Małe drgania wokół położenia równowagi.

Potencjał układu wykonującego małe drgania

Analizujemy układy dla których potencjał $V(q=q_1,q_2,\ldots,q_f)$ posiada minimum dla określonych wartości współrzędnych uogólnionych q_i ($i=1,2,\ldots f$-liczba stopni swobody), któremu to położeniu odpowiada stabilne położenie równowagi. Możemy dokonać transformacji tych współrzędnych tak by w położeniu tym wszystkie współrzędne były równe zeru $q_i=0$ skąd wynika iż $\frac{\partial V}{\partial q_i}(q=0)=0 \qquad (i=1,,,.f)$

Dodatkowo korzystając z dowolności wyboru potencjału z dokładnością do stałej przyjmujemy iż $V(q=0)=0.$

Dalej zakładamy iż potencjał jest opisany jednorodną funkcją kwadratową współrzędnych uogólnionych $\boxed{V(q)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}K_{kl}q_k q_l}$ gdzie $K_{kl}=K_{lk}$ stałe

Relacja taka może być spełniona ściśle lub też w sposób przybliżony w przypadku gdy w trakcie ruchu układ jest blisko położenia równowagi. Wówczas rozwijając potencjał w szereg Taylora i pomijając wyrazy proporcjonalne do iloczynu trzech i więcej współrzędnych uogólnionych dostajemy

$$V(q)=V(q=0)+\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial V}{\partial q_k}(q=0)q_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}(q=0)q_k q_l+\ldots\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}(q=0)q_k q_l=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}K_{kl}q_k q_l \quad \text{gdzie} \quad K_{kl}=K_{lk}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l}(q=0)$$

Energia kinetyczna układu wykonującego małe drgania

Przyjmujemy ponadto iż energia kinetyczna T jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} a_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l$$

Relacja taka zachodzi zawsze gdy w układzie (złożonym z n ciał) w którym opisujemy ruch zależności współrzędnych kartezjańskich od uogólnionych nie zawierają explicite czasu czyli $x_j = x_j(q)$

Wówczas $\dot{x}_j = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l$ $\quad T = \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f} a_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l$

gdzie $a_{kl}(q) = \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}$ $\quad a_{kl}(q) = a_{lk}(q)$

Dalej wprowadzamy przybliżenie $a_{kl}(q) \approx M_{kl} = a_{kl}(q=0)$

Gdy a_{kl} zależą od współrzędnych uogólnionych q to przyjmujemy za M_{kl} ich wartości dla q=0 (uwzględniamy fakt iż zarówno współrzędne jak i prędkości uogólnione są małe w trakcie ruchu). Przy tych założeniach

$$\boxed{T = T(\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l}$$

M_{kl}- stałe nie zależne od współrzędnych i prędkości uogólnionych określone jako $a_{kl}(q=0)$, $M_{kl}=M_{lk}$

Funkcja Lagrange'a i równania Lagrange'a II rodzaju układu wykonującego małe drgania

$$T=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad V=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}K_{kl}q_kq_l \qquad M_{kl}=M_{lk} \quad K_{kl}=K_{lk}$$

M_{kl}, K_{kl} - stałe

Funkcja Lagrange'a $L=T-V=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f}\left(M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l-K_{kl}q_kq_l\right)$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{f}M_{jl}\dot{q}_l+\sum_{k=1}^{f}M_{kj}\dot{q}_k\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{f}\left(M_{jl}+M_{lj}\right)\dot{q}_l\right)=\sum_{l=1}^{f}M_{jl}\dot{q}_l$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\quad j=1,2,\ldots,f \Rightarrow \sum_{l=1}^{f}M_{jl}\ddot{q}_l=-\sum_{l=1}^{f}K_{jl}q_l$$

Wprowadźmy macierze symetryczne i rzeczywiste czyli macierze będące macierzami hermitowskimi

$$\hat{M}=[M_{kl}]=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{1f}\\ M_{21} & M_{22} & M_{2f}\\ & & \\ M_{f1} & M_{f2} & M_{ff}\end{bmatrix} \qquad \hat{K}=[K_{kl}]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1f}\\ K_{21} & K_{22} & K_{2f}\\ & & \\ K_{f1} & K_{f2} & K_{ff}\end{bmatrix}$$

Macierze te są dodatnio określone czyli dla dowolnej rzeczywistej macierzy kolumnowej x≠0 mamy $x^T\hat{M}x>0, x^T\hat{K}x>0$ (x^T- macierz transponowana).
Wynika to z faktu iż dla dowolnych wartości współrzędnych i prędkości uogólnionych $q,\dot{q}$ w pobliżu położenia równowagi (gdy $\dot{q}\neq 0$ $q\neq 0$) zachodzi

$$\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l>0 \qquad \sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}K_{kl}q_kq_l>0$$

Zapisane przy pomocy tych macierzy funkcja Lagrange'a i równania Lagrange'a mają postać

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}^T\hat{M}\dot{q}-q^T\hat{K}q\right),\quad \hat{M}\ddot{q}=-\hat{K}q,\quad \text{gdzie } q=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_f\end{bmatrix},\dot{q}=\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\\\dot{q}_f\end{bmatrix},\ddot{q}=\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\\ddot{q}_2\\\\\ddot{q}_f\end{bmatrix}$$

$$q^T=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & & q_f\end{bmatrix}$$

$$\dot{q}^T=\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2 & & \dot{q}_f\end{bmatrix}$$

Rozwiązania równań Lagrange'a poszukujemy w postaci

$$q(t)=\begin{bmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\\\vdots\\q_f(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_f\end{bmatrix}\cos(\omega t+\varphi)=C\cos(\omega t+\varphi)\qquad \text{gdzie}\qquad C=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_f\end{bmatrix}$$

Po wstawieniu zapostulowanej postaci rozwiązań do równań Lagrange'a uwzględniając to iż $\ddot{q}=-\omega^2 q$ otrzymujemy równanie: $-\omega^2\hat{M}C\cos(\omega t+\varphi)=-\hat{K}C\cos(\omega t+\varphi)$

które musi być spełnione dla dowolnego czasu t skąd wynika równanie:

$$\left(\hat{K}-\omega^2\hat{M}\right)C=0$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązania $C\neq 0$ pod warunkiem, że

$$\boxed{\det\left(\hat{K}-\omega^2\hat{M}\right)=0}$$

Równanie charakterystyczne

Rozwiązując to równanie można określić f dozwolonych częstości ω_i drgań układu
Symetryczność i dodatnia określoność macierzy $\hat{M}$ i $\hat{K}$ zapewnia to iż ω_i^2 (i=1,..,f) są rzeczywiste oraz $\omega_i^2>0$ czyli częstości drgań są rzeczywiste.

Dla każdej częstości $\omega_i (i=1,\dots,f)$ można znaleźć relacje między elementami macierzy kolumnowej $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \\ \vdots \\ C_f^{(i)} \end{bmatrix}$ z równania $\boxed{\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right) C^{(i)} = 0}$

Gdy wszystkie częstości są różne to równanie te pozwala na wyznaczenie elementów macierzy $C^{(i)}$ (która może być rzeczywista) z dokładnością do jednej stałej.

Gdy za stałą dowolną wybierzemy element $C_m^{(i)} \overset{ozn.}{=} A^{(i)}$ (co jest możliwe gdy $C_m^{(i)} \neq 0$) to zależności od czasu współrzędnych $q_1,\dots,q_f$ związane z drganiem o częstości $\omega_i \neq 0$

$$\boxed{q_j^{(i)} = \tilde{\Delta}_j^{(i)} \left[A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)\right] = \tilde{\Delta}_j^{(i)} \tilde{u}_i}$$

gdzie $\tilde{\Delta}_j^{(i)} = \dfrac{C_j^{(i)}}{C_m^{(i)}}$ $\qquad \boxed{\tilde{u}_i = A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)}$

przy czym $\tilde{\Delta}_j^{(i)} = \dfrac{(-1)^{1+j} \Delta_j^{(i)}}{(-1)^{1+m} \Delta_m^{(i)}}$ gdzie $\Delta_j^{(i)}$ wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie *1* wiersza i *j* kolumny w macierzy $\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}$

Ogólna zależność $q_1,\dots,q_f$ od czasu ma postać superpozycji drgań normalnych o różnych częstościach

$$\boxed{q_j = \sum_{i=1}^{f} q_j^{(i)} = \sum_{i=1}^{f} \tilde{\Delta}_j^{(i)} \tilde{u}_i}$$

