od x-owych składowych wektorów wodzących punktów materialnych tylko poprzez ich różnice

$$\sum_{j=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)=\sum_{j=1}^{3n} p_j \delta x_j = \sum_{i=1}^{n}\left(p_{ix}\delta x_i + p_{iy}\delta y_i + p_{iz}\delta z_i\right) = const \qquad (*)$$

Niezmienniczość względem obrotów

Rozważmy obrót o dowolny kąt $\delta\varphi$ wokół osi Oz . Odpowiada mu obrót osi układu o kąt $-\delta\varphi$




$$x_i^* = x_i\cos(\delta\varphi) - y_i\sin(\delta\varphi) \qquad y_i^* = y_i\cos(\delta\varphi) + x_i\sin(\delta\varphi)$$

Gdy $\delta\varphi \to 0$ w przybliżeniu $\cos(\delta\varphi) \approx 1, \sin(\delta\varphi) \approx \delta\varphi$

$$x_i^* = x_i - y_i\delta\varphi,\ y_i^* = y_i + x_i\delta\varphi,\ z_i^* = z_i$$

$$\Rightarrow \delta x_i = -y_i\delta\varphi,\ \delta y_i = x_i\delta\varphi,\ \delta z_i = 0$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(-p_{ix}y_i + p_{iy}x_i\right)\delta\varphi = \text{const} \Rightarrow L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{zi} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{iy} - y_i p_{ix} = \text{const}$$

Zasada zachowania z-wej składowej momentu pędu

Uwaga. Obrót o skończony kąt wokół osi OZ można przedstawić jako złożenie obrotów o kąty nieskończenie małe wokół tej osi co świadczy o tym iż obrót jest transformacją ciągłą, która można sparametryzować przez kąt obrotu.

Aby działanie Hamiltona było niezmiennicze względem tej transformacji niezależnie od wyboru osi Oz funkcja Lagrange'a może zależeć od wektorów wodzących i prędkości punktów materialnych tylko poprzez iloczyny skalarne tych wektorów

Jakie wielkości są zachowane przy transformacji ciągłej parametryzowanej przy pomocy pojedynczej zmiennej s dowolnego układu złożonego z $n$ punktów materialnych gdy transformacja ta nie zmienia działania Hamiltona?

Rozważamy transformacje infinitezymalnie małą prowadząca do zmiany współrzędnych uogólnionych parametryzowaną przy pomocy zmiennej $s$

$$q_l \to q_l^*(q_l, s) = q_l + \delta q_l = q_l + \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s$$

*(l=1,…,f)* $f$ -liczba stopni swobody

Gdy $s$ =0 to powyższa transformacja nie zmienia współrzędnych uogólnionych

Z niezmienniczości działania Hamiltona względem powyższej transformacji w której s przyjmuje wartości ze zbioru ciągłego łącznie z $s$=0 wynika iż

$$\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^{f} p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s = const \Rightarrow \sum_{l=1}^{f} p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0) = const$$

$p_l$-pęd uogólniony związany ze współrzędną $q_l$

Rozważamy układ złożony z $n$ punktów materialnych na ruch którego nie nałożono więzów. Za współrzędne uogólnione przyjmujemy składowe wektorów wodzących punktów materialnych w układzie kartezjańskim

$$q_l = \left\{ \begin{matrix} x_i & gdy & l = 3i-2 \\ y_i & gdy & l = 3i-1 \\ z_i & gdy & l = 3i \end{matrix} \right\} \quad l = 1,....,f = 3n, \qquad i = 1,.....,n$$

Rozważmy transformacje tych współrzędnych dane wzorami

$$q_l \to q_l^*(q_l, s) = q_l + \delta q_l = q_l + \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s$$

Z niezmienniczości działania Hamiltona względem powyższej transformacji wynika iż całką ruchu jest wielkość

$$\sum_{l=1}^{f} p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0) = \sum_{i=1}^{n}\left( p_{ix}\frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy}\frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz}\frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0)\right) = const$$

W przypadku translacji wszystkich $n$ punktów materialnych układu o dowolnie mały wektor dany w układzie kartezjańskim wzorem $\delta \vec{r}_i = (s,0,0)$ następuje transformacja składowych w układzie kartezjańskim wektorów wodzących wszystkich punktów układu opisana wzorami $x_i \to x_i^* = x_i + s \qquad y_i \to y_i^* = y_i \qquad z_i \to z_i^* = z_i \qquad i=1,....n$

