



OMNIS2

Małe drgania wokół położenia równowagi.

Położenie równowagi i jego wyznaczanie

Badanie stabilności położenia równowagi poprzez analizę potencjału

Ruch układu mechanicznego o jednym stopniu swobody wokół położenia równowagi

Sformułowanie funkcji Lagrange'a i równań Lagrange'a II rodzaju dla układu ciał wykonującego małe drgania wokół położenia równowagi w postaci macierzowej

Znalezienie rozwiązań tego układu jako superpozycji drgań normalnych

Współrzędne normalne

Poszukiwanie położenia równowagi przy wykorzystaniu do opisu układu współrzędnych uogólnionych

Zakładamy iż więzy działające w układzie są skleronomiczne oraz siły działające w układzie nie zależą jawnie od czasu

Z zasady Lagrange'a (prac wirtualnych) w położeniu równowagi $\sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j = 0$

Równanie to po wprowadzeniu sił uogólnionych $Q_l \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$ i uogólnionych przesunięć wirtualnych δq_l ($l=1, \dots, f$ - liczba stopni swobody) przyjmuje postać

$$\sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} X_j \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^f \left(\sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l = \sum_{l=1}^f Q_l \delta q_l = 0$$

Z uwagi na dowolność δq_l powyższe równanie jest równoważne układowi równań $Q_l = 0$ ($l=1, \dots, f$)

W położeniu równowagi wszystkie siły uogólnione muszą się zerować

Gdy siły działające są potencjalne czyli $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$ to warunek ten jest równoważny

temu by $\frac{\partial V}{\partial q_l} = 0$ ($l=1, \dots, f$). Oznacza to iż potencjał w położeniu równowagi

przyjmuje wartość ekstremalną lub punkt siodłowy

Można pokazać iż (trwałemu) stabilnemu położeniu odpowiada przypadek gdy potencjał w punkcie równowagi przyjmuje wartość minimalną (wykorzystujemy fakt iż przy poczynionych założeniach $G=E=T+V=\text{const}$, zaś $T \geq 0$). Układ umieszczony wokół takiego położenia równowagi będzie stale przebywał w jego pobliżu

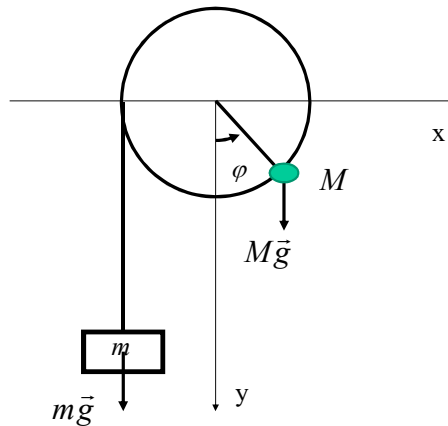
Gdy więzy są skleronomiczne to można wybrać tak współrzędne uogólnione iż relacje między współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi nie zawierają czasu i energia kinetyczna T nie zależy jawnie od czasu (wykład 4).

Przy takim wyborze współrzędnych, gdy siły nie zależą jawnie od czasu, to również energia potencjalna V nie zależy jawnie od czasu.

Wówczas funkcja Lagrange'a $L=T-V$ nie zależy jawnie od czasu a zatem uogólniona energia G równa przy tych założeniach energii mechanicznej jest stałą ruchu.

Gdy umieścimy bez prędkości początkowej ($T=0$) układ w pobliżu położenia w którym potencjał osiąga minimum to układ nie może zmienić położenia w sposób zwiększający jego energie potencjalną (musiłby przyjąć ujemną energię kinetyczną) , a zatem musi pozostawać stale w pobliżu położenia równowagi

Przykład. Do ciała o masie M poruszającego się po okręgu o promieniu R doczepiono nić o długości l na końcu której zwisa ciało o masie m



- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i napisać równanie Lagrange'a II rodzaju
- 2) Znaleźć położenie równowagi, w którym ciała umieszczone bez prędkości początkowej będą spoczywały
- 3) Określić ruch układu wokół położenia równowagi gdy w trakcie drgań układ pozostaje blisko położenia równowagi

Problem rozwiązujemy zakładając iż ciało o masie m może poruszać się tylko w kierunku pionowym a więc ma 1 stopień swobody jego położenie opisuje zmienna y_m .

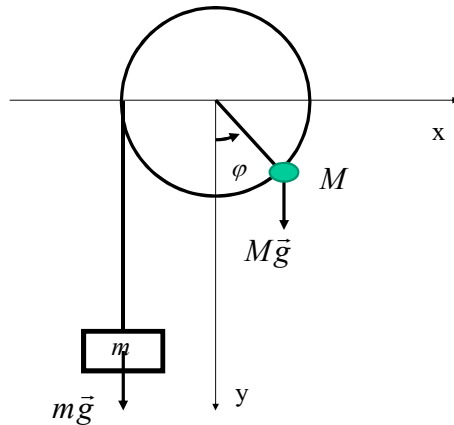
Ciało o masie M może poruszać się po okręgu (krzywej) a więc ma 1 stopień swobody. Do opisu jego położenia może służyć kąt φ pokazany na rysunku (w pełni opisuje ono położenie ciała na okręgu a równanie więzów

$$x_M^2 + y_M^2 - R^2 = 0 \text{ nie wprowadza ograniczenia na wartości kąta } \varphi)$$

Na skutek połączenia obu ciał nicią dochodzi dodatkowy warunek więzów

$$y_m + \frac{3}{2}R\pi - R\varphi = l \Rightarrow y_m = l - \frac{3}{2}R\pi + R\varphi$$

a więc liczba stopni swobody układu maleje z 2 do 1. Do opisu ruchu wystarcza 1 współrzędna uogólniona. Może być nią kąt φ od którego można uzależnić także położenie ciała o masie m



1 współrzędna uogólniona φ .

Związek współrzędnych x_M oraz y_M określających położenie ciała o masie M z kątem φ

$$x_M = R \sin \varphi \Rightarrow \dot{x}_M = R \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$y_M = R \cos \varphi \Rightarrow \dot{y}_M = -R \sin \varphi \dot{\varphi}$$

Związek współrzędnej y_m określającej położenie ciała o masie m z kątem φ

$$y_m = l - \frac{3}{2} R \pi + R \varphi \Rightarrow \dot{y}_m = R \dot{\varphi}$$

Energia kinetyczna układu ciał

$$T = \frac{m}{2} \dot{y}_m^2 + \frac{M}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) = \frac{m}{2} (R \dot{\varphi})^2 + \frac{M}{2} (R \dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} (m + M) R^2 \dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi})$$

Energia potencjalna układu ciał $V = -mgy_m - Mgy_M$

Ten wybór zapewnia iż są spełnione relacje określające związek potencjału z siłami

$$\text{działającymi na ciało o masie } M \quad F_{Mx} = -\frac{\partial V}{\partial x_M} = 0 \quad F_{My} = -\frac{\partial V}{\partial y_M} = Mg$$

$$\text{oraz ciało o masie } m \quad F_{mx} = -\frac{\partial V}{\partial x_m} = 0 \quad F_{my} = -\frac{\partial V}{\partial y_m} = mg$$

Uzależniając energię potencjalną od współrzędnej uogólnionej mamy

$$V = -mgy_m - Mgy_M = -mgR\varphi - MgR \cos \varphi + \text{const}$$

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{1}{2}(m + M)R^2\dot{\varphi}^2 + mgR\varphi + MgR \cos \varphi - const$

Równanie Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow (m + M)R^2\ddot{\varphi} - mgR + MgR \sin \varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{g(m - M \sin \varphi)}{(M + m)R}$$

Wyznaczenie położenia równowagi oraz opis ruchu wokół położenia równowagi
(ciało umieszczone w tym położeniu bez prędkości początkowych będzie spoczywać)

W położeniu równowagi $\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{m}{M}$

Ponieważ $\sin \varphi \leq 1$ to położenie równowagi może wystąpić tylko w przypadku gdy

$m \leq M$ przy czym uwzględniając to iż $V = -mgR\varphi - MgR \cos \varphi + const$ $\frac{dV}{d\varphi} = -mgR + MgR \sin \varphi$

widać iż w położeniu tym $\frac{dV}{d\varphi} = 0$

Oznaczając przez φ_0 kąt spełniający warunek $\sin \varphi_0 = \frac{m}{M}$ i zakładając iż $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$

można pokazać iż

$$\frac{dV}{d\varphi} > 0 \quad \text{dla} \quad \varphi > \varphi_0 \quad \text{oraz} \quad \frac{dV}{d\varphi} < 0 \quad \text{dla} \quad \varphi < \varphi_0$$

A zatem w położeniu odpowiadającym $\varphi = \varphi_0$ potencjał $V = -mgR\varphi - MgR \cos \varphi$ osiąga **minimum** czyli jest to punkt równowagi trwałej (stabilnej).

Wprowadzamy nową współrzędną $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ określającą wychylenie z położenia równowagi. Zachodzą relacje

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos(\varphi_0 + \tilde{\varphi}) = \cos(\varphi_0)\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) = \\ \dot{\varphi} &= \dot{\tilde{\varphi}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0)} \cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0) \sin(\tilde{\varphi}) = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \cos(\tilde{\varphi}) - \frac{m}{M} \sin(\tilde{\varphi})$$

Energia kinetyczna $T = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\tilde{\varphi}}^2 = T(\dot{\tilde{\varphi}})$

Dla niewielkich wychyleń układu z położenia równowagi $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ możemy znaleźć przybliżoną postać potencjału i funkcji Lagrange'a przyjmując iż

$$\sin(\tilde{\varphi}) \approx \tilde{\varphi} \quad \cos(\tilde{\varphi}) \approx 1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}$$

W tym przybliżeniu $\cos(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \cos(\tilde{\varphi}) - \frac{m}{M} \sin(\tilde{\varphi}) \approx \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) - \frac{m}{M} \tilde{\varphi}$

Potencjał

$$\begin{aligned} V &= -mgR\varphi - MgR\cos(\varphi) \approx \\ &\approx -mgR(\tilde{\varphi} + \varphi_0) - MgR \left[\sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) - \frac{m}{M} \tilde{\varphi} \right] = \\ &= -mgR\tilde{\varphi} - mgR\varphi_0 - MgR \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) + mgR\tilde{\varphi} = \end{aligned}$$

$$V \approx -mgR\tilde{\varphi} - mgR\varphi_0 - MgR\sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) + mgR\tilde{\varphi} =$$

$$= +\frac{1}{2}MgR\sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\tilde{\varphi}^2 + const = \frac{1}{2}gR\sqrt{M^2 - m^2}\tilde{\varphi}^2 + const$$

Przybliżona postać funkcji Lagrange'a

$$L = T - V \approx$$

$$\frac{1}{2}(M + m)R^2\dot{\tilde{\varphi}}^2 - \frac{1}{2}gR\sqrt{M^2 - m^2}\tilde{\varphi}^2 - const$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju

