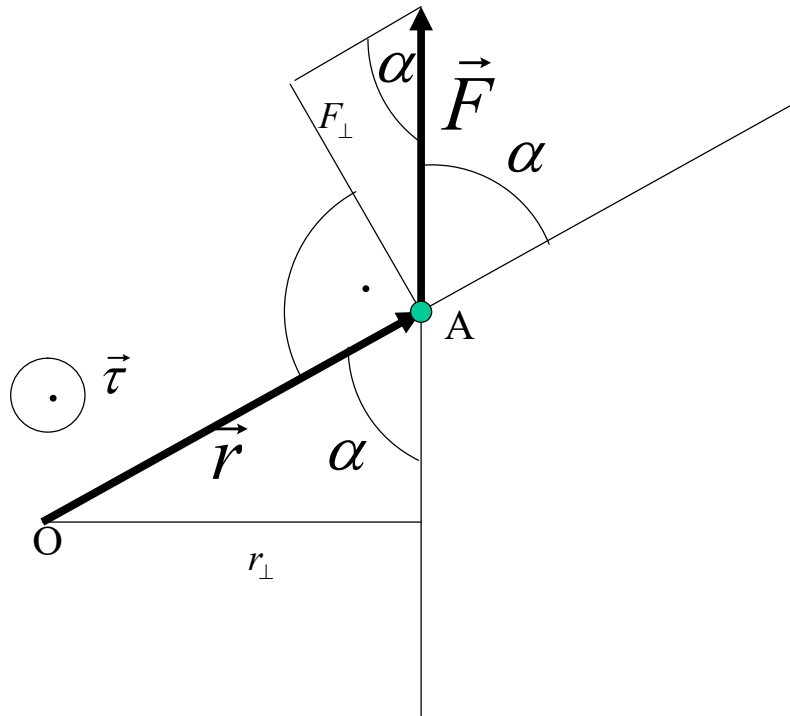


Moment pędu punktu materialnego, moment
siły. Zasada zachowania momentu pędu
Ruch pod wpływem grawitacyjnej siły
centralnej na przykładzie ruchu planet wokół
Słońca i satelitów wokół Ziemi

Moment siły

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Określamy go względem ustalonego punktu O (np. początku układu współrzędnych)

$\vec{F}$ - siła przyłożona

$\vec{r}$ - wektor określający miejsce przyłożenia siły względem punktu O

$$\tau = |\vec{\tau}| = rF \sin(\alpha) = r_{\perp} F = rF_{\perp}$$

$$r = |\vec{r}|; F = |\vec{F}|$$

$$\vec{r} \parallel \vec{F} \rightarrow \vec{\tau} = 0$$

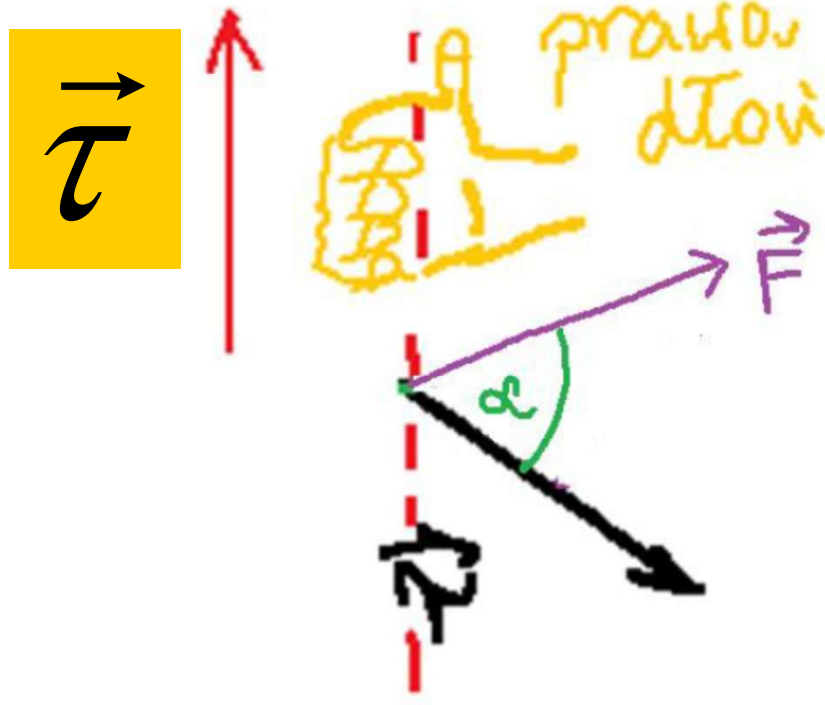
$$\vec{r} \perp \vec{F} \rightarrow |\vec{\tau}| = rF$$

$$r_{\perp} = r \sin \alpha$$

$$F_{\perp} = F \sin \alpha$$

$\vec{\tau}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny w której leżą wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a jego zwrot określa reguła prawej dłoni lub śruby prawoskrętnej

ZWROT MOMENTU SIŁY



Reguła prawej dłoni: połączyć początki wymnażanych wektorów. Prawą dłonią otoczyć znaleziony kierunek wektora (tu: -kierunek pionowy), tak aby cztery palce ustawić wzdłuż łuku kąta alfa od pierwszego z wymnażanych wektorów do drugiego (tu: od r do F). Wtedy odgięty kciuk wskaże zwrot wektora $\vec{\tau}$

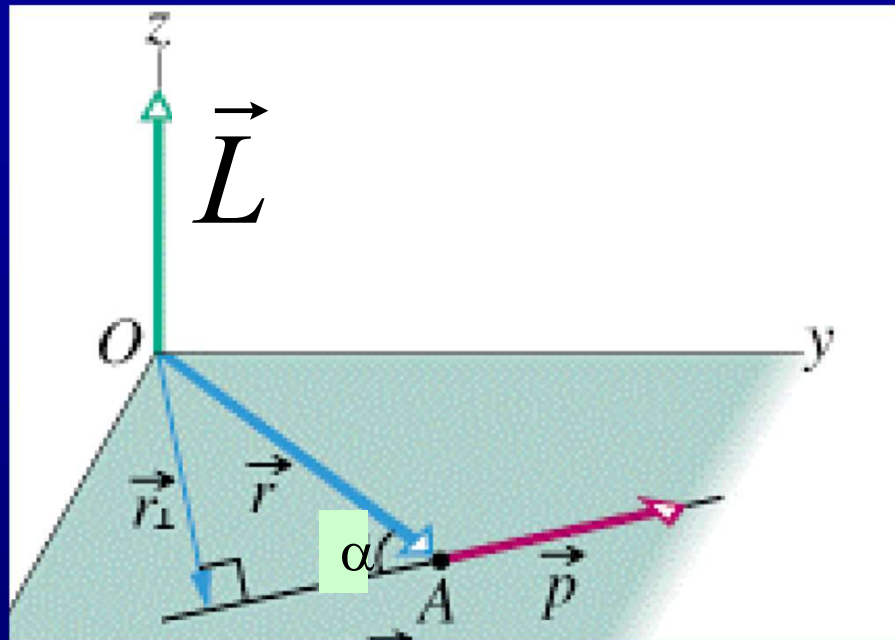
Kiedy moment siły jest równy zero?