Gdy transformacja omawiana nie prowadzi do zmiany działania Hamiltona to wielkością zachowaną jest

$$\sum_{i=1}^{n}\left( p_{ix}\frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy}\frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz}\frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ix}$$

( suma $x$-owych składowych wektorów pędu wszystkich punktów układu)

Z niezmienniczości działania Hamiltona względem transformacji

$$q_l \to q_l^*(q_l, s) = q_l + \delta q_l = q_l + \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s$$

wynika iż całką ruchu jest wielkość

$$\sum_{l=1}^{f} p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0) = \sum_{i=1}^{n}\left( p_{ix}\frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy}\frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz}\frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0)\right) = const$$

W przypadku obrotu układu wokół osi Oz o kąt $s$ dowolnie mały mamy dla wszystkich punktów w układzie kartezjańskim

$$x_i \to x_i^* = x_i\cos(s) - y_i\sin(s) \qquad y_i \to y_i^* = y_i\cos(s) + x_i\sin(s) \qquad z_i \to z_i^* = z_i$$

Gdy transformacja omawiana nie prowadzi do zmiany działania Hamiltona to wielkością zachowaną jest

$$\sum_{i=1}^{n}\left( p_{ix}\frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy}\frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz}\frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ix}\big(-x_i\sin(s=0) - y_i\cos(s=0)\big) + p_{iy}\big(-y_i\sin(s=0) + x_i\cos(s=0)\big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} - p_{ix}y_i + p_{iy}x_i = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = L_z$$

składowa z-owa momentu pędu układu

Twierdzenie Noether (wersja nieco uogólniona)

Jeżeli dla pewnej ciągłej grupy transformacji

$$q_l(t) \rightarrow q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t)$$

funkcjonał $I = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t)\, dt$ dla dowolnych $t_0$, $t_1$ jest jej niezmiennikiem, tzn.

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) \equiv 0$$

i jeżeli funkcje $q_l(t)$ reprezentują ekstremale funkcjonału $I$, tj. spełniają równania Eulera – Lagrange'a, to

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = \mathrm{const} \qquad (*)}$$

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera – Lagrange'a dla pewnego funkcjonału *I* (zachodzi to zawsze dla działania Hamiltona) i jeżeli funkcjonał ten jest niezmiennikiem pewnej ciągłej grupy transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania wielkości określonych wzorem (*)

Wariacja funkcji z wariacją czasu

Rozważmy zbiór funkcji postaci $t^*(t) = t + \Delta t(t) = t + \Delta t$ wariacja czasu

Wariacja z wariacją czasu współrzędnej uogólnionej $\Delta q_l(t) = q_l^*(t^*) - q_l(t) = q_l^*(t+\Delta t) - q_l(t)$

Rozważamy funkcjonał $$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

i jego różnice w ruchu porównawczym z wariacją czasu i w ruchu rzeczywistym

$$I[q^*(t^*)] - I[q(t)] \approx \Delta I$$ gdzie

$$\Delta I \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta F + F \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt,$$ Wariacja z wariacją czasu funkcjonału $I[q]$

Wariacja z wariacją czasu funkcji $F$

$$\Delta F = \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t. \qquad \Delta \dot{q}_l \equiv \frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt}$$

W przybliżeniu zachodzi

$$\Delta q_l = \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t \qquad \Delta \dot{q}_l = \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \ddot{q}_l \Delta t$$

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \right] dt$$

$\delta q_l$ -wariacja bez wariacji czasu funkcji $q_l$

## Twierdzenie Noether (wersja pełna)

Jeżeli dla pewnej ciągłej grupy transformacji

$$q_l(t) \to q_l^*(t^*) \cong q_l(t) + \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t, \quad t \to t^* = t + \Delta t(t)$$

funkcjonał $I = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t)\, dt$ dla dowolnych $t_0$, $t_1$ jest jej niezmiennikiem, tzn.