Wielkości $\tilde{u}_i$ to współrzędne normalne (zwykle się je dodatkowo przeskalowuje).
2f stałych dowolnych $A^{(i)}$ oraz φ_i można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Możliwy jest ich dobór tak by obserwowane było drganie o jednej częstości

Ogólne rozwiązanie opisujące drgania (gdy dla każdego i $\omega_i \neq 0$) można zapisać też oczywiście w postaci

$$\boxed{q_j = \sum_{i=1}^{f} C_j^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \qquad j = 1,2,\ldots, f \qquad \Rightarrow \qquad q = \sum_{i=1}^{f} C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)}$$

z macierzami kolumnowymi $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \\ \vdots \\ C_f^{(i)} \end{bmatrix}$ spełniającymi równanie $\boxed{\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right) C^{(i)} = 0 \quad (*)}$

Gdy niektóre z częstości drgań są jednakowe np. $\omega_i = \omega_j$ to wówczas nakłada się na $C^{(i)}$ i $C^{(j)}$ dodatkowy warunek: $\boxed{C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} = 0}$ gdzie $C^{(j)T} = \left[C_1^{(j)}, \ldots\ldots C_f^{(j)}\right]$ $\quad j \neq i$

Gdy $\omega_i \neq \omega_j$ warunek powyższy jest spełniony automatycznie. Warunek ten razem z warunkiem (*) zapewnia możliwość określenia wszystkich elementów macierzy $C^{(i)}$ z dokładnością do jednej stałej także wówczas gdy $\omega_i = \omega_j$ i przedstawienia drgań w postaci superpozycji drgań normalnych o jednakowych lub różnych częstościach

Moduł stałej $C_j^{(i)}$ można interpretować jako amplitudę drgań współrzędnej q_j podczas drgań harmonicznych zachodzących z częstością ω_i .
Ewentualny przeciwny znak stałych $C_j^{(i)}$ i $C_k^{(i)}$ oznacza że w i-tym modzie drgań zachodzącym z częstością ω_i zmiany współrzędnych q_j oraz q_k wynikają z drgań zachodzących w przeciwnych fazach , zaś jednakowy znak obu stałych oznacza iż zmiany tych współrzędnych w tym modzie wynikają z drgań zachodzących w tej samej fazie

Dygresja: Gdy jedna z częstości np. m-ta $\omega_m = 0$ co jest możliwe gdy dla pewnego zestawu współrzędnych q z otoczenia q=0 (z których nie wszystkie się zerują) mamy $\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f} K_{kl} q_k q_l = 0$ (macierz K nie jest określona dodatnio ale ,,nieujemnie'') to zależność m-tej współrzędnej normalnej od czasu może być opisana funkcją liniową czasu . Opisywany mod nie odpowiada wówczas drganiom lecz ruchowi (najczęściej translacyjnemu) układu zachodzącemu w sposób nie zmieniający energii potencjalnej układu. Wówczas w ogólnym rozwiązaniu należy zastąpić $\cos(\omega_m t + \varphi_m)$ przez wyraz $t + \gamma_m$ gdzie γ_m - stała zależna od warunków początkowych ruchu.

Wybrane dowody (slajdy 10-11)

Dowód iż częstości drgań są rzeczywiste

(nie korzystamy z założenia iż macierz $C^{(i)}$ jest rzeczywista)

Pokazujemy iż liczba $\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}$ jest rzeczywista gdzie $\left(A\right)^{T*}$ oznacza macierz transponowaną i sprzężoną w sposób zespolony do macierzy *A* pokazując iż zachodzi $\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}\right)^{*}=\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}$

$$\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}\right)^{*}=liczba\Rightarrow\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}\right)^{*}=\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}\right)^{T*}$$

$\hat{K}$ -symetryczna i rzeczywista

$$\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right)^{T}=\left(\hat{C}^{T}\right)\left(\hat{B}^{T}\right)\left(\hat{A}^{T}\right)\Rightarrow\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}\right)^{T*}=\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}^{T*}\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\right)^{T*}=\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}$$

Podobnie można pokazać iż $\left(\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{M}C^{(i)}\right)^{*}=\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{M}C^{(i)}$ czyli liczba $\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{M}C^{(i)}$ jest także rzeczywista

Dalej można pokazać iż ponieważ $\left(\hat{K}-\omega_i^2\hat{M}\right)C^{(i)}=0$

to $$\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{K}C^{(i)}=\left(C^{(i)}\right)^{T*}\omega_i^2\hat{M}C^{(i)}=\omega_i^2\left(C^{(i)}\right)^{T*}\hat{M}C^{(i)} \qquad (*)$$

A zatem ω_i^2 są liczbami rzeczywistymi

Ponieważ macierze $\hat{M}$ i $\hat{K}$ są określone dodatnio i rzeczywiste to dla dowolnych $C^{(i)}\neq 0$ zachodzi $C^{(i)T*}\hat{M}C^{(i)}>0$ $\quad C^{(i)T*}\hat{K}C^{(i)}>0$

a zatem z relacji (*) wynika iż $\omega_i^2>0$ a zatem ω_i są rzeczywiste i różne od zera (można je przyjąć jako liczby dodatnie)

Dowód tego iż $C^{(i)T*}\hat{M}C^{(i)} > 0$ gdy $C^{(i)} \neq 0$ $C^{(i)T*}\hat{M}C^{(i)}$ -liczba rzeczywista

$$C^{(i)T*}\hat{M}C^{(i)} = \left[\mathrm{Re}C^{(i)T} - i\,\mathrm{Im}C^{(i)T}\right]\hat{M}\left[\mathrm{Re}C^{(i)} + i\,\mathrm{Im}C^{(i)}\right] = \mathrm{Re}C^{(i)T}\hat{M}\,\mathrm{Re}C^{(i)} + \mathrm{Im}C^{(i)T}\hat{M}\,\mathrm{Im}C^{(i)} +$$

$$-i\,\mathrm{Im}C^{(i)T}\hat{M}\,\mathrm{Re}C^{(i)} + i\,\mathrm{Re}C^{(i)T}\hat{M}\,\mathrm{Im}C^{(i)} = \mathrm{Re}C^{(i)T}\hat{M}\,\mathrm{Re}C^{(i)} + \mathrm{Im}C^{(i)T}\hat{M}\,\mathrm{Im}C^{(i)}$$

Ponieważ dla dowolnych $\dot{q} \neq 0$ mamy $T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f} M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l > 0$

to dla dowolnych $C^{(i)} \neq 0$ $\mathrm{Re}\,C^{(i)T*}\hat{M}\,\mathrm{Re}\,C^{(i)} + \mathrm{Im}\,C^{(i)T*}\hat{M}\,\mathrm{Im}\,C^{(i)} > 0$

Analogiczny dowód tego iż $C^{(i)T*}\hat{K}C^{(i)} > 0$ opiera się na tym iż wokół położenia równowagi dla dowolnych $q \neq 0$ zachodzi $\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f} K_{kl}q_kq_l > 0$)

(Dygresja : W układach w których $\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f} K_{kl}q_kq_l \geq 0$ może też zajść $C^{(i)T*}\hat{K}C^{(i)} = 0$ dla *pewnego i* np. *i*=*m* i wówczas częstość $\omega_m = \sqrt{\left(C^{(m)T}\right)^*\hat{K}C^{(m)} / \left(C^{(m)T}\right)^*\hat{M}C^{(m)}} = 0$)

Wszystkie wyrazy macierzy $C^{(i)}$ można przyjąć w postaci liczb rzeczywistych

Jeżeli macierz zespolona $C^{(i)} \neq 0$ spełnia równanie $\left(\hat{K} - \omega_i^2\hat{M}\right)C^{(i)} = 0$ a macierze $\hat{K}$ oraz $\hat{M}$ a także wielkości ω_i^2 są rzeczywiste to również macierze $\left(C^{(i)}\right)^*$ oraz kombinacje liniowe $C^{(i)} + \left(C^{(i)}\right)^*$ oraz $i\left(C^{(i)} - \left(C^{(i)}\right)^*\right)$ spełniają to równanie. Przy tym macierze $C^{(i)} + \left(C^{(i)}\right)^*$ oraz $i\left(C^{(i)} - \left(C^{(i)}\right)^*\right)$ są rzeczywiste a jedna z nich jest na pewno różna od zera. A zatem macierz $C^{(i)}$ spełniająca równanie $\left(\hat{K} - \omega_i^2\hat{M}\right)C^{(i)} = 0$ można przyjąć jako rzeczywistą