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \tau = rF \sin(\alpha)$$

$\tau \neq 0$, gdy:

- 1) $r \neq 0$ (siła jest przyłożona do punktu względem którego liczymy moment siły)
- 2) $F \neq 0$ (brak siły)
- 3) Wektor $\vec{r}$ jest równoległy lub antyrównoległy do wektora $\vec{F}$

Moment pędu punktu materialnego



Określamy go względem ustalonego punktu O (np. początku układu współrzędnych)

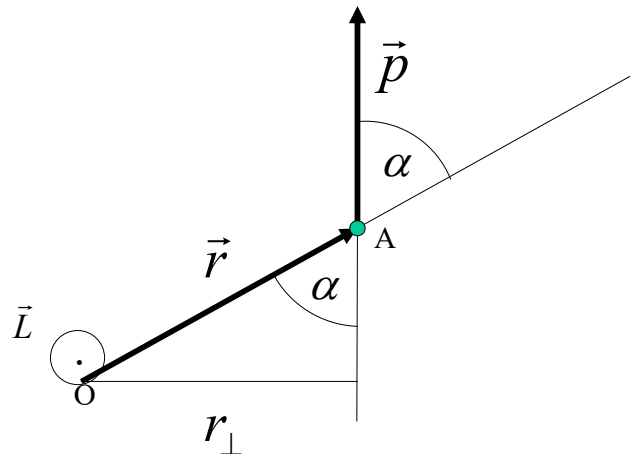
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

$$\vec{p} = m\vec{V} \text{ pęd punktu materialnego}$$

$\vec{r}$ -wektor określający jego położenie względem punktu O

Długość wektora momentu pędu

$$|\vec{L}| = mVr \sin \alpha = mVr_{\perp}$$



$$r = |\vec{r}|; V = |\vec{V}| \quad r_{\perp} = r \sin \alpha$$

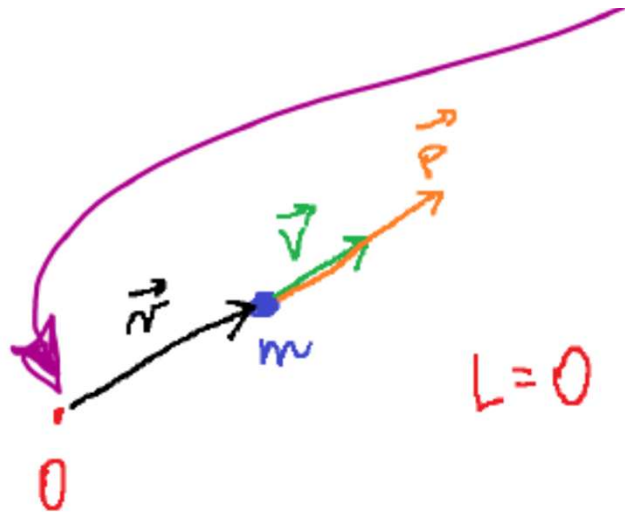
$$\vec{r} \parallel \vec{p} \rightarrow \vec{L} = 0 \quad \vec{r} \perp \vec{p} \rightarrow |\vec{L}| = rp$$

$\vec{L}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny w której leżą wektory $\vec{r}$ i $\vec{p}$, a jego zwrot określa reguła np. prawej dłoni

Pyt. Ciało będące punktem materialnym w pewnej chwili czasu znalazło się w punkcie, którego położenie względem początku układu współrzędnych określa wektor wodzący $\vec{r}$. Ciało to porusza się z prędkością $\vec{V}$. Które z poniższych stwierdzeń opisujących własności momentu pędu tego ciała określonego względem początku układu współrzędnych są **prawdziwe**? Moment ten określa wzór $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ gdzie $\vec{p}$ to pęd ciała

- a) Moment pędu jest zawsze równy zeru $\vec{L} = \vec{0}$ gdy ciało znajduje się w początku układu współrzędnych $\vec{r} = 0$.
- b) Moment pędu jest zawsze równy zeru $\vec{L} = \vec{0}$ gdy wektor prędkości ma ten kierunek i zwrot co wektor wodzący.
- c) Moment pędu jest zawsze równy zeru $\vec{L} = \vec{0}$ gdy wektor prędkości ma przeciwny kierunek (zwrot) niż wektor wodzący.
- d) Moment pędu jest zawsze równy zeru $\vec{L} = \vec{0}$ gdy wektor prędkości jest prostopadły do wektora wodzącego.
- e) Moment pędu jest prostopadły do płaszczyzny w której leżą wektory wodzący i prędkości.
- f) Przy pewnym ustawieniu wektorów wodzącego i prędkości długość wektora momentu pędu może być większa od iloczynu długości wektorów wodzącego i pędu $|\vec{L}| > |\vec{r}||\vec{p}|$.

Jeżeli pęd cząstki jest równoległy lub antyrównoległy do wektora określającego położenie cząstki względem punktu względem którego liczymy moment pędu (punkt O) to moment ten jest równy 0



Zatem:

Moment pędu nie jest „własną” cechą poruszającej się cząstki, w odróżnieniu od pędu. Zależy od wyboru punktu O .

Związek momentu siły z momentem pędu

$$\vec{\tau}_w = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Szybkość zmiany w czasie momentu pędu punktu materialnego (określona przez jego pochodną po czasie) jest równa wypadkowemu momentowi siły działającemu na ten punkt równemu momentowi siły wypadkowej .

Momenty pędu i moment siły wypadkowej są określone względem tego samego punktu nieruchomego w układzie inercyjnym (np. początku układu).