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \equiv 0$$

i jeżeli funkcje $q_l(t)$ reprezentują ekstremale funkcjonału $I$, tj. spełniają równania Eulera – Lagrange'a, to

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t = \mathrm{const}} \quad (*)$$

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera – Lagrange'a dla pewnego funkcjonału *I* (np. działania Hamiltona) i jeżeli funkcjonał ten jest niezmiennikiem pewnej grupy ciągłych transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania wielkości określonych wzorem (*)

Rozważmy układ złożony z *n* punktów materialnych , funkcja *F* jest funkcją Lagrange'a, *F = L*.

Gdy działanie Hamiltona $$W = \int_{t_o}^{t_1} L(q_l, \dot{q}_l, t)dt$$

jest niezmiennikiem transformacji $q_l(t) \to q_l^*(t^*) \cong q_l(t) + \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t, \quad t \to t^* = t + \Delta t(t)$

to wielkość określona poniższym wzorem jest całką ruchu

$$\sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) + L\Delta t = const \qquad (*)$$

---

Niezmienniczość względem przesunięć w czasie

Rozważmy przesunięcie w czasie o $\delta t$ . Wówczas $\Delta q_l = 0 \qquad (l = 1, ...., f), \Delta t = \delta\tau$

$$\Delta q_l = \delta q_l + \dot{q}_l \Delta t \Rightarrow \delta q_l = -\dot{q}_l \delta\tau$$

$\delta\tau$ dowolne

$$(*) \Rightarrow \sum_{l=1}^{f} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l \delta\tau + L\delta\tau = \left[ \sum_{l=1}^{f} (-p_l \dot{q}_l) + L \right] \delta\tau = -G\delta\tau = \mathrm{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -G = const \Rightarrow$$

Zasada zachowania energii mechanicznej *E=T+V=G* dla więzów niezależnych od czasu i sił potencjalnych

## slajdy 45-60 informacje dodatkowe dla zainteresowanych

- Wariacja funkcji i całki z wariacją zmiennej całkowania np. czasu (wyprowadzenie relacji wykorzystywanych na wykładzie)
- Zasada Maupertuis i zasada Jacobiego.

Wariacja funkcji z wariacją czasu

Rozważmy zbiór funkcji postaci $t^*(t) = t + \Delta t(t) = t + \Delta t$

Wariacja z wariacją czasu współrzędnej uogólnionej $\Delta q_l(t) = q_l^*(t^*) - q_l(t) = q_l^*(t+\Delta t) - q_l(t)$

$$\frac{d\Delta q_l(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[q_l^*(t+\Delta t) - q_l(t)\right] = \dot{q}_l^*(t+\Delta t)\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right) - \dot{q}_l(t)$$

$$= \left[\dot{q}_l^*(t+\Delta t) - \dot{q}_l(t)\right]\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right) + \dot{q}_l(t)\frac{d\Delta t}{dt} = \Delta \dot{q}_l + \dot{q}_l(t)\frac{d\Delta t}{dt}$$

Będziemy rozpatrywać różnice wartości całki $I[q] = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$

w ruchu porównawczym z porównawczym przebiegiem czasu i w ruchu rzeczywistym

Niech $t = t(\tau),\ \tau - \text{parametr, nie ulega wariacji,} \quad t_0 = t(\tau_0), t_1 = t(\tau_1), \frac{dt}{d\tau} > 0$

Niech $t' \equiv \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow dt = t' d\tau, \quad q_l' \equiv \frac{dq_l}{d\tau} = \frac{dq_l}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \dot{q}_l t' \Rightarrow \dot{q}_l = \frac{q_l'}{t'} \Rightarrow$

$$\int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q, q'/t', t)t'\, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \overline{F}(q, q', t, t')\, d\tau, \quad \overline{F}(q, q', t, t') \equiv F(q, q'/t', t)t'$$

$$I[q] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \overline{F}(q, q', t, t')\, d\tau = \bar{I}[q, t]$$