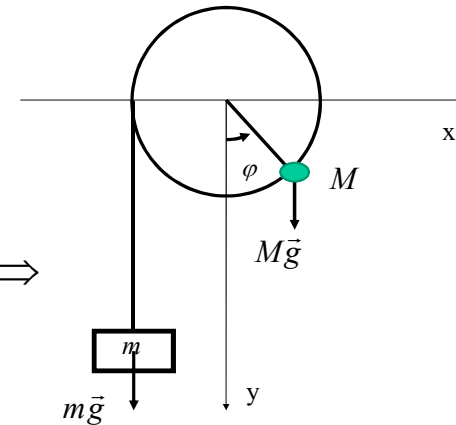
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{\varphi}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{\varphi}} = 0 \Rightarrow (m + M)R^2\ddot{\tilde{\varphi}} + gR\sqrt{M^2 - m^2}\tilde{\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{\varphi}} + \frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{M + m} \frac{g}{R} \tilde{\varphi} = 0$$

Równanie to opisuje drgania harmoniczne zachodzące wokół położenia

$$\text{równowagi z częstością kołową } \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{M + m} \frac{g}{R}} = \sqrt{\sqrt{\frac{(M - m)(M + m)}{(M + m)^2}} \frac{g}{R}} = \sqrt{\sqrt{\frac{M - m}{M + m}} \frac{g}{R}}$$

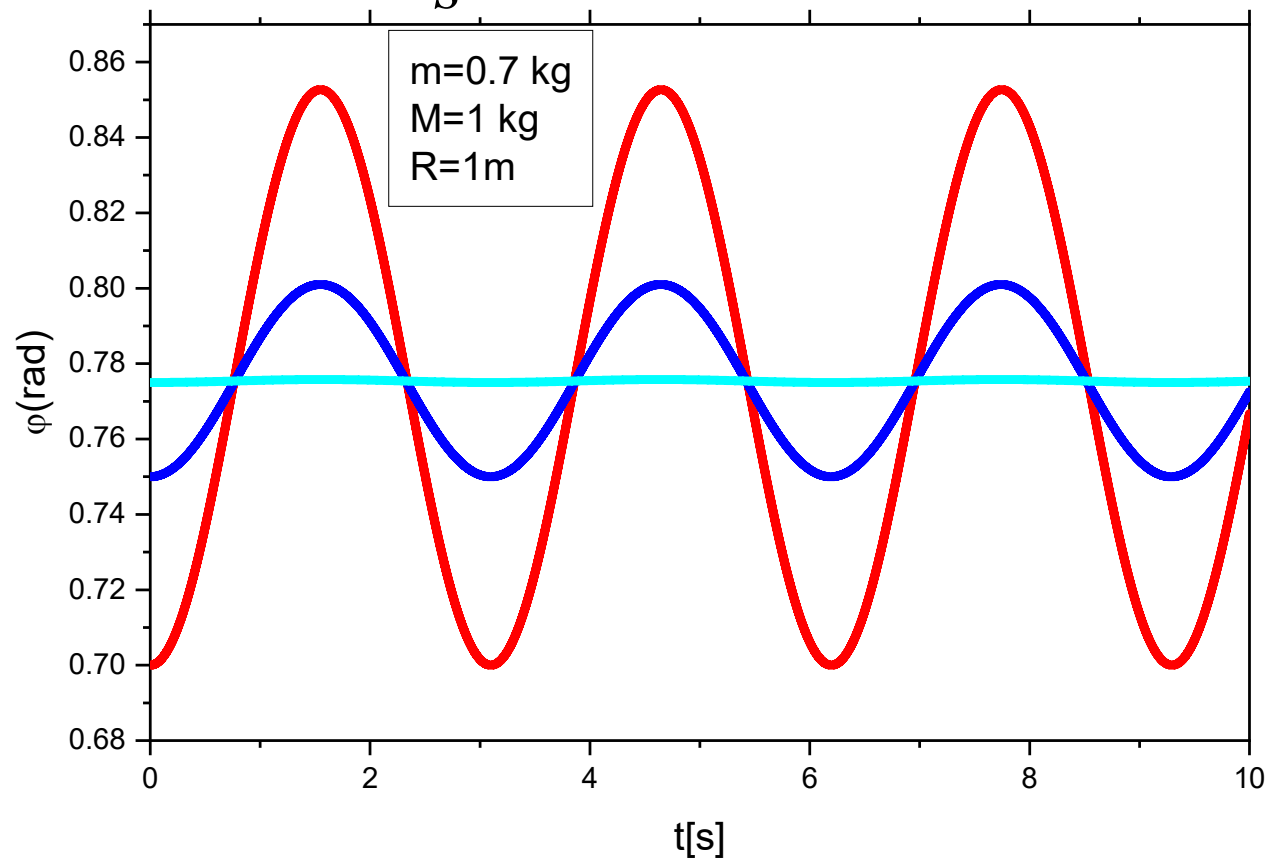
Potencjał V proporcjonalny do $\tilde{\varphi}^2$
 Brak członów proporcjonalnych do $\tilde{\varphi}$
 $V - const \geq 0 \rightarrow$ Potencjał o podobnej postaci jak dla oscylatora harmonicznego



Przykład: $m=0.7$ kg, $M=1$ kg, $\sin(\varphi_0)=0,7$, $\varphi_0=0,775$ rad

$$\omega = 2,03 \frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3,1s$$

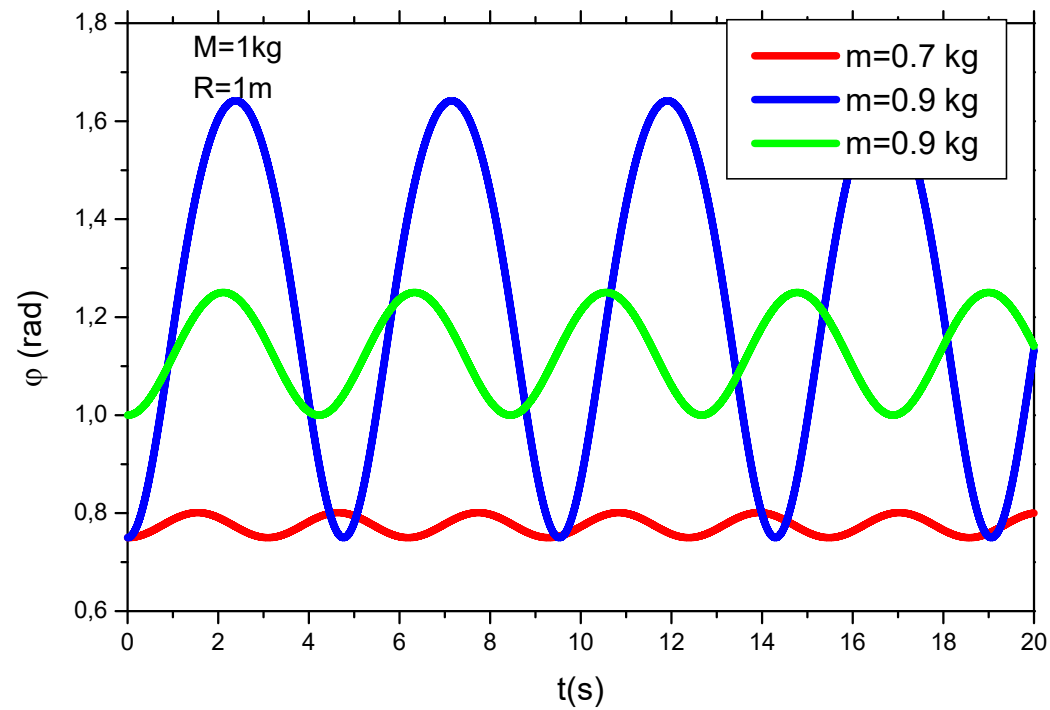


$$\dot{\varphi}(t=0) = 0$$

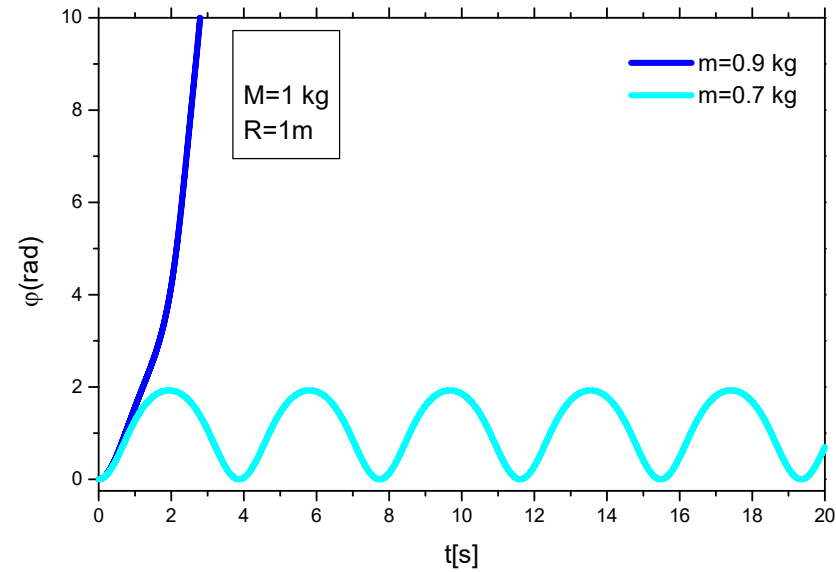
Przykład: $m=0.9 \text{ kg}$, $M=1 \text{ kg}$, $\sin(\varphi_0)=0,9$, $\varphi_0=1.11 \text{ rad}$

$$\omega = 1,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4,19 \text{ s}$$



$$\dot{\varphi}(t=0) = 0$$



$$\dot{\varphi}(t=0) = 0$$

Gdy wychylenie początkowe od położenia równowagi będzie zbyt duże ruch przestaje mieć charakter drgań

Gdy $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$ to potencjał V osiąga **maksimum** dla $\varphi = \varphi_0$ takiego iż $\sin \varphi_0 = \frac{m}{M}$

gdyż $\frac{dV}{d\varphi} = -mgR + MgR \sin \varphi < 0$ gdy $\varphi > \varphi_0$ i $\frac{dV}{d\varphi} = -mgR + MgR \sin \varphi > 0$ gdy $\varphi < \varphi_0$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos(\varphi_0 + \tilde{\varphi}) = \cos(\varphi_0)\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) = \\ &= -\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0)}\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) \approx -\frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{M}\left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) - \frac{m}{M}\tilde{\varphi} \end{aligned}$$

$$V \approx -\frac{1}{2}gR\sqrt{M^2 - m^2}\tilde{\varphi}^2 + \text{const}$$

$$V - \text{const} \leq 0$$

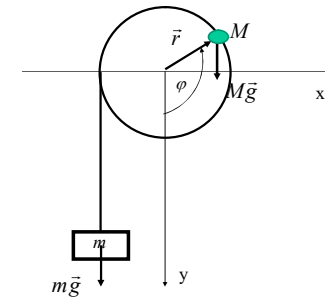
Potencjał inny od potencjału oscylatora

$$L \approx \frac{1}{2}(m + M)R^2\dot{\tilde{\varphi}}^2 + \frac{1}{2}gR\sqrt{M^2 - m^2}\tilde{\varphi}^2 + \text{const}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{\varphi}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{\varphi}} = 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{\varphi}} - \sqrt{\frac{M - m}{m + M}} \frac{g}{r} \tilde{\varphi} =$$