Dowód

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \vec{F}_w = \vec{r} \times \vec{F}_w = \vec{\tau}_w$$

Moment siły wypadkowej można też określić jako sumę wektorów momentów wszystkich sił działających na ciało, ale momenty te muszą być określone względem tego samego punktu względem którego liczymy wypadkowy moment siły

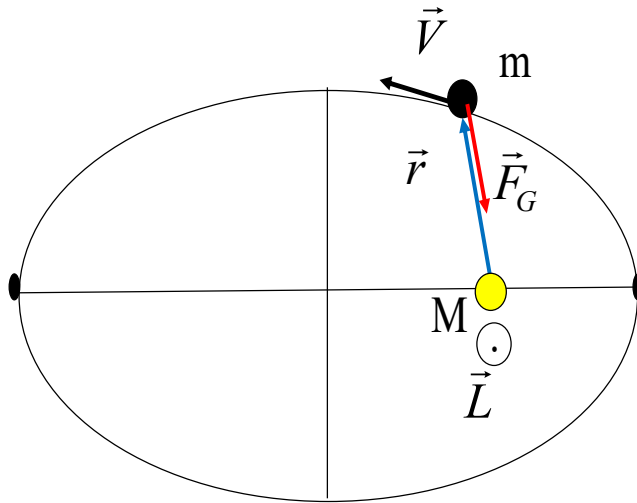
Zasada zachowania momentu pędu

Jeżeli wypadkowy moment siły jest równy zero to moment pędu jest zachowany. Nie ulega zmianie jego kierunek, zwrot i wartość

$$\vec{\tau}_w = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Zasada zachowania momentu pędu w ruchu punktu materialnego o masie m pod wpływem siły centralnej na przykładzie siły grawitacyjnej

Siła centralna – skierowana w kierunku stałego punktu w przestrzeni – centrum siły (w przykładzie miejsca położenia ciała o masie M)



$$r = |\vec{r}|$$

Siła centralna grawitacyjna

$$\begin{aligned}\vec{F}_G &= -\frac{GmM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \\ &= A(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

Moment siły grawitacyjnej określony względem nieruchomego położenia ciała o masie $M \gg m$ (centrum siły)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_G = -\frac{GmM}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

$$\vec{\tau} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Moment pędu ciała o masie m określony względem centrum siły nie zmienia się trakcie ruchu. Ruch ciała o masie m odbywa się w stałej płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\vec{L}$

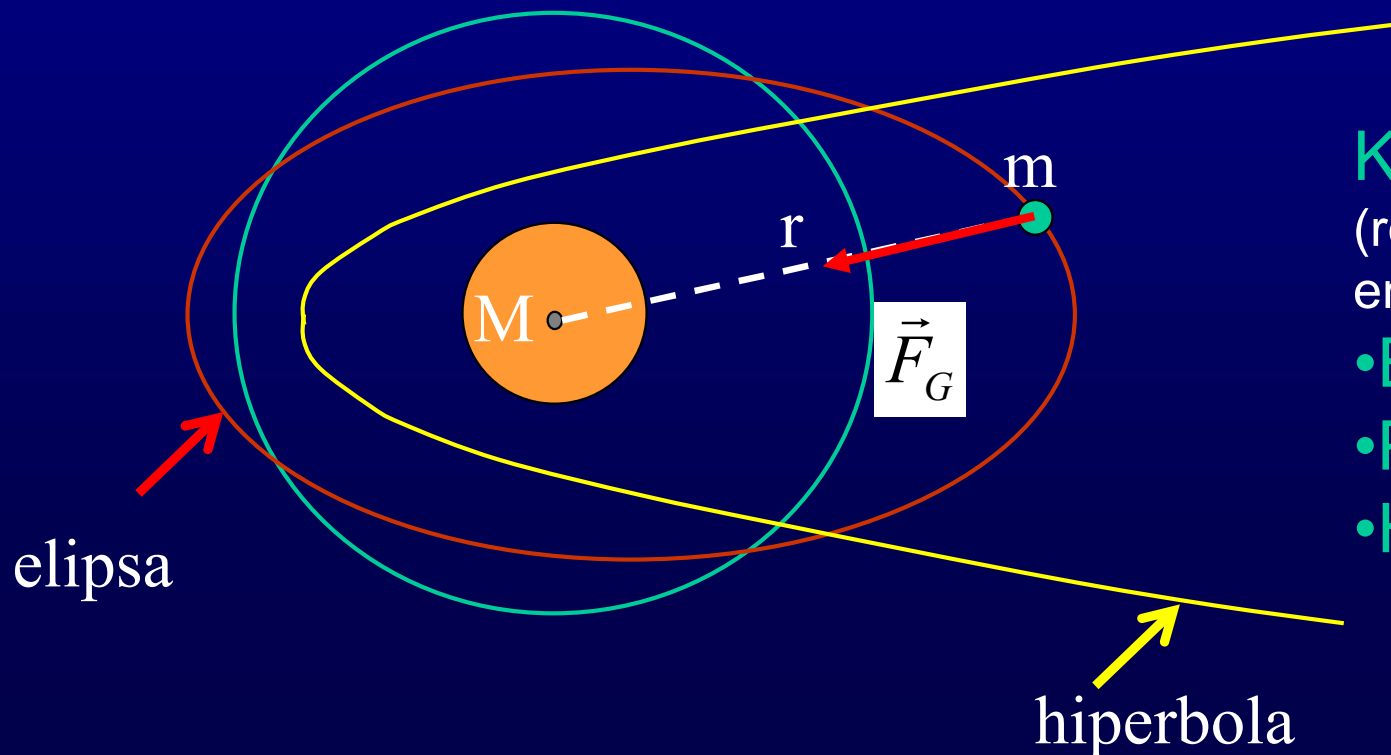
Pyt. Ruch ciała odbywa się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych. Co można powiedzieć o ruchu tego ciała, o momencie pędu tego ciała określonego względem początku układu współrzędnych oraz momencie siły centralnej określonej względem tego samego punktu?

- a) Długość wektora momentu pędu tego ciała nie ulega zmianie w trakcie ruchu, natomiast jego kierunek jest zawsze skierowany w kierunku początku układu współrzędnych.
- b) Momentu pędu ciała ma taki sam kierunek i zwrot co wektor wodzący ciała
- c) Moment pędu ciała ma taki sam kierunek i zwrot co wektor pędu ciała
- d) Moment pędu ciała leży w płaszczyźnie w której leżą wektory wodzący oraz pędu .
- e) Moment pędu ciała jest prostopadły do płaszczyzny w której leżą wektory wodzący oraz pędu .
- f) Moment pędu tego ciała nie ulega zmianie w trakcie ruchu.
- g) Ruch ciała jest płaski i zachodzi w stałej płaszczyźnie.
- h) Moment siły centralnej jest równy 0.
- i) Moment siły centralnej ma taki sam kierunek i zwrot co siła centralna.

Zaznaczyć wszystkie prawdziwe stwierdzenia spośród podanych powyżej.