$t$ traktujemy jako niezależną od funkcji $q_l$ funkcje parametru $\tau$

Wariacja (bez wariacji parametru $\tau$) całki $\overline{I}\,[q,t\,]$ równa w przybliżeniu

$$\bar{I}\left[q^*,t^*\right]-\bar{I}[q,t]=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\overline{F}\left(q^*\left(t^*\right),q^{*'}\left(t^*\right),t^*,t^{*'}\right)-\overline{F}\left(q(t),q'(t),t,t'\right)\right\}d\tau$$

wynosi

$$\delta\bar{I}=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{l=1}^{f}\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial q_l}\left(q_l^*\left(t^*\right)-q_l(t)\right)+\frac{\partial\overline{F}}{\partial q_l'}\left(q_l^{*'}\left(t^*\right)-q_l'(t)\right)\right]+\frac{\partial\overline{F}}{\partial t}\left(t^*-t\right)+\frac{\partial\overline{F}}{\partial t'}\left(t^{*'}-t'\right)\right\}d\tau$$

$$=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{l=1}^{f}\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial q_l}\Delta q_l+\frac{\partial\overline{F}}{\partial q_l'}\Delta q_l'\right]+\frac{\partial\overline{F}}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial\overline{F}}{\partial t'}\Delta t'\right\}d\tau=\Delta I$$

gdzie

$$\Delta q_l'=q_l^{*'}\left(t^*\right)-q_l'(t)=\frac{d}{d\tau}\left[q_l^*\left(t^*\right)-q_l(t)\right]=\frac{d\Delta q_l}{d\tau}=\frac{d\Delta q_l}{dt}t'$$

$$\Delta t'=t^{*'}-t'=\frac{d}{d\tau}\left[t^*-t\right]=\frac{d\Delta t}{d\tau}=\frac{d\Delta t}{dt}t'$$

$$\overline{F}\left(q,q',t,t'\right)=F\left(q,\dot{q}=\frac{q'}{t'},t\right)t'\Rightarrow\frac{\partial\overline{F}}{\partial q_l'}=\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_l'}t'=\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{\partial\left(q_l'/t'\right)}{\partial q_l'}t'=\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{1}{t'}t'=\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}$$

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial t'}=\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial t'}t'+F=\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{\partial\left(q_l'/t'\right)}{\partial t'}t'+F=-\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{q_l'}{(t')^2}t'+F=$$

$$=-\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\frac{\dot{q}_l t'}{(t')^2}t'+F=-\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_l}\dot{q}_l+F$$

$$\bar{F}(q,q',t,t') = F\left(q, \dot{q} = \frac{q'}{t'}, t\right)t' \qquad \Delta t' = t'\Delta t \qquad \Delta q_l' = \frac{d\Delta q_l}{dt}t' \qquad \Delta t' = \frac{d\Delta t}{dt}t' \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_l'} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}$$

$$\delta\bar{I} = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{l=1}^{f}\left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_l'}\Delta q_l'\right] + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t'}\Delta t'\right\}d\tau = \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial t'} = -\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l + F$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}t'\Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}t'\right) + \frac{\partial F}{\partial t}t'\Delta t + \left[\left(-\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l\right) + F\right]\frac{d\Delta t}{dt}t'\right\}d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{l=1}^{f}\left[\frac{\partial F}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l\frac{d\Delta t}{dt}\right)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + F\frac{d\Delta t}{dt}\right\}t'\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}\Delta\dot{q}_l\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + F\frac{d\Delta t}{dt}\right]dt, \quad \text{gdzie} \quad \Delta\dot{q}_l \equiv \frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l\frac{d\Delta t}{dt} =$$

$$= \left(\dot{q}_l^*(t+\Delta t) - \dot{q}_l(t)\right)\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right) \approx$$

$$\approx \left(\dot{q}_l^*(t+\Delta t) - \dot{q}_l(t)\right)$$

$$\boxed{\Delta I \equiv \delta\bar{I} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta F + F\frac{d\Delta t}{dt}\right)dt,}$$

Wariacja z wariacją czasu całki *I* [*q*]

gdzie $\boxed{\Delta F = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}\Delta\dot{q}_l\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t.}$

wariacja z wariacją czasu prędkości uogólnionej

Wariacja z wariacją czasu funkcji *F*

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt$$

$$\Delta q_l = q_l^*(t+\Delta t) - q_l(t) \approx q_l^*(t) + \frac{\partial q_l}{\partial t} \Delta t - q_l(t) = \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t$$

$$\Delta \dot{q}_l = \frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \ddot{q}_l \Delta t + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \ddot{q}_l \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta I \approx \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \Delta t + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \Delta t \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\delta q_l}{dt} \right) + \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) \Delta t + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{l=1}^{f} \left[ \frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l \right] + \frac{dF}{dt} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{l=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \right] dt$$