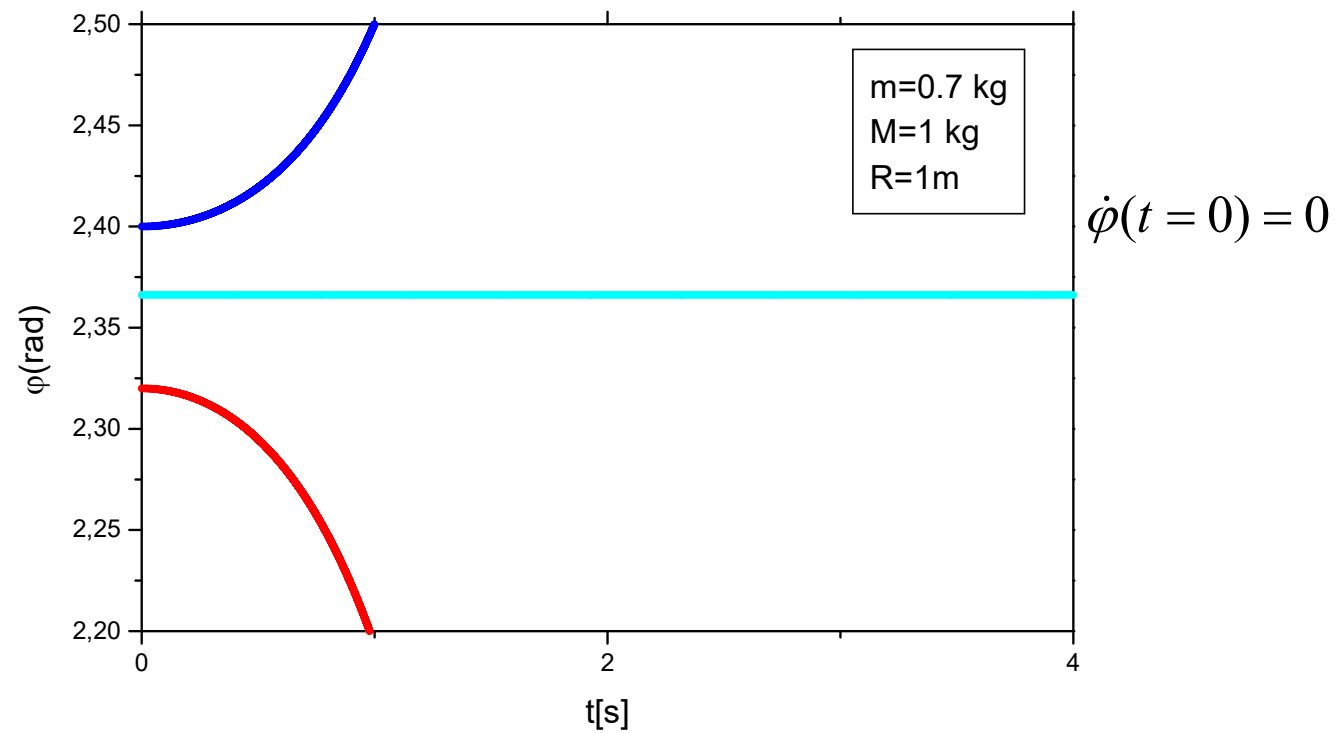
$$\tilde{\varphi} = A \exp(\gamma t) + B \exp(-\gamma t)$$

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{\frac{M - m}{m + M}} \frac{g}{r}}$$



Układ wychylony z położenia równowagi będzie oddalał się od tego położenia

Przykład: $m=0.7$ kg, $M=1$ kg, $\sin(\varphi_0)=0,7$, $\varphi_0=2.3661$ rad



Opis małych drgań wokół
położenia równowagi w układzie
o wielu stopniach swobody.

Potencjał układu wykonującego małe drgania

Potencjał $V(q=q_1, q_2, \dots, q_f)$ posiada minimum dla określonych wartości współrzędnych uogólnionych q_i ($i=1, 2, \dots, f$ -liczba stopni swobody), któremu to położeniu odpowiada trwałe (stabilne) położenie równowagi.

Przyjmujemy iż w położeniu tym wszystkie współrzędne są równe zero $q_i=0$ skąd wynika iż $\frac{\partial V}{\partial q_i}(q=0)=0$ ($i=1, \dots, f$)

Dodatkowo przyjmujemy iż $V(q=0)=0$.

Dalej zakładamy iż potencjał jest opisany jednorodną funkcją kwadratową

współrzędnych uogólnionych $V(q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l$ (gdzie $K_{kl} = K_{lk}$ stałe)

W pobliżu położenia równowagi rozwijając potencjał w szereg Taylora i pomijając wyrazy proporcjonalne do iloczynu trzech i więcej współrzędnych uogólnionych dostajemy

$$\begin{aligned} V(q) &= V(q=0) + \sum_{k=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_k}(q=0) q_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}(q=0) q_k q_l + \dots \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}(q=0) q_k q_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l \quad \text{gdzie} \quad K_{kl} = K_{lk} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}(q=0) \end{aligned}$$

Energia kinetyczna układu wykonującego małe drgania

Energia kinetyczna T jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

Relacja taka zachodzi zawsze gdy w układzie (złożonym z n ciał) w którym opisujemy ruch zależności współrzędnych kartezjańskich od uogólnionych nie zawierają explicite czasu czyli $x_j = x_j(q)$

Wówczas

$$\dot{x}_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \quad T = \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

gdzie

$$a_{kl}(q) = \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \quad a_{kl}(q) = a_{lk}(q)$$

Dalej wprowadzamy przybliżenie $a_{kl}(q) \approx M_{kl} = a_{kl}(q=0)$

$$T = T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

M_{kl} - stałe nie zależne od współrzędnych i prędkości uogólnionych określone jako $a_{kl}(q=0)$, $M_{kl} = M_{lk}$

Funkcja Lagrange'a i równania Lagrange'a II rodzaju układu wykonującego małe drgania

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^f \sum_{k=1}^f M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l$$

$$M_{kl} = M_{lk}$$

$$K_{kl} = K_{lk}$$

$$M_{kl}, K_{kl} \text{ -- stałe}$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f (M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - K_{kl} q_k q_l)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^f M_{jl} \dot{q}_l + \sum_{k=1}^f M_{kj} \dot{q}_k \right) =$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, f \Rightarrow \sum_{l=1}^f M_{jl} \ddot{q}_l = - \sum_{l=1}^f K_{jl} q_l = \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^f (M_{jl} + M_{lj}) \dot{q}_l \right) = \sum_{l=1}^f M_{jl} \dot{q}_l$$

Wprowadźmy macierze symetryczne i rzeczywiste czyli macierze będące macierzami hermitowskimi

$$\hat{M} = [M_{kl}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{1f} \\ M_{21} & M_{22} & M_{2f} \\ M_{f1} & M_{f2} & M_{ff} \end{bmatrix} \quad \hat{K} = [K_{kl}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1f} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2f} \\ K_{f1} & K_{f2} & K_{ff} \end{bmatrix}$$

Macierze te są dodatnio określone czyli dla dowolnej rzeczywistej macierzy kolumnowej $x \neq 0$ mamy $x^T \hat{M} x > 0$, $x^T \hat{K} x > 0$ (x^T - macierz transponowana).

Wynika to z faktu iż w pobliżu położenia równowagi (gdy $\dot{q} \neq 0$ $q \neq 0$) zachodzi

$$\sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l > 0 \quad \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l > 0$$

Zapisane przy pomocy tych macierzy funkcja Lagrange'a i równania Lagrange'a mają postać

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^T \hat{M} \dot{q} - q^T \hat{K} q), \quad \hat{M} \ddot{q} = -\hat{K} q, \quad \text{gdzie } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}, \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} \quad q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & & q_f \end{bmatrix} \\ \dot{q}^T = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & & \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

Rozwiązania równań Lagrange'a poszukujemy w postaci

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_f \end{bmatrix} \cos(\omega t + \varphi) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{gdzie} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_f \end{bmatrix}$$

Uwzględniając to iż $\ddot{q} = -\omega^2 q$ otrzymujemy równanie: $-\omega^2 \hat{M} C \cos(\omega t + \varphi) = -\hat{K} C \cos(\omega t + \varphi)$

które musi być spełnione dla dowolnego czasu t skąd wynika równanie:

$$\hat{K} C = \omega^2 \hat{M} C \Leftrightarrow (\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) C = 0$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązania $C \neq 0$ pod warunkiem, że

$$\det(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) = 0$$

Równanie charakterystyczne

Rozwiązując to równanie można określić f dozwolonych częstości ω_i drgań układu. Symetryczność i dodatnia określoność macierzy $\hat{M}$ i $\hat{K}$ zapewnia to iż ω_i^2 ($i=1, \dots, f$) są rzeczywiste oraz $\omega_i^2 > 0$ czyli częstości drgań są rzeczywiste.

Dla każdej częstości $\omega_i (i=1, \dots, f)$ można znaleźć relacje między elementami

macierzy kolumnowej $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \\ \vdots \\ C_f^{(i)} \end{bmatrix}$ z równania $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})C^{(i)} = 0$

Gdy wszystkie częstości są różne to równanie to pozwala na wyznaczenie elementów macierzy $C^{(i)}$ (która może być rzeczywista) z dokładnością do jednej stałej.

Gdy za stałą dowolną wybierzemy element $C_m^{(i)} = A^{(i)}$ to zależności od czasu współrzędnych $q_1, \dots, q_f$ związane z drganiem o częstości $\omega_i \neq 0$

$$q_j^{(i)} = \tilde{\Delta}_j^{(i)} [A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)] = \tilde{\Delta}_j^{(i)} \tilde{u}_i \quad \text{gdzie} \quad \tilde{\Delta}_j^{(i)} = \frac{C_j^{(i)}}{C_m^{(i)}} \quad \tilde{u}_i = A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Ogólna zależność $q_1, \dots, q_f$ od czasu ma postać **superpozycji drgań normalnych** o różnych częstościach

$$q_j = \sum_{i=1}^f q_j^{(i)} = \sum_{i=1}^f \tilde{\Delta}_j^{(i)} \tilde{u}_i$$

Wielkości $\tilde{u}_i$ to **współrzędne normalne** (zwykle się je dodatkowo przeskalowuje).