Możliwe tory ruchu ciała o masie m na które działa tylko siła grawitacyjna ze strony nieruchomego ciała o masie M

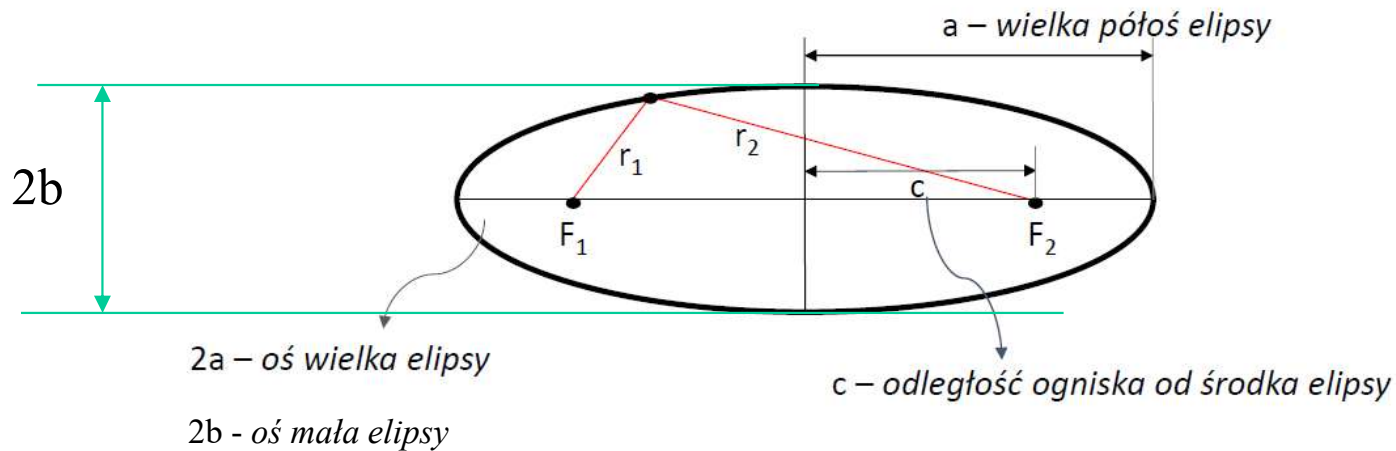
W ogólnym przypadku ruch ciała o masie m odbywa się po prostej przechodzącej przez miejsce położenia ciała o masie M lub po krzywej stożkowej o ognisku położonym w miejscu położenia tego ciała o postaci zależnej od całkowitej energii E układu ciał. Oprócz momentu pędu również energia układu $E = \frac{1}{2} m V^2 - G \frac{Mm}{r}$ jest zachowana (gdy r maleje to V rośnie)



Krzywe stożkowe:
(rodzaj krzywej zależy od energii mechanicznej układu)

- Elipsa lub okrąg $E < 0$
- Parabola $E = 0$
- Hiperbola $E > 0$

Elipsa – krzywa zamknięta, taka że suma odległości dowolnego jej punktu od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 , nazywanych ogniskami, jest stała: $r_1 + r_2 = 2a$.



Kształt elipsy opisuje mimośród: $e = c/a$; w elipsie $e < 1$; ($e = 0$ dla okręgu)

Dla Ziemi $e = 0,017$ (prawie okrąg)

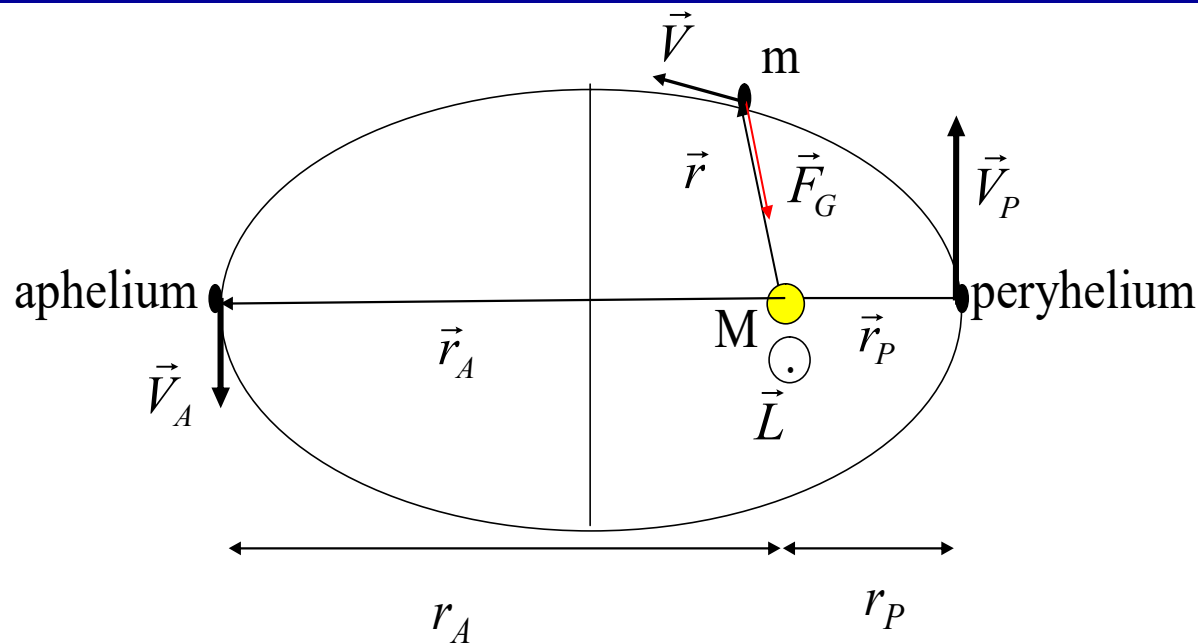
Dla Merkurego $e = 0,21$

Dla Wenus $e = 0,0068$

Elipsa i okrąg są jedynymi krzywymi stożkowymi ograniczonymi w przestrzeni. Po elipsie porusza się planeta o masie m okrążająca Słońce o masie M , które w przybliżeniu gdy $m \ll M$ pozostaje w spoczynku w ognisku elipsy (**I Prawo Keplera**)

(ściśle gdy uwzględniamy tylko siły działające między planetą i Słońcem oba ciała poruszają się po elipsach w ognisku których znajduje się środek masy układu, przy czym stosunek osi wielkiej elipsy po której porusza się Słońce do osi wielkiej elipsy po której porusza się planeta jest równy $m/M \ll 1$)

Wniosek z zasady zachowania momentu pędu w ruchu planety o masie m wokół nieruchomej gwiazdy (Słońca) o masie M po elipsie