Dowód iż $C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)} = 0$ gdy $\omega_i \neq \omega_j$

Zakładamy iż $\hat{K}$ i $\hat{M}$ są macierzami rzeczywistymi i symetrycznymi .
Zakładamy też iż macierze $C^{(i)}$ i $C^{(i)T}$ są rzeczywiste
Można pokazać iż

$$\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)C^{(i)} = 0 \Rightarrow C^{(j)T}\hat{K}C^{(i)} = C^{(j)T}\omega_i^2 \hat{M}C^{(i)} = \omega_i^2 C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)}$$

Z drugiej strony $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^T = \hat{B}^T\hat{A}^T$ $\left(\hat{K} - \omega_j^2 \hat{M}\right)C^{(j)} = 0$

$$C^{(j)T}\hat{K}C^{(i)} = \left(\hat{K}^T C^{(j)}\right)^T C^{(i)} = \left(\hat{K}C^{(j)}\right)^T C^{(i)} = \left(\omega_j^2 \hat{M}C^{(j)}\right)^T C^{(i)}$$

$$= \omega_j^2\left(\hat{M}C^{(j)}\right)^T C^{(i)} = \omega_j^2 C^{(j)T}\hat{M}^T C^{(i)} = \omega_j^2 C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)}$$

A zatem

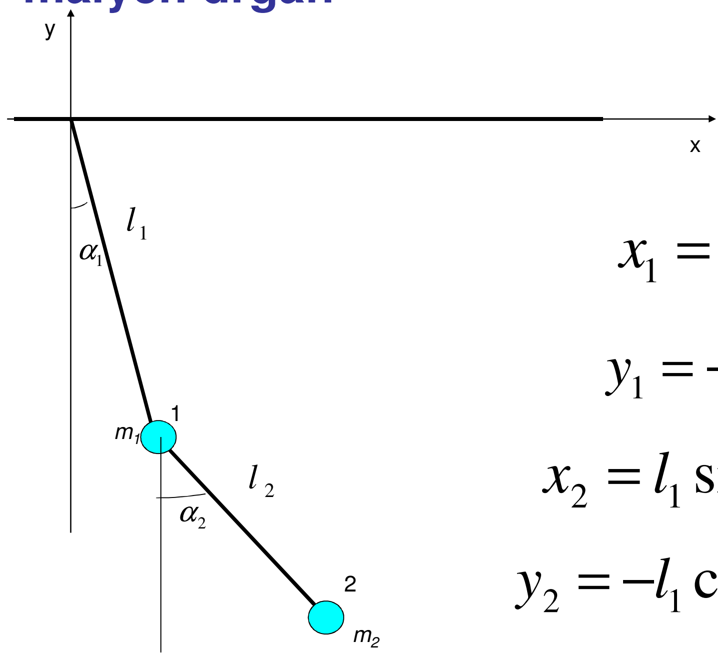
$$C^{(j)T}\hat{K}C^{(i)} = \omega_i^2 C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)} = \omega_j^2 C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)}$$

W przypadku gdy $\omega_i \neq \omega_j$ równość $\omega_i^2\left(C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)}\right) = \omega_j^2\left(C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)}\right)$

może być spełniona tylko wówczas gdy $C^{(j)T}\hat{M}C^{(i)} = 0$ cnd

Przykład

Zbadanie ruchu wahadła podwójnego o $l_1=l_2=l$ i $m_1=m_2=m$ w przybliżeniu małych drgań



$q_1=\alpha_1$,

$q_2=\alpha_2$ –współrzędne uogólnione

W położeniu równowagi $\alpha_1=\alpha_2=0$

$$x_1 = l_1 \sin\alpha_1 \qquad \dot{x}_1 = l_1\cos(\alpha_1)\dot{\alpha}_1$$

$$y_1 = -l_1\cos\alpha_1 \qquad \dot{y}_1 = l_1\sin(\alpha_1)\dot{\alpha}_1$$

$$x_2 = l_1\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2 \qquad \dot{x}_2 = l_1\cos(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 + l_2\cos(\alpha_2)\dot{\alpha}_2$$

$$y_2 = -l_1\cos\alpha_1 - l_2\cos\alpha_2 \qquad \dot{y}_2 = l_1\sin(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 + l_2\sin(\alpha_2)\dot{\alpha}_2$$

Energia kinetyczna

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =$$

$$= \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\alpha}_1^2 + l_2^2\dot{\alpha}_2^2\right) + m_2 l_1 l_2\left[\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)\right]\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 =$$

$$= \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\alpha}_1^2 + l_2^2\dot{\alpha}_2^2\right) + m_2 l_1 l_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2$$

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\alpha}_1^2 + l_2^2\dot{\alpha}_2^2\right) + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2$$

Gdy $m_1=m_2=m$ oraz $l_1=l_2=l$ to

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\alpha}_1^2 + l^2\dot{\alpha}_2^2\right) + ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 =$$

$$\frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2\right) + ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 =$$

$$= \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2\right) + \frac{1}{2} ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2} ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1$$

W celu możliwości zapisu w postaci wzoru ogólnego

$$T = \frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{\alpha}_1^2 + M_{22}\dot{\alpha}_2^2 + M_{12}\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + M_{21}\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1\right)$$

$M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ -stałe

$$M_{12} = M_{21}$$

trzeba korzystając z faktu iż $\alpha_1 << 1, \alpha_2 << 1$ dokonać przybliżenia $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \approx 1$ co prowadzi do wyniku

$$T \approx \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2\right) + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_2 = \frac{1}{2}\left(2ml^2\dot{\alpha}_1^2 + ml^2\dot{\alpha}_2^2 + ml^2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + ml^2\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1\right)$$

A zatem $M_{11} = 2ml^2$ $\quad M_{22} = ml^2$ $\quad M_{12} = M_{21} = ml^2$

Można też przyjąć iż

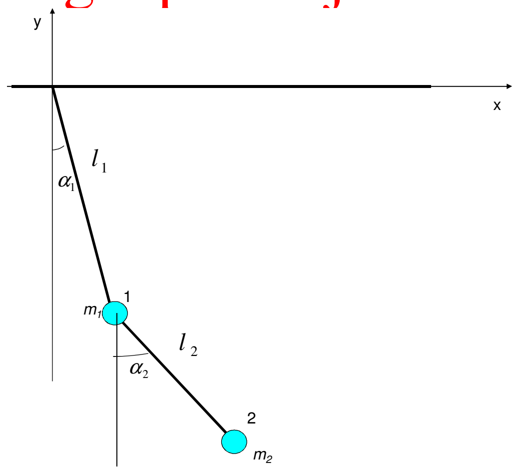
$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{\alpha}_1^2 + a_{22}\dot{\alpha}_2^2 + a_{12}\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + a_{21}\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1\right)$$

gdzie

$$a_{11} = 2ml^2 = const = M_{11} \qquad a_{22} = ml^2 = const = M_{22}$$

$$a_{12}(\alpha_1, \alpha_2) = a_{21} = ml^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \qquad M_{12} = M_{21} = a_{12}(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0) = ml^2$$

Energia potencjalna



$$y_1 = -l_1 \cos\alpha_1 \qquad y_2 = -l_1 \cos\alpha_1 - l_2 \cos\alpha_2$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 =$$

$$= -m_1 g l_1 \cos(\alpha_1) - m_2 g\left[l_1 \cos(\alpha_1) + l_2 \cos(\alpha_2)\right] =$$

Gdy $m_1 = m_2 = m$ oraz $l_1 = l_2 = l$ to

$$V = -mgl\cos(\alpha_1) - mg\left[l\cos(\alpha_1) + l\cos(\alpha_2)\right] =$$

$$= -2mgl\cos(\alpha_1) - mgl\cos(\alpha_2)$$

W celu możliwości zapisu w postaci wzoru ogólnego

$$V = \frac{1}{2}\left(K_{11}\alpha_1^2 + K_{22}\alpha_2^2 + K_{12}\alpha_1\alpha_2 + K_{21}\alpha_2\alpha_1\right) + const \qquad K_{12} = K_{21}$$

trzeba korzystając z faktu iż $\alpha_1 << 1, \alpha_2 << 1$ dokonać przybliżeń

$$\cos(\alpha_1) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 \quad \cos(\alpha_2) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha_2^2$$

co prowadzi do wyniku $\quad V \approx -3mgl + \frac{1}{2}\left(2mgl\alpha_1^2 + mgl\alpha_2^2\right)$