2f stałych dowolnych $A^{(i)}$ oraz φ_i można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Możliwy jest ich dobór tak by obserwowane było drganie o jednej częstości

Ogólne rozwiązanie opisujące drgania (gdy dla każdego i $\omega_i \neq 0$) można zapisać też oczywiście w postaci

$$q_j = \sum_{i=1}^f C_j^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad j = 1, 2, \dots, f \quad \Rightarrow \quad q = \sum_{i=1}^f C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

z macierzami kolumnowymi $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \\ \vdots \\ C_f^{(i)} \end{bmatrix}$ spełniającymi równanie $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})C^{(i)} = 0$ (*)

Gdy niektóre z częstości drgań są jednakowe np. $\omega_i = \omega_j$ to wówczas nakłada się na $C^{(i)}$ i $C^{(j)}$ dodatkowy warunek: $C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} = 0$ gdzie $C^{(j)T} = [C_1^{(j)}, \dots, C_f^{(j)}]$ $j \neq i$

Gdy $\omega_i \neq \omega_j$ warunek powyższy jest spełniony automatycznie. Warunek ten razem z warunkiem (*) zapewnia możliwość uzależnienia wszystkich elementów macierzy $C^{(i)}$ z od jednej stałej także wówczas gdy $\omega_i = \omega_j$ i przedstawienia drgań w postaci superpozycji drgań normalnych o jednakowych lub różnych częstościach

Moduł stałej $C_j^{(i)}$ to amplituda drgań współrzędnej q_j podczas drgań harmoniczných zachodzących z częstością ω_i .

Ewentualny przeciwny znak stałych $C_j^{(i)}$ i $C_k^{(i)}$ oznacza że w i -tym modzie drgań zachodzącym z częstością ω_i zmiany współrzędnych q_j oraz q_k wynikają z drgań zachodzących w przeciwnych fazach.

Dygresja: Gdy jedna z częstości np. m -ta $\omega_m = 0$ co jest możliwe gdy dla pewnego zestawu współrzędnych q z otoczenia $q=0$ (z których nie wszystkie się zerują)

mamy $\sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l = 0$ (macierz K nie jest określona dodatnio ale „nieujemnie”) to

zależność m -tej współrzędnej normalnej od czasu może być opisana funkcją liniową czasu. Opisywany mod nie odpowiada wówczas drganiom lecz ruchowi (najczęściej translacyjnemu lub obrotowemu) układu zachodzącemu w sposób nie zmieniający energii potencjalnej układu. Wówczas w ogólnym rozwiązaniu należy zastąpić $\cos(\omega_m t + \varphi_m)$ przez wyraz $t + \gamma_m$ gdzie γ_m - stała zależna od warunków początkowych ruchu.

Wybrane dowody dla zainteresowanych (slajdy 23-24)

Dowód iż częstości drgań są rzeczywiste

(nie korzystamy z założenia iż macierz $C^{(i)}$ jest rzeczywista)

Pokazujemy iż liczba $(C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)}$ jest rzeczywista gdzie $(A)^{T*}$ oznacza macierz transponowaną i sprzężoną w sposób zespolony do macierzy A pokazując iż zachodzi $((C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)})^* = (C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)}$

$$\left((C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)} \right)^* = \text{liczba} \Rightarrow \left((C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)} \right)^* = \left((C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)} \right)^{T*} \quad \begin{array}{l} \hat{K} \text{ -symetryczna i} \\ \text{rzeczywista} \end{array}$$
$$(\hat{A} \hat{B} \hat{C})^T = (\hat{C}^T)(\hat{B}^T)(\hat{A}^T) \Rightarrow \left((C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)} \right)^{T*} = (C^{(i)})^{T*} \hat{K}^{T*} \left((C^{(i)})^{T*} \right)^{T*} = (C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)}$$

Podobnie można pokazać iż $((C^{(i)})^{T*} \hat{M} C^{(i)})^* = (C^{(i)})^{T*} \hat{M} C^{(i)}$ czyli liczba $(C^{(i)})^{T*} \hat{M} C^{(i)}$ jest także rzeczywista

Dalej można pokazać iż ponieważ $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) C^{(i)} = 0$

$$\text{to } (C^{(i)})^{T*} \hat{K} C^{(i)} = (C^{(i)})^{T*} \omega_i^2 \hat{M} C^{(i)} = \omega_i^2 (C^{(i)})^{T*} \hat{M} C^{(i)} \quad (*)$$

A zatem ω_i^2 są liczbami rzeczywistymi

Ponieważ macierze $\hat{M}$ i $\hat{K}$ są określone dodatnio i rzeczywiste to dla dowolnych $C^{(i)} \neq 0$ zachodzi $C^{(i)T*} \hat{M} C^{(i)} > 0$ $C^{(i)T*} \hat{K} C^{(i)} > 0$

a zatem z relacji (*) wynika iż $\omega_i^2 > 0$ a zatem ω_i są rzeczywiste i różne od zera (można je przyjąć jako liczby dodatnie)

Dowód tego iż $C^{(i)T*} \hat{M} C^{(i)} > 0$ gdy $C^{(i)} \neq 0$ $C^{(i)T*} \hat{M} C^{(i)}$ -liczba rzeczywista

$$C^{(i)T*} \hat{M} C^{(i)} = [\operatorname{Re} C^{(i)T} - i \operatorname{Im} C^{(i)T}] \hat{M} [\operatorname{Re} C^{(i)} + i \operatorname{Im} C^{(i)}] = \operatorname{Re} C^{(i)T} \hat{M} \operatorname{Re} C^{(i)} + \operatorname{Im} C^{(i)T} \hat{M} \operatorname{Im} C^{(i)} +$$

$$-i \operatorname{Im} C^{(i)T} \hat{M} \operatorname{Re} C^{(i)} + i \operatorname{Re} C^{(i)T} \hat{M} \operatorname{Im} C^{(i)} \stackrel{\text{skalar}}{=} \operatorname{Re} C^{(i)T} \hat{M} \operatorname{Re} C^{(i)} + \operatorname{Im} C^{(i)T} \hat{M} \operatorname{Im} C^{(i)}$$

Ponieważ dla dowolnych $\dot{q} \neq 0$ mamy $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l > 0$

to dla dowolnych $C^{(i)} \neq 0$ $\operatorname{Re} C^{(i)T*} \hat{M} \operatorname{Re} C^{(i)} + \operatorname{Im} C^{(i)T*} \hat{M} \operatorname{Im} C^{(i)} > 0$

Analogiczny dowód tego iż $C^{(i)T*} \hat{K} C^{(i)} > 0$ opiera się na tym iż wokół położenia równowagi dla dowolnych $q \neq 0$ zachodzi $\sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l > 0$)

(Dygresja : W układach w których $\sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f K_{kl} q_k q_l \geq 0$ może też zajść $C^{(i)T*} \hat{K} C^{(i)} = 0$

dla pewnego i np. $i=m$ i wówczas częstość $\omega_m = \sqrt{(C^{(m)T})^* \hat{K} C^{(m)} / (C^{(m)T})^* \hat{M} C^{(m)}} = 0$)

Wszystkie wyrazy macierzy $C^{(i)}$ można przyjąć w postaci liczb rzeczywistych

Jeżeli macierz zespolona $C^{(i)} \neq 0$ spełnia równanie $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) C^{(i)} = 0$

a macierze $\hat{K}$ oraz $\hat{M}$ a także wielkości ω_i^2 są rzeczywiste to również

macierze $(C^{(i)})^*$ oraz kombinacje liniowe $C^{(i)} + (C^{(i)})^*$ oraz $i(C^{(i)} - (C^{(i)})^*)$

spełniają to równanie. Przy tym macierze $C^{(i)} + (C^{(i)})^*$ oraz $i(C^{(i)} - (C^{(i)})^*)$ są

rzeczywiste a jedna z nich jest na pewno różna od zera. A zatem macierz $C^{(i)}$

spełniająca równanie $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) C^{(i)} = 0$ można przyjąć jako rzeczywistą

Dowód iż $C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} = 0$ **gdy** $\omega_i \neq \omega_j$

Zakładamy iż $\hat{K}$ i $\hat{M}$ są macierzami rzeczywistymi i symetrycznymi.
 Zakładamy też iż macierze $C^{(i)}$ i $C^{(i)T}$ są rzeczywiste
 Można pokazać iż

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) C^{(i)} = 0 \Rightarrow C^{(j)T} \hat{K} C^{(i)} = C^{(j)T} \omega_i^2 \hat{M} C^{(i)} = \omega_i^2 C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)}$$

Z drugiej strony $(\hat{A} \hat{B})^T = \hat{B}^T \hat{A}^T$ $(\hat{K} - \omega_j^2 \hat{M}) C^{(j)} = 0$

$$\begin{aligned} C^{(j)T} \hat{K} C^{(i)} &= \left(\hat{K}^T C^{(j)} \right)^T C^{(i)} = \left(\hat{K} C^{(j)} \right)^T C^{(i)} = \left(\omega_j^2 \hat{M} C^{(j)} \right)^T C^{(i)} \\ &= \omega_j^2 \left(\hat{M} C^{(j)} \right)^T C^{(i)} = \omega_j^2 C^{(j)T} \hat{M}^T C^{(i)} = \omega_j^2 C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} \end{aligned}$$

A zatem

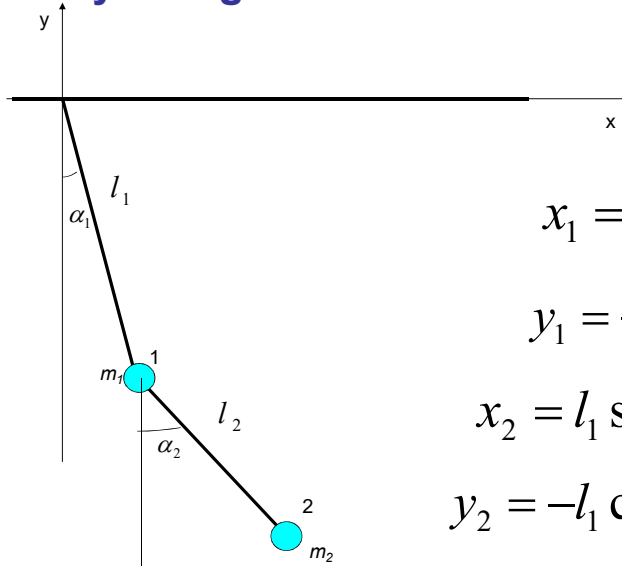
$$C^{(j)T} \hat{K} C^{(i)} = \omega_i^2 C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} = \omega_j^2 C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)}$$

W przypadku gdy $\omega_i \neq \omega_j$ równość $\omega_i^2 \left(C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} \right) = \omega_j^2 \left(C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} \right)$

może być spełniona tylko wówczas gdy $C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} = 0$ cnd

Przykład

Zbadanie ruchu wahadła podwójnego o $l_1=l_2=l$ i $m_1=m_2=m$ w przybliżeniu małych drgań



$$q_1 = \alpha_1,$$

$$q_2 = \alpha_2 \text{ – współrzędne uogólnione}$$

W położeniu równowagi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$x_1 = l_1 \sin \alpha_1$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos(\alpha_1) \dot{\alpha}_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos \alpha_1$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin(\alpha_1) \dot{\alpha}_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \cos(\alpha_1) \dot{\alpha}_1 + l_2 \cos(\alpha_2) \dot{\alpha}_2$$

$$y_2 = -l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \sin(\alpha_1) \dot{\alpha}_1 + l_2 \sin(\alpha_2) \dot{\alpha}_2$$