Moment pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

W peryhelium i aphelium

$$\vec{r} \perp \vec{V}$$

$$|\vec{L}_{\text{perihelium}}| = |\vec{r}_P| m |\vec{V}_P| = r_P m V_P$$

$$|\vec{L}_{\text{aphelium}}| = |\vec{r}_A| m |\vec{V}_A| = r_A m V_A$$

Z zasady zachowana momentu pędu

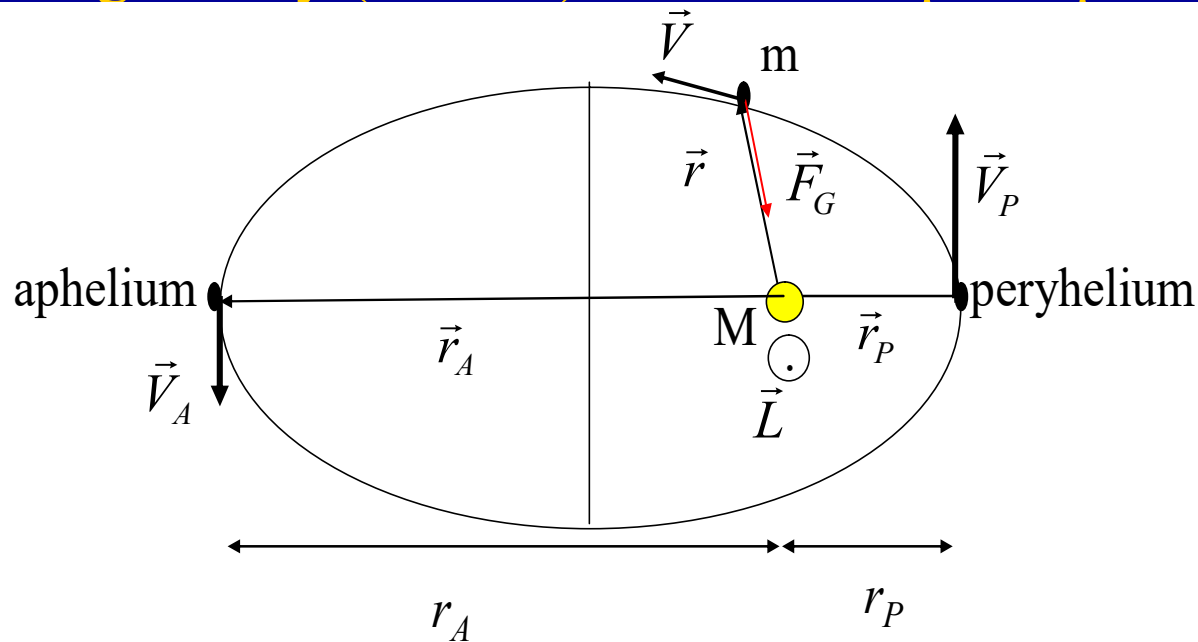
$$\vec{L}_{\text{perihelium}} = \vec{L}_{\text{aphelium}}$$

$$m V_P r_P = m V_A r_A$$

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{r_A}{r_P}$$

Szybkość w peryhelium jest większa niż w aphelium

Określenie energii w ruchu planety o masie m wokół nieruchomej gwiazdy (Słońca) o masie M po elipsie o wielkiej półosi równej a .



Energia

$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GmM}{r}$$

Z zasady zachowania energii wynika iż energia w peryhelium jest równa energii w aphelium

$$\frac{mV_P^2}{2} - \frac{GmM}{r_P} = \frac{mV_A^2}{2} - \frac{GmM}{r_A}$$

A zatem $\frac{m(V_P^2 - V_A^2)}{2} = \frac{GmM}{r_P} - \frac{GmM}{r_A}$

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{r_P}{r_A} \Rightarrow \frac{mV_P^2}{2} \left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2} \right) = GmM \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right) \Rightarrow V_P = \sqrt{\frac{2GM r_A}{r_P(r_A + r_P)}}$$

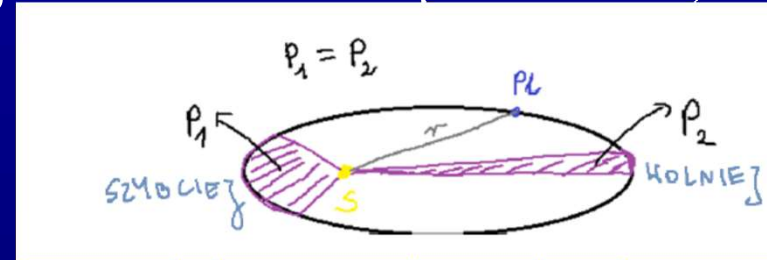
Licząc energie w peryhelium wyznaczamy stałą wartość energii układu

$$E = \frac{mV_P^2}{2} - \frac{GmM}{r_P} = \frac{mGM r_A}{r_P(r_A + r_P)} - \frac{GmM}{r_P} = -\frac{GmM}{r_P + r_A} = -\frac{GmM}{2a}$$

Widać iż $E < 0$ i zależy tylko od M , m i a

Prawa Keplera

Ruch planet wokół Słońca jeszcze przed odkryciem prawa powszechnej grawitacji przez Isaaca Newtona (1547-1643) (do którego przyczyniły się badania nad ruchem planet) był analizowany m.in. przez Mikołaja Kopernika (1473-1543) i Johannesesa Keplera (1571-1630), co doprowadziło do powstania 3 praw Keplera, sformułowanych tu przy założeniu iż masa planet jest znacznie mniejsza od masy Słońca



1) Planety poruszają się wokół Słońca po orbitach eliptycznych (lub kołowych)

2) Promień wodzący planety w układzie o początku w miejscu położenia Słońca zakreśla w równych przedziałach czasu równe pola

Planeta porusza się szybciej gdy znajduje się bliżej Słońca niż dalej. Jest to zgodne z wynikiem przykładu według którego prędkość w peryhelium (w którym jej odległość od Słońca jest minimalna) jest większa niż w aphelium (w którym odległość ta jest maksymalna) i wynika bezpośrednio z zasady zachowania momentu pędu

c) Kwadrat czasu obiegu planety wokół Słońca T jest wprost proporcjonalny do sześciannu długości dużej półosi elipsy a (równej połowie odległości peryhelium od aphelium) czyli $T^2 \sim a^3$

Całkowita energia mechaniczna planet jest ujemna, przy czym najmniejsza energia przy której może odbywać się ruch w którym planeta zbliża się na określoną minimalną odległość od Słońca odpowiada ruchowi po okręgu. Podobnie jak ruch planet wokół Słońca można opisywać ruch satelitów Ziemi wokół Ziemi.

Pyt. Jakie wielkości są zachowane w ruchu ciała o masie m (np. Ziemi) okrążającego ciało o masie $M \gg m$ (np. Słońce) po orbicie eliptycznej?