Zasada Maupertuis
dla układu punktów materialnych o więzach holonomicznych, dwustronnych i skleronomicznych (energia kinetyczna nie zależy jawnie od czasu). Zasada Maupertuis jest spełniona dla sił potencjalnych jak również dla sił niepotencjalnych

Dla ruchu rzeczywistego w każdym przedziale czasu ($t_0$, $t_1$) zachodzi

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

$$\text{gdzie} \quad \Delta q_l(t = t_0) = \Delta q_l(t = t_1) = 0, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

$$\Delta T = \Delta A = \sum_{l=1}^{f} Q_l \Delta q_l \qquad (*)$$

Wszystkie ruchy porównawcze zaczynają się i kończą w tym samym położeniu co ruch rzeczywisty ale w czasie, który może różnic się o nieskończenie małą wielkość w stosunku do czasu ruchu rzeczywistego

Przy czym jeżeli $T \neq 0$ w przedziale ($t_0$, $t_1$), to powyższy warunek spełniony jest tylko dla ruchu rzeczywistego

Warunek (*) jest nałożony na wariację z wariacją czasu energii kinetycznej która określa zmianę energii kinetycznej układu przy przejściu od ruchu rzeczywistego do ruchu porównawczego z porównawczymi przebiegami czasowymi. Zmiana energii kinetycznej według warunku (*) musi być równa sumie prac wszystkich sił na przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami równych wariacjom z wariacją czasu współrzędnych uogólnionych.

Można wykazać, że warunek (*) gdy $T \neq 0$ nie nakłada żadnych ograniczeń na wariacje $\Delta q$, więc mogą być one dowolne.

Dowód zasady Maupertuis polega na wykazaniu jej równoważności z równaniami Lagrange'a II rodzaju.

$$0 = 2\Delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 2\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T + T\frac{d\Delta t}{dt}\right)dt = 2\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta T + T\frac{d\Delta t}{dt} - \frac{1}{2}\left(\Delta T - \Delta A\right)\right]dt = \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta T + \boxed{2T}\frac{d\Delta t}{dt} + \Delta A\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\Delta \dot q_l\right) + \frac{\partial T}{\partial t}\Delta t + \boxed{\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\dot q_l\right.}\left.\frac{d\Delta t}{dt} + Q_l\Delta q_l\right)dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left[\left(Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\left(\Delta \dot q_l + \dot q_l\frac{d\Delta t}{dt}\right)\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left[\left(Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left[\left(Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\Delta q_l + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\Delta q_l\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\right)\Delta q_l\right]dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(Q_l - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\Delta q_l\,dt + \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\Delta q_l\Bigg|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{f}\left(Q_l - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\Delta q_l\,dt$$

Implikacja w kierunku odwrotnym

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \rightarrow \Delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0 \qquad\qquad \Delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l$$

zachodzi również gdyż $\Delta q_l$ są dowolne

Dowód , że warunek $\Delta T = \Delta A = \sum_{l=1}^{f} Q_l \Delta q_l$ nie nakłada żadnych ograniczeń na wariacje $\Delta q$, więc mogą być one dowolne.

$$\Delta T = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l\right) + \frac{\partial T}{\partial t}\Delta t = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\Delta \dot{q}_l\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l\frac{d\Delta t}{dt}\right)\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right) - \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l\right)\frac{d\Delta t}{dt} =$$

$$= \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{d\Delta t}\right) - 2T\frac{d\Delta t}{dt} = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(2T\Delta t)$$

$$\Delta T = \sum_{l=1}^{f} Q_l \Delta q_l \longrightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_l}\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(2T\Delta t) = \sum_{l=1}^{f} Q_l \Delta q_l \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l\right)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right) - \frac{d}{dt}[2T\Delta t] = 0$$