Energia kinetyczna

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2) + m_2 l_1 l_2 [\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)] \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 =$$

$$= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2$$

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2$$

Gdy $m_1 = m_2 = m$ oraz $l_1 = l_2 = l$ to

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m}{2} (l^2 \dot{\alpha}_1^2 + l^2 \dot{\alpha}_2^2) + ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{ml^2}{2} (2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 = \\ & = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + \frac{1}{2} ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2} ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1 \end{aligned}$$

W celu zapisu w postaci wzoru ogólnego

$$T = \frac{1}{2} (M_{11} \dot{\alpha}_1^2 + M_{22} \dot{\alpha}_2^2 + M_{12} \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + M_{21} \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1) \quad \begin{matrix} M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21} \text{ - stałe} \\ M_{12} = M_{21} \end{matrix}$$

Ponieważ $\alpha_1 \ll 1, \alpha_2 \ll 1$ przybliżamy $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \approx 1$ otrzymując

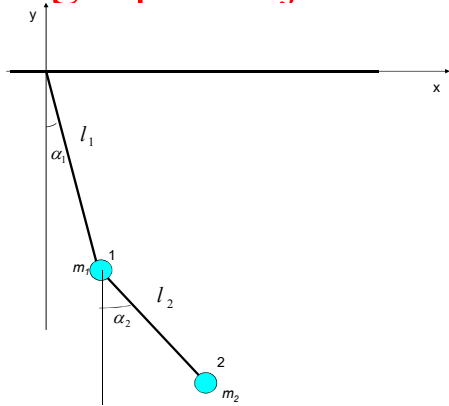
$$T \approx \frac{ml^2}{2} (2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1 = \frac{1}{2} (2ml^2 \dot{\alpha}_1^2 + ml^2 \dot{\alpha}_2^2 + ml^2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + ml^2 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1)$$

A zatem $M_{11} = 2ml^2 \quad M_{22} = ml^2 \quad M_{12} = M_{21} = ml^2$

Można też przyjąć iż $T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{\alpha}_1^2 + a_{22} \dot{\alpha}_2^2 + a_{12} \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + a_{21} \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1)$ gdzie

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2ml^2 = \text{const} = M_{11} & a_{22} &= ml^2 = \text{const} = M_{22} \\ a_{12}(\alpha_1, \alpha_2) &= a_{21} = ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & M_{12} &= M_{21} = a_{12}(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0) = ml^2 \end{aligned}$$

Energia potencjalna



$$y_1 = -l_1 \cos \alpha_1 \quad y_2 = -l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2$$

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \\ &= -m_1 g l_1 \cos(\alpha_1) - m_2 g [l_1 \cos(\alpha_1) + l_2 \cos(\alpha_2)] = \end{aligned}$$

Gdy $m_1 = m_2 = m$ oraz $l_1 = l_2 = l$ to

$$\begin{aligned} V &= -mgl \cos(\alpha_1) - mg[l \cos(\alpha_1) + l \cos(\alpha_2)] = \\ &= -2mgl \cos(\alpha_1) - mgl \cos(\alpha_2) \end{aligned}$$

Potencjał ten osiąga minimum dla położenia równowagi gdy $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ które jest trwałym położeniem równowagi

W celu możliwości zapisu w postaci

$$V = \frac{1}{2} (K_{11} \alpha_1^2 + K_{22} \alpha_2^2 + K_{12} \alpha_1 \alpha_2 + K_{21} \alpha_2 \alpha_1) + const \quad K_{12} = K_{21}$$

ponieważ $\alpha_1 \ll 1, \alpha_2 \ll 1$ przybliżamy

$$\cos(\alpha_1) \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 \quad \cos(\alpha_2) \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2$$

otrzymując
$$V \approx -3mgl + \frac{1}{2} (2mgl \alpha_1^2 + mgl \alpha_2^2)$$

A zatem

$$K_{11} = 2mgl \quad K_{22} = mgl \quad K_{12} = K_{21} = 0 \quad const = -3mgl$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$L = T - V \approx \frac{1}{2} (2ml^2 \dot{\alpha}_1^2 + ml^2 \dot{\alpha}_2^2 + ml^2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + ml^2 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1) - \frac{1}{2} (2mgl \alpha_1^2 + mgl \alpha_2^2) + 3mgl$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0 \Rightarrow 2ml^2 \ddot{\alpha}_1 + ml^2 \ddot{\alpha}_2 + 2mgl \alpha_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0 \Rightarrow ml^2 \ddot{\alpha}_2 + ml^2 \ddot{\alpha}_1 + mgl \alpha_2 = 0$$

można zapisać w postaci $\sum_{l=1}^2 M_{kl} \ddot{\alpha}_l = - \sum_{l=1}^2 K_{kl} \alpha_l \Leftrightarrow \sum_{l=1}^2 M_{kl} \ddot{\alpha}_l + \sum_{l=1}^2 K_{kl} \alpha_l = 0$

$$M_{11} \ddot{\alpha}_1 + M_{12} \ddot{\alpha}_2 + K_{11} \alpha_1 + K_{12} \alpha_2 = 0 \Rightarrow 2ml^2 \ddot{\alpha}_1 + ml^2 \ddot{\alpha}_2 + 2mgl \alpha_1 = 0 \quad k=1$$

$$M_{21} \ddot{\alpha}_1 + M_{22} \ddot{\alpha}_2 + K_{21} \alpha_1 + K_{22} \alpha_2 = 0 \Rightarrow ml^2 \ddot{\alpha}_1 + ml^2 \ddot{\alpha}_2 + mgl \alpha_2 = 0 \quad k=2$$

Ich rozwiązanie poszukujemy w postaci

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = C \cos(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= C_1 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\alpha}_1 = -\omega^2 C_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ \alpha_2 &= C_2 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\alpha}_2 = -\omega^2 C_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Po wstawieniu ich do równań

Lagrange'a II rodzaju otrzymujemy

układ 2 równań

$$[(2mgl - 2ml^2 \omega^2) C_1 - ml^2 \omega^2 C_2] \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$[-ml^2 \omega^2 C_1 + (mgl - ml^2 \omega^2) C_2] \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$[(2mgl - 2ml^2\omega^2)C_1 - ml^2\omega^2 C_2]\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow (2mgl - 2ml^2\omega^2)C_1 - ml^2\omega^2 C_2 = 0$$

$$\frac{[-ml^2\omega^2 C_1 + (mgl - ml^2\omega^2)C_2]\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow -ml^2\omega^2 C_1 + (mgl - ml^2\omega^2)C_2 = 0}{}$$

Otrzymaliśmy układ równań jednorodnych na współczynniki C_1 i C_2 o postaci

$$(\hat{K} - \omega^2 \hat{M})C = \begin{bmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$$

Ma on rozwiązanie niezerowe tylko wówczas gdy

$$\det(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) = \begin{vmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}$$

Dozwolone częstości drgań ω spełniają warunek

$$\begin{aligned} \det(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 2(mgl - ml^2\omega^2)^2 - m^2 l^4 \omega^4 = 0 &\begin{cases} \nearrow \sqrt{2}(mgl - ml^2\omega^2) = -ml^2\omega^2 \\ \searrow \sqrt{2}(mgl - ml^2\omega^2) = ml^2\omega^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2}(mgl - ml^2\omega^2) = -ml^2\omega^2 \longrightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{g}{l} \frac{2+\sqrt{2}}{1} \longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}}$$

$$\sqrt{2}(mgl - ml^2\omega^2) = ml^2\omega^2 \longrightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{g}{l} \frac{2-\sqrt{2}}{1} \longrightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}}$$

Macierze $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix}$ odpowiadające ω_i wyznaczamy z dokładnością do stałej z

równania $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})C^{(i)} = \begin{bmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega_i^2 & -ml^2\omega_i^2 \\ -ml^2\omega_i^2 & mgl - ml^2\omega_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} = 0$

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2mgl(-1-\sqrt{2}) & -mgl(2+\sqrt{2}) \\ -mgl(2+\sqrt{2}) & mgl(-1-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow C_2^{(1)} = -\sqrt{2}C_1^{(1)} \Rightarrow C^{(1)} = \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ -\sqrt{2}C_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

(dwa równania $2mgl(-1-\sqrt{2})C_1^{(1)} - mgl(2+\sqrt{2})C_2^{(1)} = 0$ oraz $-mgl(2+\sqrt{2})C_1^{(1)} + mgl(-1-\sqrt{2})C_2^{(1)} = 0$

wynikające z powyższego równania macierzowego są sobie równoważne)

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2mgl(-1+\sqrt{2}) & -mgl(2-\sqrt{2}) \\ -mgl(2-\sqrt{2}) & mgl(-1+\sqrt{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow C_2^{(2)} = \sqrt{2}C_1^{(2)} \Rightarrow C^{(2)} = \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ \sqrt{2}C_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

Pełne rozwiązanie będące superpozycją drgań o znalezionych częstościach:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = C^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ -\sqrt{2}C_1^{(1)} \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ \sqrt{2}C_1^{(2)} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

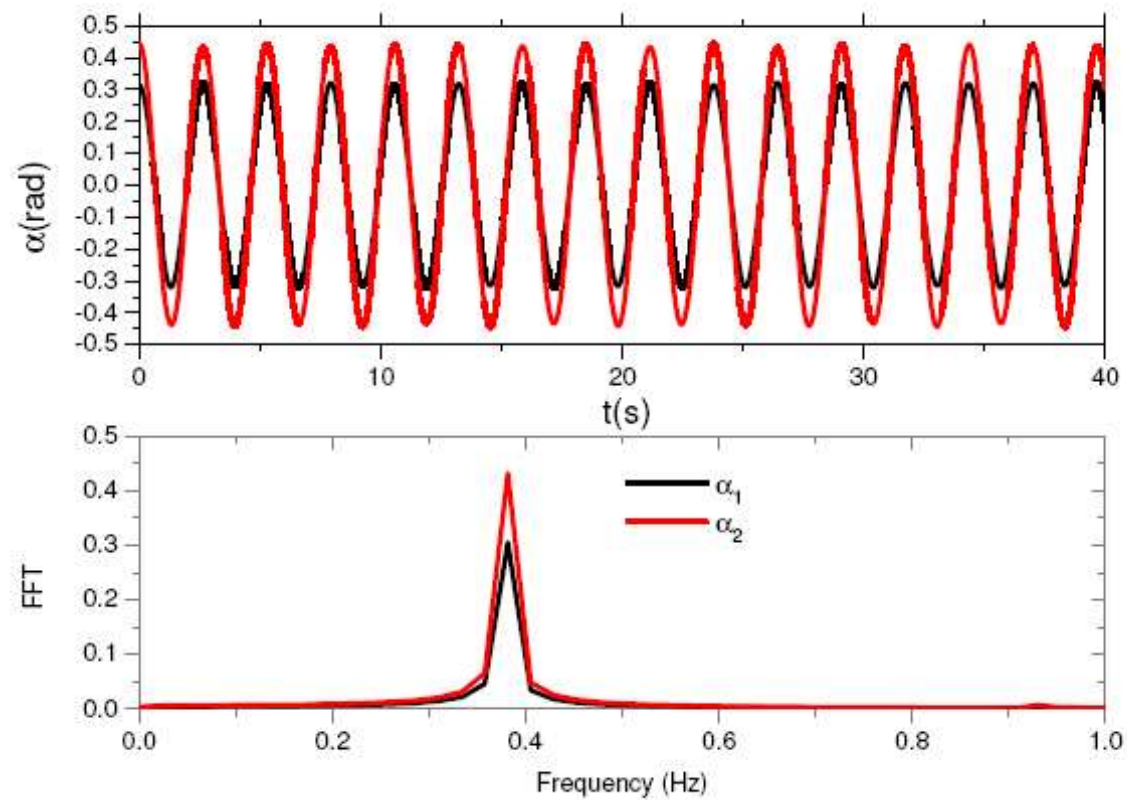
Stałe $C_1^{(1)}\varphi_1, C_1^{(2)}, \varphi_2$ można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu

$$l=1\text{m}$$

$$\alpha_1(t=0)=\pi/10, \alpha_2(t=0)=\sqrt{2}\pi/10$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0)=0, \dot{\alpha}_2(t=0)=0$$