- a) szybkość z jaką porusza się ciało o masie m
- b) pęd ciała o masie m
- c) energia kinetyczna ciała o masie m
- d) całkowita energia mechaniczna układu złożonego z obu ciał będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej tego układu
- e) moment pędu ciała o masie m określony względem punktu w którym spoczywa ciało o masie M
- f) wartość wypadkowej siły działającej między obydwoma ciałami
- g) prędkość polowa w ruchu ciała o masie m (prędkość z jaką wektor wodzący ciała o masie m określony w układzie odniesienia o początku umieszczonym w miejscu spoczynku ciała o masie M zakreśla pole w trakcie ruchu ciała o masie m)

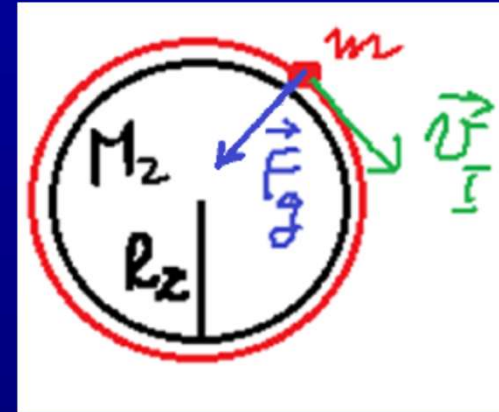
Zaznaczyć wszystkie takie wielkości fizyczne spośród podanych powyżej.

Zakładamy iż z uwagi na to iż $M \gg m$ można przyjąć iż ciało o masie M pozostaje w spoczynku. .

Ruch satelitów Ziemi. Prędkości kosmiczne

I Prędkość kosmiczna

Prędkość I kosmiczna jest równa szybkości czyli wartości prędkości jaką należy nadać ciału na powierzchni Ziemi w kierunku poziomym (czyli równoległym do powierzchni ziemi) aby poruszało się ono po orbicie kołowej o najmniejszym możliwym promieniu równym promieniowi Ziemi R_z .



Poruszając się po orbicie musi działać na ciało o masie m siła dośrodkowa o wartości

$F_d = \frac{mV^2}{r} = \frac{mV_I^2}{R_z}$, której rolę pełni siła grawitacyjna ze strony ziemi o masie M_z o wartości $F_G = \frac{GmM_z}{r^2} = \frac{GmM_z}{R_z^2}$. Przy tym $g = \frac{GM_z}{R_z^2}$.

Wynik stąd relacja $\frac{mV_I^2}{R_z} = \frac{GmM_z}{R_z^2} \Rightarrow V_I^2 = \frac{GM_z}{R_z} = gR_z$. A zatem

wartość pierwszej prędkość kosmicznej $V_I = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}} = \sqrt{gR_z} \approx 7,9 * 10^3 \frac{m}{s} = 7,9 \text{ km/s}$

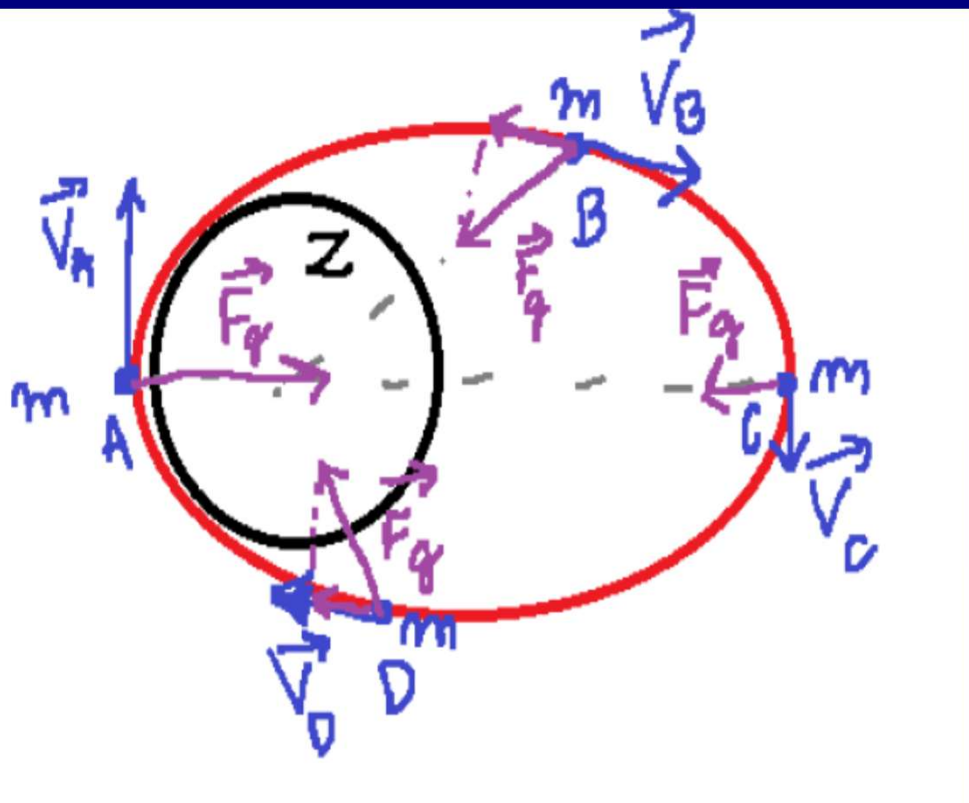
Nie zależy ona od masy ciała. Jest to najmniejsza szybkość jaką należy nadać ciału na Ziemi aby nie spadło ono na Ziemię.

W rzeczywistości satelita musi latać na wysokości równej co najmniej 160 km nad Ziemią by nie ulec hamowaniu w atmosferze.

Ruch satelitów Ziemi

Jak będzie poruszać się ciało , któremu nada się na Ziemi prędkość skierowaną w kierunku poziomym (równoległym do powierzchni Ziemi) o wartości większej od I prędkości kosmicznej?

Jeżeli będzie ona mniejsza niż tzw. II prędkość kosmiczna , to ciało będzie poruszać się po elipsie , tym bardziej wydłużonej, im większa od V_I jest nadana mu prędkość.

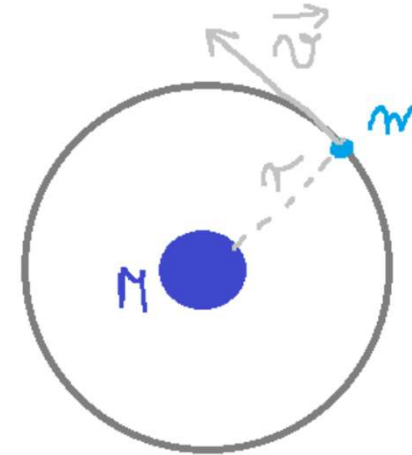


W pkt B podczas oddalania się satelity od Ziemi , siła grawitacji tworzy kąt rozwarty z wektorem prędkości czyli składowa styczna siły do toru ma zwrot przeciwny niż prędkość. Na tej części toru satelita jest hamowany a jego szybkość maleje . Na drugiej połowie elipsy składowa siły styczna do toru ma taki sam zwrot jak prędkość –satelita jest przyspieszany