A zatem

$$K_{11} = 2mgl \qquad K_{22} = mgl \qquad K_{12} = K_{21} = 0 \qquad const = -3mgl$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \qquad \hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$L = T - V \approx \frac{1}{2}\left(2ml^2\dot{\alpha}_1^2 + ml^2\dot{\alpha}_2^2 + ml^2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + ml^2\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1\right) - \frac{1}{2}\left(2mgl\alpha_1^2 + mgl\alpha_2^2\right) + 3mgl$$

Równania Lagrange'a II rodzaju $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0 \Rightarrow 2ml^2\ddot{\alpha}_1 + ml^2\ddot{\alpha}_2 + 2mgl\alpha_1 = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0 \Rightarrow ml^2\ddot{\alpha}_2 + ml^2\ddot{\alpha}_1 + mgl\alpha_2 = 0$$

można zapisać w postaci $\sum_{l=1}^{2} M_{kl}\ddot{\alpha}_l = -\sum_{l=1}^{2} K_{kl}\alpha_l \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{2} M_{kl}\ddot{\alpha}_l + \sum_{l=1}^{2} K_{kl}\alpha_l = 0$

$$M_{11}\ddot{\alpha}_1 + M_{12}\ddot{\alpha}_2 + K_{11}\alpha_1 + K_{12}\alpha_2 = 0 \Rightarrow 2ml^2\ddot{\alpha}_1 + ml^2\ddot{\alpha}_2 + 2mgl\alpha_1 = 0 \qquad \text{k=1}$$

$$M_{21}\ddot{\alpha}_1 + M_{22}\ddot{\alpha}_2 + K_{21}\alpha_1 + K_{22}\alpha_2 = 0 \Rightarrow ml^2\ddot{\alpha}_1 + ml^2\ddot{\alpha}_2 + mgl\alpha_2 = 0 \qquad \text{k=2}$$

Ich rozwiązania poszukujemy w postaci

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = C\cos(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = C_1\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\alpha}_1 = -\omega^2 C_1\cos(\omega t + \varphi) \\ \alpha_2 = C_2\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\alpha}_2 = -\omega^2 C_2\cos(\omega t + \varphi) \end{matrix}$$

Po wstawieniu ich do równań Lagrange'a II rodzaju otrzymujemy układ 2 równań

$$\left[\left(2mgl - 2ml^2\omega^2\right)C_1 - ml^2\omega^2 C_2\right]\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\left[-ml^2\omega^2 C_1 + \left(mgl - ml^2\omega^2\right)C_2\right]\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\left[\left(2mgl-2ml^2\omega^2\right)C_1-ml^2\omega^2C_2\right]\cos(\omega t+\varphi)=0\Rightarrow\left(2mgl-2ml^2\omega^2\right)C_1-ml^2\omega^2C_2=0$$

$$\left[-ml^2\omega^2C_1+\left(mgl-ml^2\omega^2\right)C_2\right]\cos(\omega t+\varphi)=0\Rightarrow -ml^2\omega^2C_1+\left(mgl-ml^2\omega^2\right)C_2=0$$

Otrzymaliśmy układ równań jednorodnych na współczynniki C_1 i C_2 o postaci

$$\left(\hat{K}-\omega^2\hat{M}\right)C=\begin{bmatrix}2mgl-2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2\\ -ml^2\omega^2 & mgl-ml^2\omega^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=0$$

Ma on rozwiązanie niezerowe tylko wówczas gdy

$$\det\left(\hat{K}-\omega^2\hat{M}\right)=\begin{vmatrix}2mgl-2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2\\ -ml^2\omega^2 & mgl-ml^2\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\hat{M}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2ml^2 & ml^2\\ ml^2 & ml^2\end{bmatrix}\qquad \hat{K}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2mgl & 0\\ 0 & mgl\end{bmatrix}$$

Dozwolone częstości drgań ω spełniają warunek

$$\det\left(\hat{K}-\omega^2\hat{M}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(mgl-ml^2\omega^2\right)^2-m^2l^4\omega^4=0$$

$$\sqrt{2}\left(mgl-ml^2\omega^2\right)=-ml^2\omega^2$$

$$\sqrt{2}\left(mgl-ml^2\omega^2\right)=ml^2\omega^2$$

$$\sqrt{2}\left(mgl-ml^2\omega^2\right)=-ml^2\omega^2 \longrightarrow \quad \omega^2=\frac{g}{l}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{g}{l}\frac{2+\sqrt{2}}{1}\longrightarrow \boxed{\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)}}$$

$$\sqrt{2}\left(mgl-ml^2\omega^2\right)=ml^2\omega^2 \longrightarrow \omega^2=\frac{g}{l}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{g}{l}\frac{2-\sqrt{2}}{1}\longrightarrow \boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)}}$$

Macierze $C^{(i)}=\begin{bmatrix}C_1^{(i)}\\ C_2^{(i)}\end{bmatrix}$ odpowiadające ω_i wyznaczamy z dokładnością do stałej z

równania $\left(\hat{K}-\omega_i^2\hat{M}\right)C^{(i)}=\begin{bmatrix}2mgl-2ml^2\omega_i^2 & -ml^2\omega_i^2\\ -ml^2\omega_i^2 & mgl-ml^2\omega_i^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1^{(i)}\\ C_2^{(i)}\end{bmatrix}=0$

$$\omega=\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)}\Rightarrow\begin{bmatrix}2mgl(-1-\sqrt{2}) & -mgl(2+\sqrt{2})\\ -mgl(2+\sqrt{2}) & mgl(-1-\sqrt{2})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1^{(1)}\\ C_2^{(1)}\end{bmatrix}=0\Rightarrow C_2^{(1)}=-\sqrt{2}C_1^{(1)}\Rightarrow C^{(1)}=\begin{bmatrix}C_1^{(1)}\\ -\sqrt{2}C_1^{(1)}\end{bmatrix}$$

(dwa równania $2mgl\left(-1-\sqrt{2}\right)C_1^{(1)}-mgl\left(2+\sqrt{2}\right)C_2^{(1)}=0$ oraz $-mgl\left(2+\sqrt{2}\right)C_1^{(1)}+mgl\left(-1-\sqrt{2}\right)C_2^{(1)}=0$ wynikające z powyższego równania macierzowego są sobie równoważne i prowadzą do podanej powyżej relacji między $C_1^{(1)}$ oraz $C_2^{(1)}$)

$$\omega=\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)}\Rightarrow\begin{bmatrix}2mgl(-1+\sqrt{2}) & -mgl(2-\sqrt{2})\\ -mgl(2-\sqrt{2}) & mgl(-1+\sqrt{2})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1^{(2)}\\ C_2^{(2)}\end{bmatrix}=0\Rightarrow C_2^{(2)}=\sqrt{2}C_1^{(2)}\Rightarrow C^{(2)}=\begin{bmatrix}C_1^{(2)}\\ \sqrt{2}C_1^{(2)}\end{bmatrix}$$

Pełne rozwiązanie będące superpozycją drgań o znalezionych częstościach ma postać

$$\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=C^{(1)}\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+C^{(2)}\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)=\begin{bmatrix}C_1^{(1)}\\ -\sqrt{2}C_1^{(1)}\end{bmatrix}\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+\begin{bmatrix}C_1^{(2)}\\ \sqrt{2}C_1^{(2)}\end{bmatrix}\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)$$