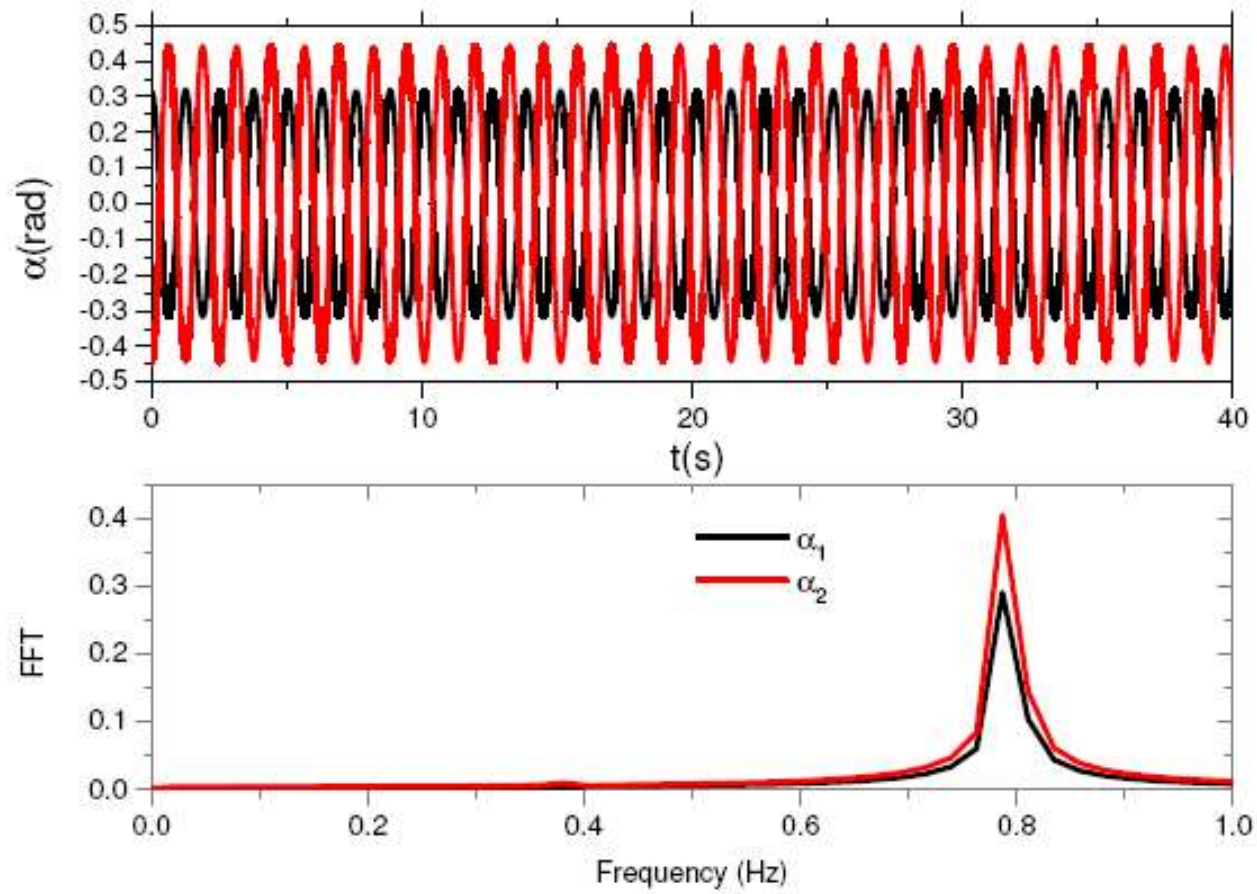
$$\Rightarrow C_1^{(1)}=0, \varphi_1=0, C_1^{(2)}=\frac{\pi}{10}, \varphi_2=0$$



$$l=1\text{m} \quad \alpha_1(t=0)=\pi/10, \alpha_2(t=0)=-\sqrt{2}\pi/10$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0)=0, \dot{\alpha}_2(t=0)=0$$

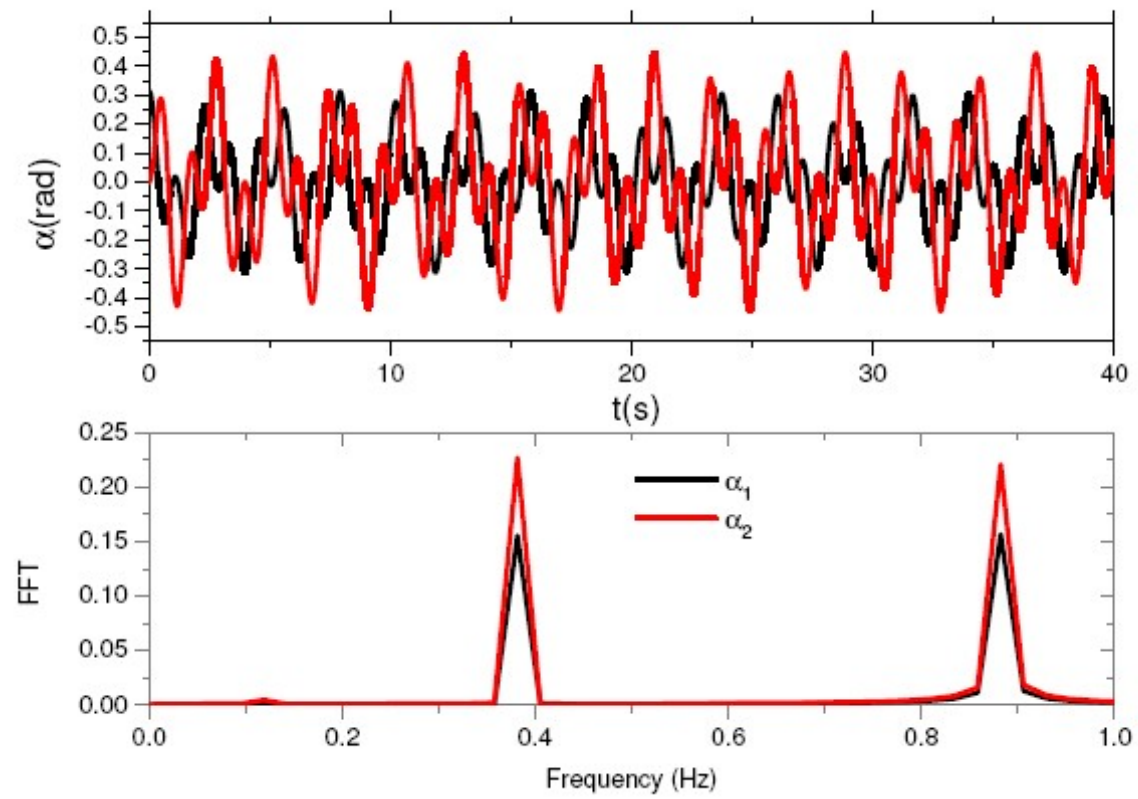
$$\Rightarrow C_1^{(1)} = \frac{\pi}{10}, \varphi_1 = 0, C_1^{(2)} = 0, \varphi_2 = 0$$



$$l=1\text{m}$$

$$\alpha_1(t=0)=\pi/10, \alpha_2(t=0)=0$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0)=0, \dot{\alpha}_2(t=0)=0$$



Małe drgania wokół
położenia równowagi-
współrzędne normalne.

Funkcja Lagrange'a w przybliżeniu małych drgań

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f (M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - K_{kl} q_k q_l) = \frac{1}{2} (\dot{q}^T \hat{M} \dot{q} - q^T \hat{K} q) \quad \text{gdzie } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

$$q^T = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_f] \quad \dot{q}^T = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_f] \quad M_{kl} = M_{lk} \quad K_{kl} = K_{lk}$$

$$\hat{M} = [M_{kl}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1f} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{f1} & M_{f2} & \dots & M_{ff} \end{bmatrix} \quad \hat{K} = [K_{kl}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1f} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{f1} & K_{f2} & \dots & K_{ff} \end{bmatrix}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, f \Rightarrow \sum_{l=1}^f M_{jl} \ddot{q}_l + \sum_{l=1}^f K_{jl} q_l \Rightarrow \hat{M} \ddot{q} + \hat{K} q = 0$$

A ich rozwiązania można zapisać w postaci superpozycji drgań normalnych zachodzących z częstościami ω_i^2 spełniającymi równanie $\det(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) = 0$

Poszukujemy nowych współrzędnych uogólnionych u_i ($i=1, \dots, f$) w których równania te przyjmą postać $\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0$. Problem ten sprowadza się do znalezienia transformacji diagonalizującej jednocześnie macierze M i K (slajdy 49-53).

Zwykle żądamy by macierz M po diagonalizacji była jednostkowa, a elementy macierzy K po diagonalizacji były równe kwadratowi częstości drgań $L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f (\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2)$

Do jednoczesnej diagonalizacji macierzy $\hat{M}$ oraz $\hat{K}$ może służyć macierz $\hat{W}^{-1}$

Ma ona postać $\hat{W}^{-1} = [\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(i)}, \dots, \chi^{(f)}]$ gdzie

$\chi^{(i)} \neq 0$ - macierz kolumnowa spełniająca warunki

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) \chi^{(i)} = 0 \quad (*) \quad i=1, \dots, f$$

$$\chi^{(i)T} \hat{M} \chi^{(i)} = 1 \quad (***)$$

$$\chi^{(j)T} \hat{M} \chi^{(i)} = 0 \quad (**) \quad j \neq i$$

Macierze zdiagonalizowane określamy ze wzorów $(\hat{W}^{-1})^T \hat{M} \hat{W}^{-1}$ oraz $(\hat{W}^{-1})^T \hat{K} \hat{W}^{-1}$

Spełnienie relacji (**) zapewnia iż macierz $(\hat{W}^{-1})^T \hat{M} \hat{W}^{-1}$ jest diagonalna

Spełnienie dodatkowej relacji (***) zapewnia iż jest to macierz jednostkowa.