Po scałkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{l=1}^{f}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l\right)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right) - \frac{d}{dt}[2T\Delta t]\right)dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{l=1}^{f}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l\right)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right)\right)dt - 2T\left(\Delta t(t) - \Delta t(t = t_0)\right) = 0$$

$$\Delta t(t) = \Delta t(t = t_0) + \frac{1}{2T}\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{l=1}^{f}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l\right)\Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\frac{d\Delta q_l}{dt}\right)\right)dt$$

Równanie to gdy $T \neq 0$ narzuca warunek tylko na $\Delta t$ a nie na narzuca warunku na $\Delta q_l$

## Zasada Maupertuis dla układu punktów materialnych o więzach holonomicznych, dwustronnych i skleronomicznych na które działają siły potencjalne niezależne jawnie od czasu (zachowawcze)

W tym przypadku zachodzi $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$

A zatem
$$\Delta T = \Delta A = \sum_{l=1}^{f} Q_l \Delta q_l = -\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial V}{\partial q_l} \Delta q_l = -\Delta V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta T + \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta(T+V) = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$$

Dodatkowy warunek na wariacje z wariacją czasu energii kinetycznej można zastąpić warunkiem na wariacje z czasem całkowitej energii układu, która musi być równa zeru. W przypadku zasady Hamiltona tym dodatkowym warunkiem jest $\Delta t = 0$ czyli znikanie wariacji czasu

### Zasada Maupertuis

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

gdzie $\Delta q_l (t = t_0) = \Delta q_l (t = t_1) = 0,$

$\Delta E = 0$

### Zasada Hamiltona

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

gdzie $\Delta q_l (t = t_0) = \Delta q_l (t = t_1) = 0,$

$\Delta t = 0$

## Zasada Jacobiego dla układu punktów materialnych na które nałożono więzy skleronomiczne i na które działają siły zachowawcze (*E*=const, V=V(q)) gdy T≠0

Wiadomo iż $T=\sum_{i,j} T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\sum_{i,j} T_{ij}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_j}{dt}=E-V$ $\quad \frac{\partial V}{\partial t}=0, E=const$

Np. dla pojedynczego punktu w układnie kartezjańskim

$$T=T_{xx}\dot{x}^2+T_{yy}\dot{y}^2+T_{zz}\dot{z}^2 \qquad gdzie \qquad T_{xx}=T_{yy}=T_{zz}=\frac{m}{2}$$

A zatem $dt=\sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij}dq_i dq_j}{E-V}}$

Zastępujemy dalej w zasadzie wariacyjnej Maupertuis całkowanie po czasie $t$ całkowaniem po zmiennej $\xi$ niepodlegającej wariacji parametryzującej tor punktu materialnego wykorzystując poniższą relacje

$$dt=\sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij}dq_i dq_j}{E-V}}=\sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij}\frac{dq_i}{d\xi}\frac{dq_j}{d\xi}}{E-V}}d\xi=\sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij}q_i^{'}q_j^{'}}{E-V}}d\xi \qquad \text{gdzie} \qquad q_i^{'}=\frac{dq_i}{d\xi}$$

Z zasady Maupertuis'a wynika zasada Jacobiego w której wyeliminowano czas.

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} T dt=0 \qquad\qquad \delta\int_{\xi_0}^{\xi_1}\sqrt{(E-V)\sum_{i,j} T_{ij}q_i^{'}q_j^{'}}\,d\xi=0$$

gdzie $\Delta q_l(t=t_0)=\Delta q_l(t=t_1)=0,\Rightarrow$ $\qquad$ gdzie $\delta q_l(\xi=\xi_0)=\delta q_l(\xi=\xi_1)=0,\Rightarrow$

$\Delta E=0$

E oznacza stała wartość energii ciała=T+V

Zasada Jacobiego pozwala na określenie równania toru ruchu a nie wyznaczenie ruchu. Z uwagi na eliminacje czasu warunek ΔE=0 występujący w zasadzie Maupertuis wprowadzający warunek na wariacje czasu Δt staje się nieistotny w zasadzie Jacobiego. Dla pojedynczego punktu materialnego zmienną całkowania $\xi$ może być droga pokonana przez punkt w trakcie ruchu $\xi = s$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = \frac{m}{2(dt)^2}\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right]$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m(ds)^2}{2(dt)^2} \Rightarrow (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$$

$$\sum_{i,j} T_{ij} q_i' q_j' = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right) = \frac{m}{2}\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2} = \frac{m}{2}\frac{(ds)^2}{(ds)^2} = \frac{m}{2}$$