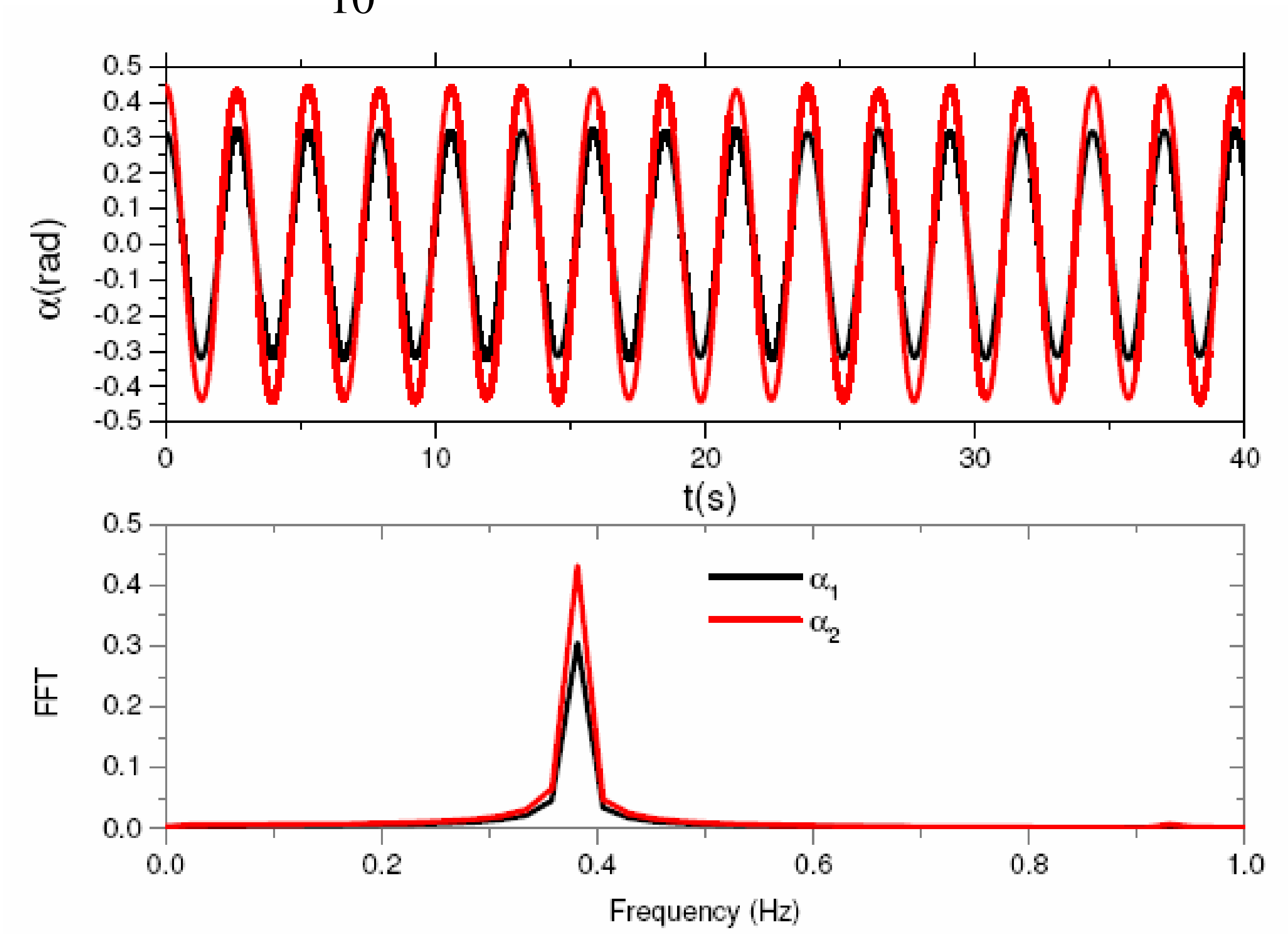
zależną od stałych $C_1^{(1)}\varphi_1, C_1^{(2)},\varphi_2$, które można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu

$l = 1\text{m}$

$$\alpha_1(t=0) = \pi/10, \alpha_2(t=0) = \sqrt{2}\pi/10$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \dot{\alpha}_2(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow C_1^{(1)} = 0, \varphi_1 = 0, C_1^{(2)} = \frac{\pi}{10}, \varphi_2 = 0$$

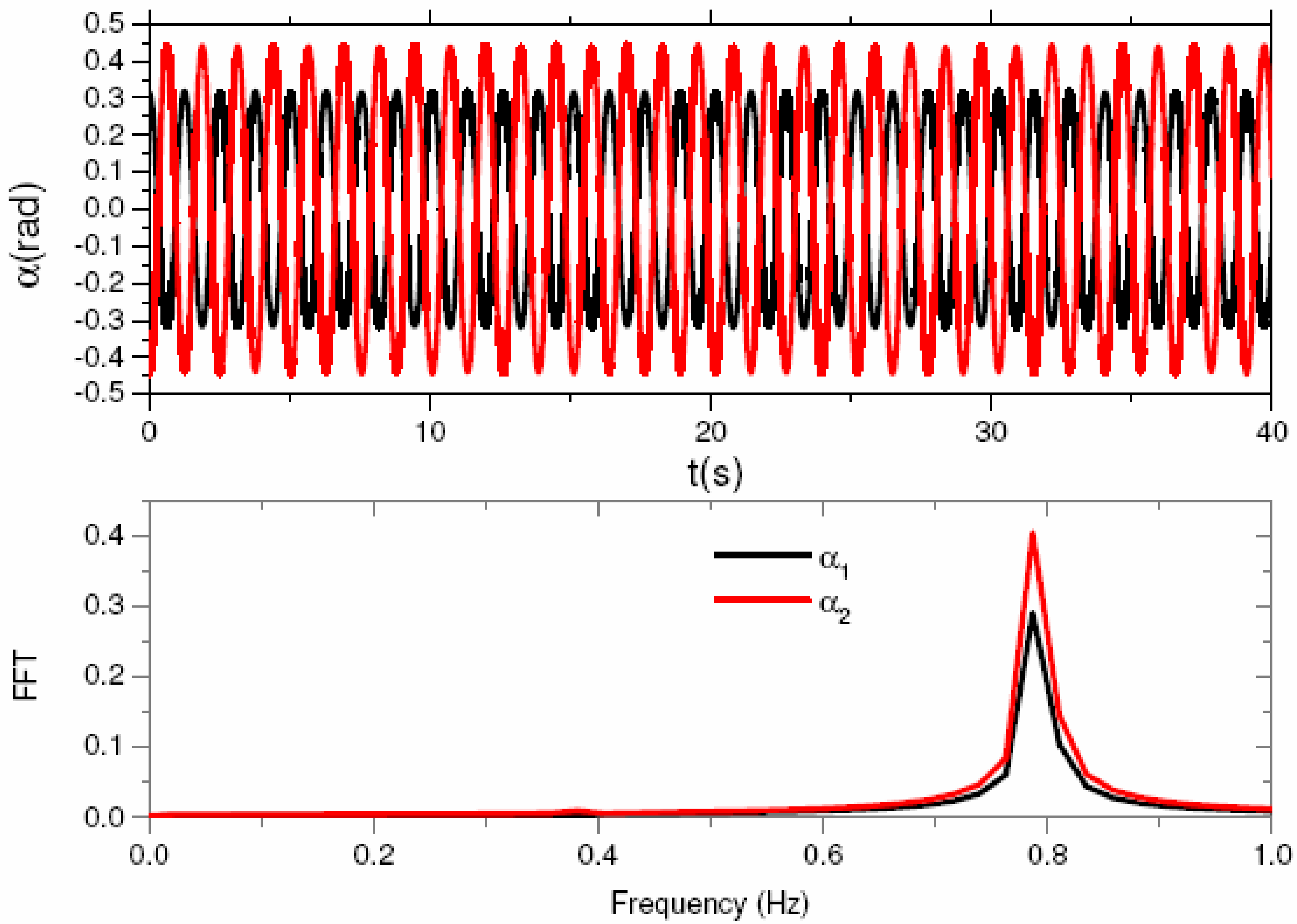


$l = 1\text{m}$

$$\alpha_1(t=0) = \pi/10, \alpha_2(t=0) = -\sqrt{2}\pi/10$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \dot{\alpha}_2(t=0) = 0$$