Z (*) wynika iż $\hat{K} \chi^{(i)} = \omega_i^2 \hat{M} \chi^{(i)} \Rightarrow \chi^{(j)T} \hat{K} \chi^{(i)} = \omega_i^2 \chi^{(j)T} \hat{M} \chi^{(i)}$

a zatem uwzględniając (**) $\chi^{(j)T} \hat{K} \chi^{(i)} = \omega_i^2 \chi^{(j)T} \hat{M} \chi^{(i)} = 0$ gdy $j \neq i$

Spełnienie relacji $\chi^{(j)T} \hat{K} \chi^{(i)} = 0$ gdy $j \neq i$ zapewnia iż macierz $(\hat{W}^{-1})^T \hat{K} \hat{W}^{-1}$ jest diagonalna, a relacji (***) że jej elementy są równe ω_i^2 (***)

Uwaga: Pokazano wcześniej iż relacje (*) i (**) są spełnione też przez macierze $C^{(i)}$ amplitud. Dodatkowo relacja (**) przy spełnieniu relacji (*) zachodzi zawsze gdy $\omega_j \neq \omega_i$. W innym przypadku stanowi ona warunek dodatkowy.

Relacje wiążącą współrzędne uogólnione q_i z normalnymi u_i można zapisać w postaci

$$q = \hat{W}^{-1}u = \sum_{i=1}^f \chi^{(i)} u_i$$

gdzie

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_f \end{bmatrix}$$

Relacje odwrotną wiążącą współrzędne normalne z uogólnionymi można zapisać w

postaci

$$u = \hat{W}q$$

gdzie macierz

$$\hat{W} = (\hat{W}^{-1})^{-1} = (\hat{W}^{-1})^T \hat{M}$$

gdyż $(\hat{W}^{-1})^T \hat{M} \hat{W}^{-1} = \hat{I} \Rightarrow (\hat{W}^{-1})^T \hat{M} \hat{W}^{-1} \hat{W} = \hat{I} \hat{W} \Rightarrow (\hat{W}^{-1})^T \hat{M} = \hat{W}$

$$(\hat{A} \hat{B})^T = \hat{B}^T \hat{A}^T$$

Ponadto (uwzględniając to iż $\hat{I} = \hat{W}^{-1} \hat{W} = \hat{I}^T = (\hat{W}^{-1} \hat{W})^T = (\hat{W})^T (\hat{W}^{-1})^T$)

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^T \hat{M} \dot{q} - q^T \hat{K} q) = \frac{1}{2} \left(\dot{q}^T (\hat{W})^T (\hat{W}^{-1})^T \hat{M} \hat{W}^{-1} \hat{W} \dot{q} - q^T (\hat{W})^T (\hat{W}^{-1})^T \hat{K} \hat{W}^{-1} \hat{W} q \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left((\hat{W} \dot{q})^T \hat{I} \hat{W} \dot{q} - (\hat{W} q)^T \hat{K} \hat{W} q \right) = \frac{1}{2} (\dot{u}^T \hat{I} \dot{u} - u^T \hat{K} u)$$

$(\hat{W}^{-1})^T \hat{M} \hat{W}^{-1} = \hat{I}$ -macierz jednostkowa $(\hat{W}^{-1})^T \hat{K} \hat{W}^{-1} = \hat{K}''''$ -macierz diagonalna, której elementami są ω_i^2

$$L = \frac{1}{2} (\dot{u}^T \hat{I} \dot{u} - u^T \hat{K} u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f (\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2)$$

$$\text{gdzie} \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_f^2 \end{bmatrix} \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_f \end{bmatrix} \quad \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_f \end{bmatrix}$$

$$u^T = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_f] \quad \dot{u}^T = [\dot{u}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \cdots \quad \dot{u}_f]$$

Równania określające zależność współrzędnych uogólnionych od czasu

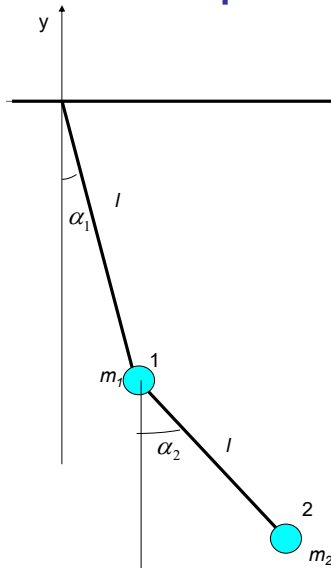
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0$$

są takie jak dla oscylatorów harmoniczych jednowymiarowych gdy $\omega_i \neq 0$

A ich rozwiązania mają postać ogólną $u_i = A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Gdy $\omega_i = 0$ to $u_i = A^{(i)}(t + \gamma_i)$ φ_i, γ_i - stałe

Wahadło podwójne o $m_1=m_2=m$ i $l_1=l_2=l$



W pobliżu położenia równowagi

$$T = \frac{1}{2} (M_{11} \dot{\alpha}_1^2 + M_{22} \dot{\alpha}_2^2 + M_{12} \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + M_{21} \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1)$$

$$M_{11} = 2ml^2 \quad M_{22} = ml^2 \quad M_{12} = M_{21} = ml^2$$

$$V = \frac{1}{2} (K_{11} \alpha_1^2 + K_{22} \alpha_2^2 + K_{12} \alpha_1 \alpha_2 + K_{21} \alpha_2 \alpha_1) + const$$

$$K_{22} = mgl \quad K_{12} = K_{21} = 0 \quad const = -3mgl$$

$$K_{11} = 2mgl$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}$$

Częstości drgań określiliśmy z warunku

$$\det(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2 + \sqrt{2})}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2 - \sqrt{2})}$$

Liczba częstości (niekoniecznie różnych)
równa liczbie stopni swobody układu

Poprzednio znaleziono $C^{(1)} = \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ -\sqrt{2}C_1^{(1)} \end{bmatrix}$ oraz $C^{(2)} = \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ \sqrt{2}C_1^{(2)} \end{bmatrix}$ spełniające równanie

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})C^{(i)} = 0 \quad \text{dla } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})} \text{ oraz } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})} \text{ odpowiednio}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = C^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ -\sqrt{2}C_1^{(1)} \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ \sqrt{2}C_1^{(2)} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Współrzędne normalne u_1 oraz u_2 dla wahadła podwójnego o $m_1=m_2=m$ i $l_1=l_2=l$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f (M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - K_{kl} q_k q_l) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f (\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2) \quad \ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0 \quad i=1, \dots, f=2$$

Wiadomo iż współrzędne uogólnione $q = \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ wiążą się ze

współrzędnymi normalnymi $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ relacją $q = \hat{W}^{-1} u$

Macierz $\hat{W}^{-1}$ ma postać $\hat{W}^{-1} = [\chi^{(1)} \quad \chi^{(2)}] = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix}$

przy czym macierze kolumnowe $\chi^{(i)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix}$ spełniają równania

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})\chi^{(i)} = 0 \quad (1) \quad \chi^{(i)T} (\hat{M}) \chi^{(j)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

Równania (1) mają identyczną postać jak równania wyznaczające $C^{(i)}$

A zatem $\chi_2^{(1)} = -\sqrt{2}\chi_1^{(1)}; \chi_2^{(2)} = \sqrt{2}\chi_1^{(2)}$ Równania (2) gdy $i \neq j$ są spełnione automatycznie bo $\omega_i \neq \omega_j$

Ponieważ $\hat{M} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}$ to

równania (2) gdy $j=i$ przyjmują postać ($i=1,2$)

$$\chi^{(i)T}(\hat{M})\chi^{(i)} = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ml^2 \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ml^2 \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\chi_1^{(i)} + \chi_2^{(i)} \\ \chi_1^{(i)} + \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = 1$$

$$\chi_2^{(1)} = -\sqrt{2}\chi_1^{(1)}; \chi_2^{(2)} = \sqrt{2}\chi_1^{(2)}$$

$$2[\chi_1^{(i)}]^2 + [\chi_2^{(i)}]^2 + 2\chi_1^{(i)}\chi_2^{(i)} = \frac{1}{ml^2}$$

$\swarrow$
 $2[\chi_1^{(1)}]^2 + 2[\chi_1^{(1)}]^2 - 2\sqrt{2}[\chi_1^{(1)}]^2 = \frac{1}{ml^2} \quad i=1$

$\searrow$
 $2[\chi_1^{(2)}]^2 + 2[\chi_1^{(2)}]^2 + 2\sqrt{2}[\chi_1^{(2)}]^2 = \frac{1}{ml^2} \quad i=2$

$$2[\chi_1^{(1)}]^2 + 2[\chi_1^{(1)}]^2 - 2\sqrt{2}[\chi_1^{(1)}]^2 = \frac{1}{ml^2} \rightarrow \chi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} \rightarrow \chi_2^{(1)} = -\sqrt{2}\chi_1^{(1)} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}}$$

$$2[\chi_1^{(2)}]^2 + 2[\chi_1^{(2)}]^2 + 2\sqrt{2}[\chi_1^{(2)}]^2 = \frac{1}{ml^2} \rightarrow \chi_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \rightarrow \chi_2^{(2)} = \sqrt{2}\chi_1^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}$$

$$\hat{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \end{bmatrix}$$

$$q = \alpha = \hat{W}^{-1}u \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Równania określające związek współrzędnych uogólnionych ze współrzędnymi normalnymi przyjmują więc postać

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \left(\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \right) \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2}} \left(-\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \right)$$

Związek odwrotny ma postać

$$\begin{aligned}
 u = (W^{-1})^T \hat{M}q &\Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} \\ \frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} [(2-\sqrt{2})\alpha_1 + (1-\sqrt{2})\alpha_2] \\ \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} [(2+\sqrt{2})\alpha_1 + (1+\sqrt{2})\alpha_2] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{ml^2}{2(2-\sqrt{2})}} [(2-\sqrt{2})\alpha_1 + (1-\sqrt{2})\alpha_2]$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{ml^2}{2(2+\sqrt{2})}} [(2+\sqrt{2})\alpha_1 + (1+\sqrt{2})\alpha_2]$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}ml^2} \left(\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \right) \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}ml^2} \left(-\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \right)$$

Funkcja Lagrange'a we współrzędnych normalnych

$$\begin{aligned} L &= \frac{ml^2}{2} (2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + ml^2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + 3mgl - \frac{1}{2} mgl (2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{4\dot{u}_1 \dot{u}_2}{2} + \frac{2\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} - \frac{4\dot{u}_1 \dot{u}_2}{2} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} \right) + 3mgl + \\ &- \frac{1}{4} \frac{g}{l} \left(\frac{2u_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2u_2^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{4u_1 u_2}{2} + \frac{2u_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2u_2^2}{2+\sqrt{2}} - \frac{4u_1 u_2}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} \right) + 3mgl + \\ &- \frac{g}{l} \left(\frac{u_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{u_2^2}{2+\sqrt{2}} \right) = \end{aligned}$$

$$L = \left(\frac{\dot{u}_1^2}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2 + \sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\dot{u}_1^2}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2 + \sqrt{2}} \right) + 3mgl - \frac{g}{l} \left(\frac{u_1^2}{2 - \sqrt{2}} + \frac{u_2^2}{2 + \sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + 3mgl - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{l} (2 + \sqrt{2}) u_1^2 + \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) u_2^2 \right)$$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + 3mgl - \frac{1}{2} (\omega_1^2 u_1^2 + \omega_2^2 u_2^2)$$

$$L = \left(\frac{1}{2} \dot{u}_1^2 - \frac{1}{2} \omega_1^2 u_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \dot{u}_2^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 u_2^2 \right) + 3mgl = L_1(u_1, \dot{u}_1) + L_2(u_2, \dot{u}_2) + const$$

Równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = 0$$

opisują dwa niesprężone oscylatory o częstościach

kołowych $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} (2 + \sqrt{2})}$ oraz $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} (2 - \sqrt{2})}$

Informacje dla zainteresowanych (slajdy 49-53)

Diagonalizacja macierzy M

Macierz M jest hermitowska, więc jej wartości własne są rzeczywiste. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Wektory własne odpowiadające tej samej wartości własnej można ortogonalizować. A zatem istnieje możliwość znalezienia f wektorów własnych (f -wymiar macierzy) tworzących bazę ortogonalną. Ponieważ macierz M jest hermitowska i rzeczywista to składowe wektorów własnych można wybrać tak by były liczbami rzeczywistymi. Macierz R przejścia do bazy ortogonalnej złożona z unormowanych ortogonalnych rzeczywistych wektorów własnych macierzy M jest unitarna i rzeczywista. Macierz M zapisana w nowej bazie jest diagonalna.