Zasada Jacobiego przyjmuje wówczas postać

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{(E-V)\sum_{i,j} T_{ij} q_i' q_j'}\,ds = 0$$

gdzie $\delta q_l(s = s_0) = \delta q_l(s = s_1) = 0, \Rightarrow$

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{\frac{m}{2}(E-V)}\,ds = 0 \Leftrightarrow \delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{(E-V)}\,ds = 0$$

gdzie $\delta q_l(s = s_0) = \delta q_l(s = s_1) = 0$

Dla punktu swobodnego na który nie działają żadne siły $V = const$

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{(E-V)}\,ds = 0 \Leftrightarrow \delta\int_{s_0}^{s_1} ds = 0$$

Porównanie zasady Jacobiego z zasadą Fermata (pozwalająca na określenie biegu promienia świetlnego w ramach optyki geometrycznej)

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{(E-V)}ds=0$$

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}n(s)ds=0$$

*n*-współczynnik załamania

Równanie Eulera –Lagrange'a dla zasady Jacobiego

Wprowadzamy funkcję $J=\sqrt{(E-V)\sum_{i,j}T_{ij}q_i'q_j'}$

Zasada Jacobiego $$\delta\int_{\xi_0}^{\xi_1}J(q,q')d\xi=0$$

gdzie $\delta q_l(\xi=\xi_0)=\delta q_l(\xi=\xi_1)=0,\Rightarrow$

jest równoważna równaniom Jacobiego $$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial J}{\partial q'}\right)-\frac{\partial J}{\partial q}=0$$

## Wyznaczenie toru ruchu punktu materialnego przy pomocy zasady Jacobiego w polu siły ciężkości

$$\delta\int_{\xi_0}^{\xi_1} J(q,q')d\xi = 0$$

gdzie $J(q,q') = \sqrt{(E-V)\sum_{i,j} T_{ij}q_i' q_j'}$

$$\delta q_l(\xi=\xi_0) = \delta q_l(\xi=\xi_1) = 0$$

Rozpatrujemy ruch ciała w płaszczyźnie $y=0$ z osią Oz ustawioną pionowo do góry od punktu $P=(0,0,0)$ do punktu $P_1=(x_1,0,z_1)$. Rolę zmiennej $\xi$ może pełnić zmienna $x$

$$\sum_{i,j} T_{ij}q_i' q_j' = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) = \frac{m}{2}\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) = \frac{m}{2}\left(1+z'^2\right)$$

Funkcja $J$ przyjmuje postać $J = \sqrt{(E-mgz)\frac{m}{2}(1+z'^2)}$

Równanie Eulera –Lagrange'a dla zasady Jacobiego

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial J}{\partial z'}\right) - \frac{\partial J}{\partial z} = 0$$

Ponieważ $\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \Rightarrow z'\frac{\partial J}{\partial z'} - J = const = A$

$$J=\sqrt{\left(E-mgz\right)\frac{m}{2}(1+z'^2)}=\sqrt{\frac{m^2g}{2}}\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)(1+z'^2)}$$

$$\frac{\partial J}{\partial z'}=\sqrt{\frac{m^2g}{2}}\frac{\left(\frac{E}{mg}-z\right)z'}{\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)(1+z'^2)}}=\sqrt{\frac{m^2g}{2}}\frac{\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)}z'}{\sqrt{(1+z'^2)}}$$

$$z'\frac{\partial J}{\partial z'}-J=\sqrt{\frac{m^2g}{2}}\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)}\left(\frac{z'^2}{\sqrt{1+z'^2}}-\sqrt{1+z'^2}\right)=\sqrt{\frac{m^2g}{2}}\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+z'^2}}\right)$$

$$z'\frac{\partial J}{\partial z'}-J=A\Leftrightarrow\sqrt{\frac{m^2g}{2}}\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+z'^2}}\right)=A\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{E}{mg}-z\right)}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+z'^2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{m^2g}}A\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{E}{mg}-z\right)\left(\frac{1}{1+z'^2}\right)=\frac{2}{m^2g}A^2\Leftrightarrow\left(\frac{E}{mg}-z\right)\left(\frac{1}{1+z'^2}\right)=B^2\Leftrightarrow\left(\frac{E}{mg}-z\right)=B^2\left(1+z'^2\right)$$

$$B^2=\frac{2}{m^2g}A^2=const$$

Znalezienie rozwiązania równania $\left(\frac{E}{mg} - z\right) = B^2\left(1 + z'^2\right)$