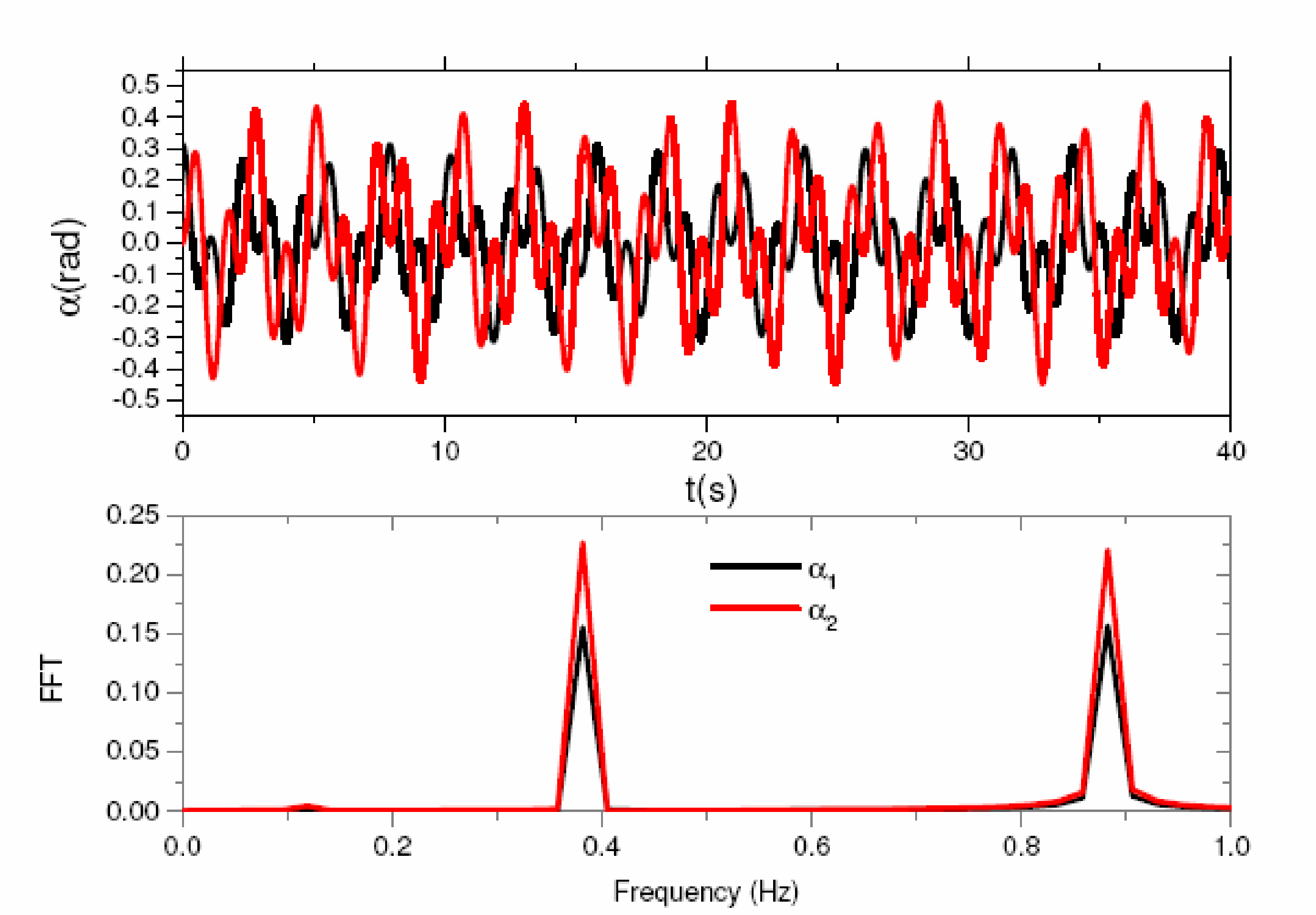
$$\Rightarrow C_1^{(1)} = \frac{\pi}{10}, \varphi_1 = 0, C_1^{(2)} = 0, \varphi_2 = 0$$



$l = 1\text{m}$

$$\alpha_1(t=0) = \pi/10, \alpha_2(t=0) = 0$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \dot{\alpha}_2(t=0) = 0$$



Małe drgania wokół położenia równowagi-współrzędne normalne.

Funkcja Lagrange'a w przybliżeniu małych drgań

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f}\left(M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l - K_{kl}q_k q_l\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T\hat{M}\dot{q} - q^T\hat{K}q\right) \quad \text{gdzie } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} \qquad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

$$q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & & q_f \end{bmatrix} \quad \dot{q}^T = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & & \dot{q}_f \end{bmatrix} \qquad M_{kl} = M_{lk} \qquad K_{kl} = K_{lk}$$

$$\hat{M} = [M_{kl}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & & M_{1f} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2f} \\ & & & \\ M_{f1} & M_{f2} & & M_{ff} \end{bmatrix} \qquad \hat{K} = [K_{kl}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & K_{1f} \\ K_{21} & K_{22} & & K_{2f} \\ & & & \\ K_{f1} & K_{f2} & & K_{ff} \end{bmatrix}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,f \Rightarrow \sum_{l=1}^{f} M_{jl}\ddot{q}_l + \sum_{l=1}^{f} K_{jl}q_l \Rightarrow \hat{M}\ddot{q} + \hat{K}q = 0$$

A ich rozwiązania można zapisać w postaci superpozycji drgań normalnych zachodzących z częstościami ω_i^2 spełniającymi równanie $\det(\hat{K} - \omega_i^2\hat{M}) = 0$
Poszukujemy nowych współrzędnych uogólnionych u_i (*i=1,…,f*) w których równania te przyjmą postać $\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0$ *.Problem ten sprowadza się do znalezienia transformacji diagonalizującej jednocześnie macierze M i K. Dodatkowo zwykle żądamy by macierz M po diagonalizacji była jednostkowa, a elementy macierzy K po diagonalizacji były równe kwadratom częstości drgań dzięki czemu* $L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\left(\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2\right)$

Informacje dla zainteresowanych (slajdy 26-32)

Diagonalizacja macierzy *M*

Macierz *M* jest hermitowska, więc jej wartości własne są rzeczywiste. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Wektory własne odpowiadające tej samej wartości własnej można zortogonalizować. A zatem istnieje możliwość znalezienia *f* wektorów własnych (*f*-wymiar macierzy) tworzących bazę ortogonalną. Ponieważ macierz *M* jest hermitowska i rzeczywista to składowe wektorów własnych można wybrać tak by były liczbami rzeczywistymi. Macierz *R* przejścia do bazy ortogonalnej złożona z unormowanych ortogonalnych rzeczywistych wektorów własnych macierzy M jest unitarna i rzeczywista .

Macierz *M* zapisana w nowej bazie jest diagonalna.

R-macierz unitarna $\Rightarrow \hat{R}^{-1} = \hat{R}^{*T}, \quad \hat{M}' \equiv \hat{R}\hat{M}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{M}\hat{R}^{*T} = \hat{R}\hat{M}\hat{R}^{T} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_f \end{bmatrix}$

Funkcje Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \hat{M}\dot{q} - q^T \hat{K} q\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \hat{R}^{-1}\hat{R}\hat{M}\hat{R}^{-1}\hat{R}\dot{q} - q^T \hat{R}^{-1}\hat{R}\hat{K}\hat{R}^{-1}\hat{R}q\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{q}^T \hat{R}^T \hat{R}\hat{M}\hat{R}^T \hat{R}\dot{q} - q^T \hat{R}^T \hat{R}\hat{K}\hat{R}^T \hat{R}q\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\hat{R}\dot{q}\right)^T \hat{R}\hat{M}\hat{R}^T \hat{R}\dot{q} - \left(\hat{R}q\right)^T \hat{R}\hat{K}\hat{R}^T \hat{R}q\right] = \frac{1}{2}\left(\dot{q}'^T \hat{M}'\dot{q}' - q'^T \hat{K}' q'\right)$$

gdzie $\hat{K}' \equiv \hat{R}\hat{K}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{K}\hat{R}^{T}, \quad q' \equiv \hat{R}q = \sum_{i=1}^{f} \hat{R}C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^{f} C'^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

macierz symetryczna rzeczywista

transformacja do nowych współrzędnych

Ostatecznie funkcja Lagrange'a w nowych współrzędnych przyjmuje postać

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} \mu_k \dot{q}_k'^2 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f} K'_{kl} q'_k q'_l$$

Ponadto możemy znaleźć równanie spełnione przez macierz

$$C'^{(i)} = \hat{R} C^{(i)} \qquad i = 1,\ldots, f$$

amplitud występujących we wzorze $q' = \sum_{i=1}^{f} C'^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Wiemy ze macierz amplitud $C^{(i)}$ występujących we wzorze

$$q = \sum_{i=1}^{f} C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

spełnia równanie

$$\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right) C^{(i)} = 0$$

Mnożąc powyższe równanie lewostronnie przez macierz $\hat{R}$

i uwzględniając to iż $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^T$ oraz $\hat{M}' = \hat{R}\hat{M}\hat{R}^T$ $\hat{K}' = \hat{R}\hat{K}\hat{R}^T$

otrzymujemy

$$\hat{R}\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)\hat{R}^{-1}\hat{R} C^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \left(\hat{R}\hat{K} - \omega_i^2 \hat{R}\hat{M}\right)\hat{R}^T \hat{R} C^{(i)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\hat{R}\hat{K}\hat{R}^T - \omega_i^2 \hat{R}\hat{M}\hat{R}^T\right)\hat{R} C^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \left(\hat{K}' - \omega_i^2 \hat{M}'\right) C'^{(i)} = 0$$