R-macierz unitarna $\Rightarrow \hat{R}^{-1} = \hat{R}^{*T}, \quad \hat{M}' \equiv \hat{R}\hat{M}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{M}\hat{R}^{*T} = \hat{R}\hat{M}\hat{R}^T =$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_f \end{bmatrix}$$

Funkcje Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^T \hat{M} \dot{q} - q^T \hat{K} q) = \frac{1}{2}(\dot{q}^T \hat{R}^{-1} \hat{R} \hat{M} \hat{R}^{-1} \hat{R} \dot{q} - q^T \hat{R}^{-1} \hat{R} \hat{K} \hat{R}^{-1} \hat{R} q) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{q}^T \hat{R}^T \hat{R} \hat{M} \hat{R}^T \hat{R} \dot{q} - q^T \hat{R}^T \hat{R} \hat{K} \hat{R}^T \hat{R} q) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\hat{R} \dot{q})^T \hat{R} \hat{M} \hat{R}^T \hat{R} \dot{q} - (\hat{R} q)^T \hat{R} \hat{K} \hat{R}^T \hat{R} q] = \frac{1}{2}(\dot{q}'^T \hat{M}' \dot{q}' - q'^T \hat{K}' q')$$

gdzie $\hat{K}' \equiv \hat{R} \hat{K} \hat{R}^{-1} = \hat{R} \hat{K} \hat{R}^T, \quad q' \equiv \hat{R} q = \sum_{i=1}^f \hat{R} C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^f C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

macierz symetryczna rzeczywista

transformacja do nowych współrzędnych

Ostatecznie funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych przyjmuje postać

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \mu_k \dot{q}_k'^2 - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f K'_{kl} q'_k q'_l$$

Ponadto możemy znaleźć równanie spełnione przez macierz

$$C^{(i)} = \hat{R} C^{(i)} \quad i = 1, \dots, f$$

amplitud występujących we wzorze $q' = \sum_{i=1}^f C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Wiemy ze macierz amplitud $C^{(i)}$ występujących we wzorze

$$q = \sum_{i=1}^f C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

spełnia równanie

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) C^{(i)} = 0$$

Mnożąc powyższe równanie lewostronnie przez macierz $\hat{R}$

i uwzględniając to iż $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^T$ oraz $\hat{M}' = \hat{R} \hat{M} \hat{R}^T$ $\hat{K}' = \hat{R} \hat{K} \hat{R}^T$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}) \hat{R}^{-1} \hat{R} C^{(i)} = 0 &\Leftrightarrow (\hat{R} \hat{K} - \omega_i^2 \hat{R} \hat{M}) \hat{R}^T \hat{R} C^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\hat{R} \hat{K} \hat{R}^T - \omega_i^2 \hat{R} \hat{M} \hat{R}^T) \hat{R} C^{(i)} = 0 \Leftrightarrow (\hat{K}' - \omega_i^2 \hat{M}') C^{(i)} = 0 \end{aligned}$$

Dokonajmy kolejnej transformacji do zmiennych, w których macierz M' zostanie sprowadzona do macierzy jednostkowej $q_l'' \equiv \sqrt{\mu_l} q_l'$, $l = 1, 2, \dots, f$
 W nowych zmiennych funkcje Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \mu_k \dot{q}_k'^2 - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f K'_{kl} q_k' q_l' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \dot{q}_k''^2 - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f K''_{kl} q_k'' q_l'' = \frac{1}{2} (\dot{q}''^T \hat{1} \dot{q}'' - q''^T \hat{K}'' q'')$$

gdzie $K''_{kl} \equiv \frac{K'_{kl}}{\sqrt{\mu_k \mu_l}} = K''_{lk}$ $k, l = 1, 2, \dots, f$

$\hat{K}''$ -macierz symetryczna i rzeczywista czyli hermitowska

Ponadto $q''_l = \sum_{i=1}^f C''^{(i)}_l \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ $C''^{(i)}_l = \sqrt{\mu_l} C_l^{(i)}$ $l = 1, \dots, f$

$$(\hat{K}' - \omega_i^2 \hat{M}') C^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \sum_l (K'_{kl} - \omega_i^2 \mu_k \delta_{kl}) C_l^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \sum_l (\sqrt{\mu_k \mu_l} K''_{kl} - \omega_i^2 \sqrt{\mu_k \mu_l} \delta_{kl}) C_l^{(i)} = 0$$

$$\sqrt{\mu_k} \sum_l (K''_{kl} - \omega_i^2 \delta_{kl}) \sqrt{\mu_l} C_l^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\mu_k} \sum_l (K''_{kl} - \omega_i^2 \delta_{kl}) C''^{(i)}_l = 0 \Leftrightarrow (\hat{K}'' - \omega_i^2 \hat{1}) C''^{(i)} = 0$$

$k = 1, \dots, f$

Diagonalizacja macierzy K''

Macierz K'' jest hermitowska, więc jej wartości własne są rzeczywiste. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Wektory własne odpowiadające tej samej wartości własnej można zortogonalizować. A zatem istnieje możliwość znalezienia f wektorów własnych (f -wymiar macierzy) tworzących bazę ortogonalną. Ponieważ macierz K'' jest hermitowska i rzeczywista to składowe wektorów własnych można wybrać tak by były liczbami rzeczywistymi. Macierz Z przejścia do bazy ortogonalnej złożona z unormowanych ortogonalnych rzeczywistych wektorów własnych macierzy K'' jest unitarna i rzeczywista. Macierz K'' zapisana w nowej bazie jest diagonalna złożona z kwadratów częstości drgań.

Z-macierz
unitarna

$$\Rightarrow \hat{Z}^{-1} = \hat{Z}^{*T}, \quad \hat{K}''' \equiv \hat{Z} \hat{K}'' \hat{Z}^{-1} = \hat{Z} \hat{K}'' \hat{Z}^{*T} = \hat{Z} \hat{K}'' \hat{Z}^T = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_f^2 \end{bmatrix}$$

Funkcje Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}''^T \hat{1} \dot{q}'' - q''^T \hat{K}'' q'') = \frac{1}{2} (\dot{q}''^T \hat{Z}^{-1} \hat{Z} \hat{1} \hat{Z}^{-1} \dot{q}'' - q''^T \hat{Z}^{-1} \hat{Z} \hat{K}'' \hat{Z}^{-1} q'') =$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{u}^T \hat{1} \dot{u} - u^T \hat{K}''' u), \quad \text{gdzie } u \equiv \hat{Z} q''$$

transformacja do nowych zmiennych
 u tzw. **współrzędnych normalnych**

Ostatecznie funkcja Lagrange'a we współrzędnych normalnych przyjmuje **postać diagonalną**

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f (\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2)$$

Poprzez ciąg transformacji współrzędnych uogólnionych dokonaliśmy **jednoczesnej diagonalizacji** macierzy mas M i stałych sprężystości K .

Ponadto

$$C'''^{(i)} = \hat{Z} C''^{(i)} \quad u_l = \sum_{i=1}^f C'''^{(i)}_l \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$(\hat{K}'' - \omega_i^2 \hat{1}) C''^{(i)} = 0 \Leftrightarrow (\hat{K}''' - \omega_i^2 \hat{1}) C'''^{(i)} = 0 \Leftrightarrow (\omega_k^2 - \omega_i^2) C'''^{(i)}_k = 0$$

$$\omega_i \neq \omega_k \Rightarrow C_k'''^{(i)} = 0$$

$$k = 1, \dots, f$$

$$C'''^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ C'''^{(i)}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad C'''^{(i)}_i \neq 0$$

i -ta współrzędna

Gdy nie ma drugiej częstości drgań ω_k dla której $\omega_k = \omega_i$ to macierz $C'''^{(i)}$ odpowiadająca częstości ω_i może mieć tylko jeden niezerowy element w wierszu i -tym. W przypadku występowania częstości wielokrotnych można tak dobrać elementy macierzy by warunek ten był również spełniony

Znalezione współrzędne $u = \hat{Z}\hat{S}\hat{R}q = \hat{W}q$ to współrzędne normalne gdzie

$$\hat{S} \equiv \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_f^{1/2} \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_f \end{bmatrix} \quad \hat{M}' = \hat{S}^2$$

We współrzędnych normalnych $L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f (\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2)$

zaś równania Lagrange'a przyjmują postać

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (\text{równania dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego})$$

Zmiany każdej ze współrzędnych normalnych gdy $\omega_i \neq 0$ są opisane funkcją harmoniczną o ściśle określonej częstotliwości. Wprowadzając oznaczenie $A^{(i)} = C_i^{(i)}$

$$u_i(t) = A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (\text{drgania jednowymiarowego oscylatora})$$

Poprzez transformację odwrotną można wrócić do zmiennych q

$$\begin{aligned} \hat{W}^{-1}\hat{W} &= \hat{R}^T \hat{S}^{-1} \hat{Z}^T \hat{Z} \hat{S} \hat{R} = \hat{R}^T \hat{S}^{-1} \hat{Z}^{-1} \hat{Z} \hat{S} \hat{R} = \\ q = \hat{W}^{-1}u &= \hat{R}^T \hat{S}^{-1} \hat{Z}^T u \\ &= \hat{R}^T \hat{S}^{-1} \hat{S} \hat{R} = \hat{R}^T \hat{R} = \hat{R}^{-1} \hat{R} = \hat{I} \end{aligned}$$

i zapisać drgania w pierwotnych współrzędnych uogólnionych q jako kombinację liniową modów normalnych