Satelita na orbicie kołowej

Rozważmy jeszcze raz satelitę o masie m na orbicie kołowej wokół masywnego ciała o masie M np. Ziemi. Prędkość satelity jest zdeterminowana promieniem orbity r

$$F_d = F_G \Rightarrow \frac{mV^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



Energia kinetyczna satelity wynosi

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{GMm}{2r}$$

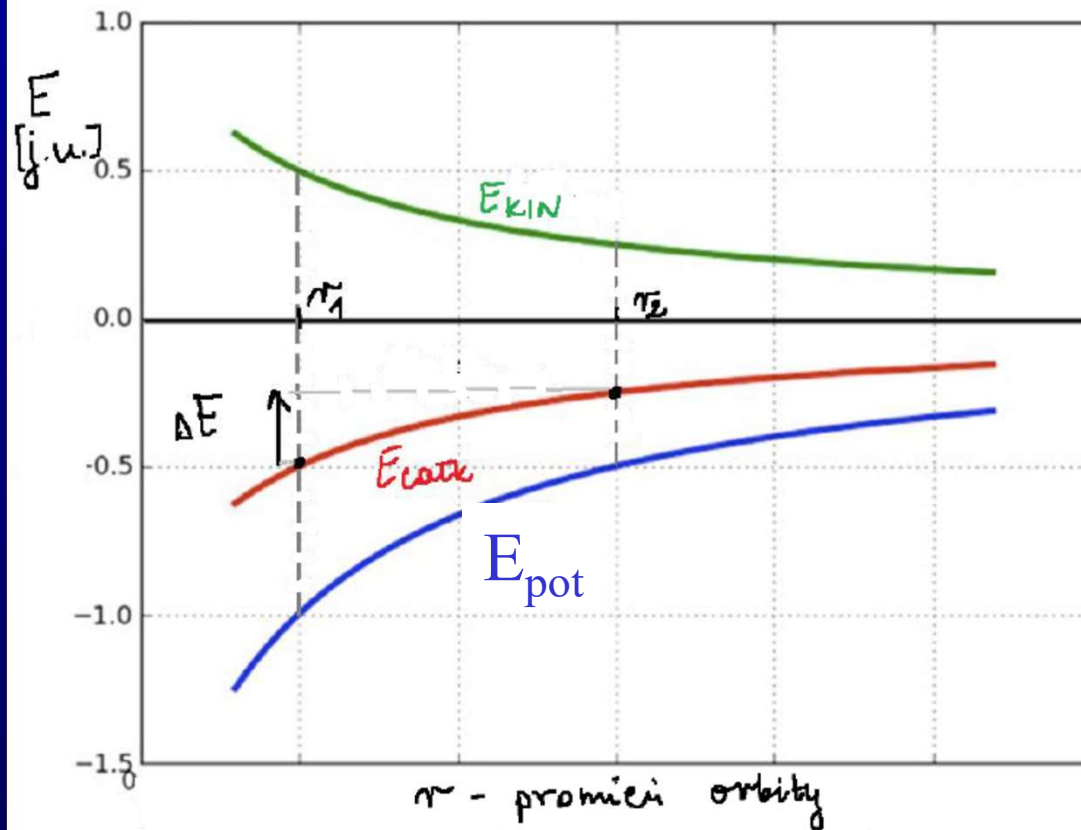
Skoro $E_{pot} = -\frac{GMm}{r}$ to $E_{kin} = -\frac{1}{2} E_{pot}$

Energia mechaniczna satelity wynosi

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot} < 0$$

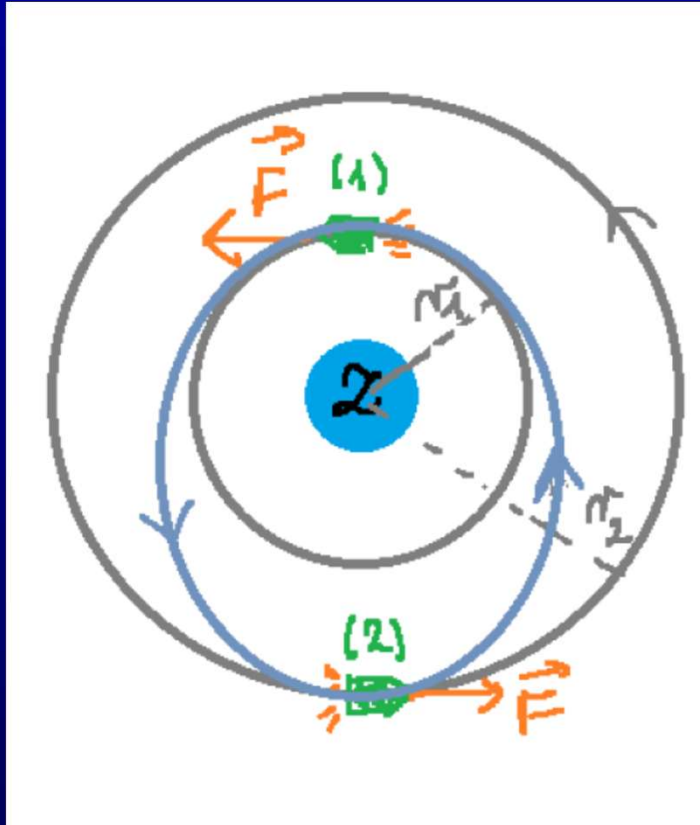
Satelita poruszający się po orbicie kołowej wykazuje specyficzną zależność między E_{pot} i E_{kin}

Energia kinetyczna, potencjalna i całkowita na orbicie kołowej



Podczas ruchu satelity po ustalonej orbicie jego energia się nie zmienia się. Zwiększenie promienia orbity oznacza wzrost energii mechanicznej, choć energia kinetyczna satelity na wyższej orbicie jest mniejsza niż na niższej (satelita porusza się wolniej na orbicie o większym promieniu). Przeniesienie satelity z orbity niższej na wyższą wymaga dostarczenia energii, co wymaga uruchomienia silników. Pojawia się siła, która wykonuje dodatnią pracę nad satelitą.

Zmiana orbity satelity na orbitę o większym promieniu



W punkcie (1) uruchamiane są na krótko silniki wytwarzające siłę ciągu. W efekcie rośnie energia kinetyczna satelity, ale energia potencjalna nie zmienia się, bo odległość od Ziemi się nie zmienia w tym czasie. Zatem warunek dla orbity kołowej $E_{kin} = -E_{pot}/2$ przestaje być spełniony. Orbita staje się eliptyczna o ile oczywiście energia satelity pozostaje ujemna.