Dokonajmy kolejnej transformacji do zmiennych, w których macierz *M'* zostanie sprowadzona do macierzy jednostkowej $q_l'' \equiv \sqrt{\mu_l}\, q_l'\,, \quad l = 1,2,\ldots, f$

W nowych zmiennych funkcje Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\mu_k \dot{q}_k'^2 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f} K_{kl}' q_k' q_l' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k''^2 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f} K_{kl}'' q_k'' q_l'' = \frac{1}{2}\left(\dot{q}''^T \hat{1}\dot{q}'' - q''^T \hat{K}'' q''\right)$$

gdzie $\quad K_{kl}'' \equiv \dfrac{K_{kl}'}{\sqrt{\mu_k \mu_l}} = K_{lk}'' \quad k,l = 1,2,\ldots, f$

$\hat{K}''$ -macierz symetryczna i rzeczywista czyli hermitowska

Ponadto $\quad q''_l = \sum_{i=1}^{f} C''^{(i)}_l \cos(\omega_i t + \varphi_i) \qquad C''^{(i)}_l = \sqrt{\mu_l}\, C'^{(i)}_l \quad l = 1,\ldots, f$

$$\left(\hat{K}' - \omega_i^2 \hat{M}'\right) C'^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \sum_l \left(K'_{kl} - \omega_i^2 \mu_k \delta_{kl}\right) C'^{(i)}_l = 0 \Leftrightarrow \sum_l \left(\sqrt{\mu_k \mu_l}\, K''_{kl} - \omega_i^2 \sqrt{\mu_k \mu_l}\, \delta_{kl}\right) C'^{(i)}_l = 0$$

$$\sqrt{\mu_k} \sum_l \left(K''_{kl} - \omega_i^2 \delta_{kl}\right) \sqrt{\mu_l}\, C'^{(i)}_l = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\mu_k} \sum_l \left(K''_{kl} - \omega_i^2 \delta_{kl}\right) C''^{(i)}_l = 0 \Leftrightarrow \left(\hat{K}'' - \omega_i^2 \hat{1}\right) C''^{(i)} = 0$$

$k = 1,\ldots, f$

Diagonalizacja macierzy *K''*

Macierz *K''* jest hermitowska, więc jej wartości własne są rzeczywiste. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Wektory własne odpowiadające tej samej wartości własnej można zortogonalizować. A zatem istnieje możliwość znalezienia *f* wektorów własnych (*f*-wymiar macierzy) tworzących bazę ortogonalną . Ponieważ macierz *K''* jest hermitowska i rzeczywista to składowe wektorów własnych można wybrać tak by były liczbami rzeczywistymi. Macierz *Z* przejścia do bazy ortogonalnej złożona z unormowanych ortogonalnych rzeczywistych wektorów własnych macierzy K'' jest unitarna i rzeczywista . Macierz *K''* zapisana w nowej bazie jest diagonalna złozona z kwadratów czestości drgań .

Z-macierz unitarna

$$\Rightarrow \hat{Z}^{-1} = \hat{Z}^{*T}, \quad \hat{K}''' \equiv \hat{Z}\hat{K}''\hat{Z}^{-1} = \hat{Z}\hat{K}''\hat{Z}^{*T} = \hat{Z}\hat{K}''\hat{Z}^{T} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_f^2 \end{bmatrix}$$

Funkcje Lagrange'a można zapisać w postaci

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}''^T \hat{1}\dot{q}'' - q''^T \hat{K}''q''\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}''^T \hat{Z}^{-1}\hat{Z}\hat{1}\hat{Z}^{-1}\hat{Z}\dot{q}'' - q''^T \hat{Z}^{-1}\hat{Z}\hat{K}''\hat{Z}^{-1}\hat{Z}q''\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{u}^T \hat{1}\dot{u} - u^T \hat{K}'''u\right), \quad \text{gdzie} \quad u \equiv \hat{Z}q''$$

transformacja do nowych zmiennych u tzw. **współrzędnych normalnych**

Ostatecznie funkcja Lagrange'a we współrzędnych normalnych przyjmuje **postać diagonalną**

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\left(\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2\right)$$

Poprzez ciąg transformacji współrzędnych uogólnionych dokonaliśmy **jednoczesnej diagonalizacji** macierzy mas *M* i stałych sprężystości *K*.

Ponadto $\quad C'''^{(i)} = \hat{Z}C''^{(i)} \quad u_l = \sum_{i=1}^{f} C'''^{(i)}_l \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

$$\left(\hat{K}'' - \omega_i^2\hat{1}\right)C''^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \left(\hat{K}''' - \omega_i^2\hat{1}\right)C'''^{(i)} = 0 \Leftrightarrow \left(\omega_k^2 - \omega_i^2\right)C'''^{(i)}_k = 0$$

$$C'''^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ C'''^{(i)}_i \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad C'''^{(i)}_i \neq 0$$

i-ta współrzędna

$$\omega_i \neq \omega_k \Rightarrow C'''^{(i)}_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, f$$

Gdy nie ma drugiej częstości drgań ω_k dla której $\omega_k = \omega_i$ to macierz $C'''^{(i)}$ odpowiadająca częstości ω_i może mieć tylko jeden niezerowy element w wierszu *i*-tym. W przypadku występowania częstości wielokrotnych można tak dobrać elementy macierzy by warunek ten był również spełniony

Znalezione współrzędne $u = \hat{Z}\hat{S}\hat{R}q = \hat{W}q$ to współrzędne normalne gdzie

$$\hat{S} \equiv \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_3^{1/2} \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_f \end{bmatrix} \qquad \hat{M}' = \hat{S}^2$$

We współrzędnych normalnych $\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\left(\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2\right)}$

zaś równania Lagrange'a przyjmują postać

$$\boxed{\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,f}$$

(równania dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego)

Zmiany każdej ze współrzędnych normalnych gdy $\omega_l \neq 0$ są opisane funkcją harmoniczną o ściśle określonej częstości. Wprowadzając oznaczenie $A^{(i)} = C'''^{(i)}_i$

$$u_i(t) = A^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = 1,2,\ldots,f$$

(drgania jednowymiarowego oscylatora)

Poprzez transformację odwrotną można wrócić do zmiennych *q*

$$\hat{W}^{-1}\hat{W} = \hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T\hat{Z}\hat{S}\hat{R} = \hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^{-1}\hat{Z}\hat{S}\hat{R} =$$

$$q = \hat{W}^{-1}u = \hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T u$$

$$= \hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{S}\hat{R} = \hat{R}^T\hat{R} = \hat{R}^{-1}\hat{R} = \hat{I}$$

i zapisać drgania w pierwotnych współrzędnych uogólnionych *q* jako kombinację liniową modów normalnych

Rozwiązanie równań Lagrange'a II rodzaju w przybliżeniu małych drgań zapisano w ogólnej postaci $q = \sum_{i=1}^{f} C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Wiadomo iż $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ \\ C_f^{(i)} \end{bmatrix}$ spełniają równanie $\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right) C^{(i)} = 0$ oraz równanie $C^{(j)T} \hat{M} C^{(i)} = 0$ gdy $j \neq i$.