Poszukujemy rozwiązania równania w postaci paraboli $z(x) = ax^2 + bx + c$

$$z(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = 2ax + b$$

Po wstawieniu zapostulowanego rozwiązania do równania różniczkowego otrzymujemy

$$\left(\frac{E}{mg} - z\right) = B^2\left(1 + z'^2\right) \Rightarrow \left(\frac{E}{mg} - ax^2 - bx - c\right) = B^2\left(1 + 4a^2x^2 + 4abx + b^2\right)$$

Równanie powyższe będzie spełnione dla dowolnego x gdy będą spełnione równania

$$-a = 4a^2B^2 \quad \Rightarrow 4aB^2 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4B^2} \Rightarrow B^2 = -\frac{1}{4a}$$

$$-b = 4abB^2$$

$$\frac{E}{mg} - c = B^2(1 + b^2) \Rightarrow E = mg\left[c + B^2\left(1 + b^2\right)\right] \Rightarrow E = mg\left[c - \frac{\left(1 + b^2\right)}{4a}\right]$$

Relacja $E = mg\left[c - \frac{\left(1 + b^2\right)}{4a}\right]$ pozwala na uzależnienie jednej ze stałych *a,b,c* przez dwie pozostałe. Pozostałe stałe można wyznaczyć znając dwa punkty przez który przechodzi tor ruchu ciała

Zakładając iż wyrzut ciała nastąpił w punkcie $P_0=(x_0=0,y_0=0,z_0=0)$ musi być spełniona zależność

$$z(x=0)=0 \Rightarrow c=0 \qquad z(x)=ax^2+bx+c$$

$$E=-\frac{mg\left(1+b^2\right)}{4a} \Rightarrow a=-\frac{mg\left(1+b^2\right)}{4E} \qquad E=mg\left[c-\frac{\left(1+b^2\right)}{4a}\right]$$

Stałą $b$ można wyznaczyć z warunku

$$z(x=x_1)=z_1 \Rightarrow -\frac{mg\left(1+b^2\right)}{4E}x_1^2+bx_1=z_1 \Rightarrow -mg\left(1+b^2\right)x_1^2+4Ebx_1-4Ez_1 \Rightarrow$$

$$-mgx_1^2b^2+4Ex_1b-4Ez_1-mgx_1^2=0$$

$$b=\frac{-4Ex_1\pm\sqrt{16E^2x_1^2-16Emgx_1^2z_1-m^2g^2x_1^4}}{-2mgx_1^2}=\frac{4E\mp\sqrt{16E^2-16Emgz_1-4m^2g^2x_1^2}}{2mgx_1}$$

$$b=\frac{2E}{mgx_1}\pm\sqrt{\left(\frac{2E}{mgx_1}\right)^2-\frac{4Ez_1}{mgx_1^2}-1}$$

Istnieje parabola łącząca punkty $P_0$ i $P_1$ tylko wtedy gdy

$$\left(\frac{2E}{mgx_1}\right)^2-\frac{4Ez_1}{mgx_1^2}-1\geq 0 \Leftrightarrow z_1\leq\frac{E}{mg}-\frac{mg}{4E}x_1^2$$

Gdy $z_1 = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$ to przez punkty $P_0$ i $P_1$ przechodzi jedna parabola

Warunek ten jest spełniony gdy punkt $P_1$ leży na paraboli $z(x) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x^2$

Gdy $z_1 < \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$ to przez rozważane punkty przechodzą dwie parabole.

Warunek ten jest spełniony gdy punkt $P_1$ leży poniżej paraboli $z(x) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x^2$

Gdy $z_1 > \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$ to przez rozważane punkty nie przechodzi żadna parabola.

Warunek ten jest spełniony gdy punkt $P_1$ leży powyżej paraboli $z(x) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x^2$