W punkcie (2) satelita ma właściwą wartość energii potencjalnej E_{pot} , ale ma za małą energię kinetyczną E_{kin} do spełnienia warunku $E_{kin} = -E_{pot}/2$ (wymaganego dla orbity kołowej). Ponownie uruchamiany jest silnik i wzrasta E_{kin} bez zmiany E_{pot} aż do osiągnięcia wartości wymaganej. Satelita wchodzi na docelową orbitę kołową.

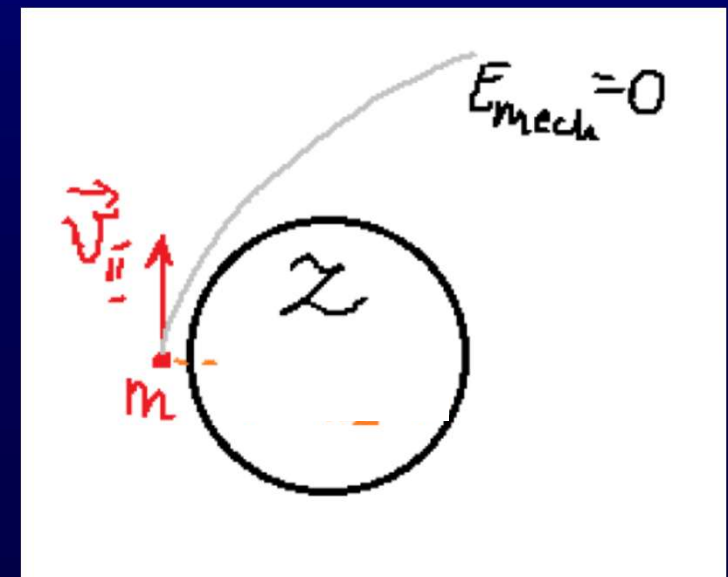
II prędkość kosmiczna

Energia ciała wystrzelonego z Ziemi z prędkością mniejszą od **pierwszej prędkości kosmicznej V_I** posiada całkowitą energię mechaniczną ujemną.

Można pokazać iż wówczas gdy ciało nadamy na Ziemi prędkość co do wartości równą dokładnie **drugiej prędkości kosmicznej V_{II}** $V_{II}=11,2\text{km/s}$ to energia ciała staje się równa 0 i ciało opuści obszar ziemskiego pola grawitacyjnego.

Jeśli prędkość ta jest większa od II prędkości kosmicznej to energia staje się dodatnia i ciało także opuści obszar ziemskiego pola grawitacyjnego.

A zatem **II prędkość kosmiczna określa minimalną szybkość jaką należy nadać ciało na Ziemi aby opuściło ono obszar ziemskiego pola grawitacyjnego.**



Wykorzystanie zasady zachowania energii do wyznaczenia szybkości ucieczki (II prędkości kosmicznej)

Ciało o masie m znajdującemu się na Ziemi nadajemy prędkość o wartości V . Całkowita energia ciała znajdującego się tuż nad Ziemią jest równa.

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - G \frac{M_z m}{R_z}$$

W trakcie wznoszenia się ciała wartość jego prędkości (szybkość) i energia kinetyczna maleje, natomiast rośnie energia potencjalna. Na maksymalnej wysokości h na jaką ciało wzniesie się nad Ziemię prędkość ciała maleje do zera, a ciało posiada tylko energię potencjalną

$$E = -G \frac{M_z m}{(R_z + h)}$$

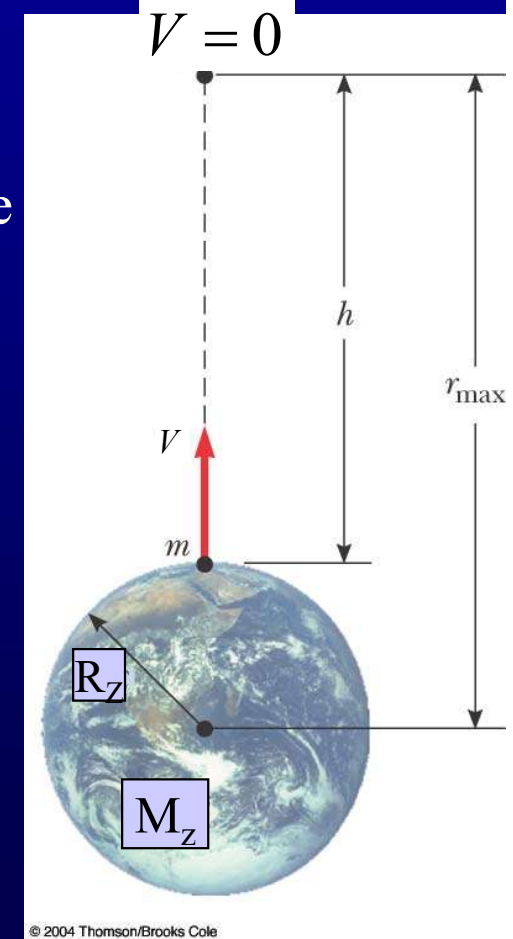
Całkowita energia ciała nie ulega zmianie

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - G \frac{M_z m}{R_z} = -G \frac{M_z m}{R_z + h}$$

A zatem szybkość z jaką należy wyrzucić ciało z Ziemi, aby osiągnęło wysokość h

$$V = \sqrt{2GM_z \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z + h} \right)}$$

Uwaga: Ze względu na zmiany g z wysokością nad Ziemią **nie można** do wyznaczenia energii potencjalnej stosować wzoru $E=mgh$



II prędkość kosmiczna odpowiada sytuacji, gdy wysokość na jaką wzniesie się ciało stanie się nieskończona $h \rightarrow \infty$ czyli ciało może opuścić obszar ziemskiego pola grawitacyjnego

$$V_{\parallel} = \sqrt{2GM_z \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z + h} \right)} = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}} = \sqrt{2gR_z} = 11,2 \text{ km/s}$$

$$g = \frac{GM_z}{R_z^2}$$

g - przyspieszenie na powierzchni Ziemi

Całkowita energia mechaniczna ciała wyrzuconego z Ziemi z drugą prędkością kosmiczną

$$E = \frac{1}{2} m V_{\parallel}^2 - G \frac{M_z m}{R_z} = G \frac{M_z m}{R_z} - G \frac{M_z m}{R_z} = 0$$

Pojęcie II prędkości kosmicznej (szybkości ucieczki) można wprowadzić również dla innych obiektów kosmicznych (planet, gwiazd) obdarzonych masą. Jest ona proporcjonalna do masy obiektu M i odwrotnie proporcjonalna do jego promienia R

$$V_{\parallel} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Table 13.3

Escape Speeds from the Surfaces of the Planets, Moon, and Sun

Planet	v_{esc} (km/s)
Mercury	4.3
Venus	10.3
Earth	11.2
Mars	5.0
Jupiter	60
Saturn	36
Uranus	22
Neptune	24
Pluto	1.1
Moon	2.3
Sun	618