Rozwiązanie równań Lagrange'a II rodzaju dla współrzędnych normalnych można zapisać w postaci $u = \sum_{i=1}^{f} C'''^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ gdzie $C'''^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i'''^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}$

Związek $C'''^{(i)}$ z $C^{(i)}$ opisuje relacja $C'''^{(i)} = \hat{W} C^{(i)} = \hat{Z}\hat{S}\hat{R} C^{(i)}$

Relacja odwrotna ma postać $C^{(i)} = \hat{W}^{-1} C'''^{(i)} = \hat{R}^T \hat{S}^{-1} \hat{Z}^T C'''^{(i)}$

A zatem można przewidzieć iż macierz $\hat{W}^{-1}$ występująca także w relacji $q = \hat{W}^{-1} u$

$$\hat{W}^{-1} = \hat{R}^T \hat{S}^{-1} \hat{Z}^T = \left[\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(i)}, \ldots, \chi^{(f)}\right] = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_1^{(i)} & \chi_1^{(f)} \\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(i)} & \chi_2^{(f)} \\ \\ \chi_f^{(1)} & \chi_f^{(i)} & \chi_f^{(f)} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\chi^{(i)} = \frac{C^{(i)}}{C_i'''^{(i)}}$$

czyli $\chi^{(i)}$ może różnić się od $C^{(i)}$ tylko stałą

Stałe $C'''^{(i)}_i$ niezbędne do ścisłego wyznaczenia macierzy $\hat{W}^{-1}$ można wyznaczyć zauważając iż

$$\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M}\hat{W}^{-1} = \left(\hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T\right)^T \hat{M}\left(\hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T\right) = \left(\hat{Z}^T\right)^T\left(\hat{S}^{-1}\right)^T\left(\hat{R}^T\right)^T \hat{M}\left(\hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T\right) =$$

$$= \hat{Z}\hat{S}^{-1}\hat{R}\hat{M}\hat{R}^T\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T = \hat{Z}\hat{S}^{-1}\hat{M}'\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T = \hat{Z}\hat{S}^{-1}\hat{S}^2\hat{S}^{-1}\hat{Z}^T = \hat{Z}\hat{Z}^T = \hat{I}$$

Z powyższej relacji wynika iż $\chi^{(i)}$ muszą spełniać relacje

$$\left(\chi^{(i)}\right)^T \hat{M}\left(\chi^{(i)}\right) = 1 \qquad \left(\chi^{(j)}\right)^T \hat{M}\left(\chi^{(i)}\right) = 0 \quad \text{gdy} \quad j \neq i$$

co pozwala na określenie stałych brakujących do wyznaczenia $\chi^{(i)}$ i macierzy $\hat{W}^{-1}$
Ponadto zachodzi relacja

$$\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M}\hat{W}^{-1} = \hat{I} \Rightarrow \left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M}\hat{W}^{-1}\hat{W} = \hat{I}\hat{W} \Rightarrow \left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M} = \hat{W}$$

Znając współrzędne normalne u współrzędne uogólnione q można określić z relacji

$$q = \hat{W}^{-1}u$$

Znając współrzędne uogólnione q można znaleźć współrzędne normalne u ze wzoru

$$u = \hat{W}q = \left(\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M}\right)q$$

Informacje podstawowe

Na slajdach 26-32 pokazano iż do jednoczesnej diagonalizacji macierzy $\hat{M}$ oraz $\hat{K}$ może służyć macierz $\hat{W}^{-1}$

Ma ona postać $\boxed{\hat{W}^{-1} = \left[\chi^{(1)},\ldots,\chi^{(i)},\ldots,\chi^{(f)}\right]}$ gdzie

$\chi^{(i)} \neq 0$ - macierz kolumnowa spełniająca warunki

$\boxed{\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)\chi^{(i)} = 0}$ (*) $i=1,\ldots\ldots,f$

$\boxed{\chi^{(i)T}\hat{M}\chi^{(i)} = 1}$ (***)

$\boxed{\chi^{(j)T}\hat{M}\chi^{(i)} = 0}$ (**) $j \neq i$

Macierze zdiagonalizowane określamy ze wzorów $\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M}\hat{W}^{-1}$ oraz $\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{K}\hat{W}^{-1}$

Spełnienie relacji (**) zapewnia iż macierz $\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{M}\hat{W}^{-1}$ jest diagonalna

Spełnienie dodatkowej relacji (***) zapewnia iż jest to macierz jednostkowa.

Z (*) wynika iż $\hat{K}\chi^{(i)} = \omega_i^2 \hat{M}\chi^{(i)} \Rightarrow \chi^{(j)T}\hat{K}\chi^{(i)} = \omega_i^2 \chi^{(j)T}\hat{M}\chi^{(i)}$

a zatem uwzględniając (**) $\chi^{(j)T}\hat{K}\chi^{(i)} = \omega_i^2 \chi^{(j)T}\hat{M}\chi^{(i)} = 0$ gdy $j \neq i$

Spełnienie relacji $\chi^{(j)T}\hat{K}\chi^{(i)} = 0$ gdy $j \neq i$ zapewnia iż macierz $\left(\hat{W}^{-1}\right)^T \hat{K}\hat{W}^{-1}$ jest diagonalna, a relacji (***) ze jej elementy są równe ω_i^2 (***)

Uwaga: Pokazano wcześniej iż relacje (*) i (**) są spełnione też przez macierze $C^{(i)}$ amplitud. Dodatkowo relacja (**) przy spełnieniu relacji (*) zachodzi zawsze gdy $\omega_j \neq \omega_i$. W innym przypadku stanowi ona warunek dodatkowy.

Relacje wiążącą współrzędne uogólnione q_i z normalnymi u_i można zapisać w postaci

$$\boxed{q = \hat{W}^{-1} u = \sum_{i=1}^{f} \chi^{(i)} u_i}$$

gdzie

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_f \end{bmatrix}$$

Po jej wstawieniu do równania ruchu $\hat{M}\ddot{q} = -\hat{K}q$

otrzymujemy $\sum_{i=1}^{f} \hat{M}\chi^{(i)}\ddot{u}_i = -\sum_{i=1}^{f} \hat{K}\chi^{(i)} u_i$

Uwzględniając to iż $\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)\chi^{(i)} = 0 \Rightarrow \hat{K}\chi^{(i)} = \omega_i^2 \hat{M}\chi^{(i)}$

mamy $\sum_{i=1}^{f} \hat{M}\chi^{(i)}\ddot{u}_i = -\sum_{i=1}^{f} \omega_i^2 \hat{M}\chi^{(i)} u_i$

Uwzględniając fakt iż $\chi^{(j)T}\hat{M}\chi^{(i)} = 0$ gdy $j \neq i$ relacja ta może być spełniona

tylko wówczas gdy $\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0$ $i=1,.........,f$

Równania określające zależność współrzędnych uogólnionych od czasu są takie jak dla oscylatorów harmonicznych jednowymiarowych gdy $\omega_i \neq 0$

A ich rozwiązania maja postać ogólną $u_i = A^{(i)}\cos\left(\omega_i t + \varphi_i\right)$

Gdy $\omega_i = 0$ to $u_i = A^{(i)}\left(t + \gamma_i\right)$ φ_i, γ_i - stałe

$$q = \hat{W}^{-1} u$$

Relacje odwrotną wiążącą współrzędne normalne z uogólnionymi   można zapisać w postaci

$$\boxed{u = \hat{W} q}$$

gdzie macierz $\hat{W} = \left(\hat{W}^{-1}\right)^{-1} = \left(\hat{W}^{-1}\right)^{T} \hat{M}$

gdyż $\left(\hat{W}^{-1}\right)^{T} \hat{M} \hat{W}^{-1} = \hat{I} \Rightarrow \left(\hat{W}^{-1}\right)^{T} \hat{M} \hat{W}^{-1} \hat{W} = \hat{I} \hat{W} \Rightarrow \left(\hat{W}^{-1}\right)^{T} \hat{M} = \hat{W}$

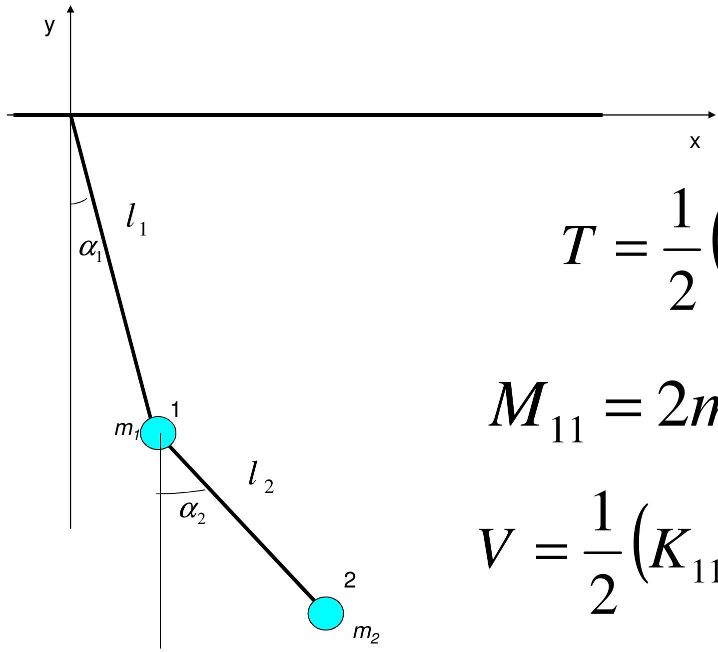
Ponadto zachodzi

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^{T} \hat{M} \dot{q} - q^{T} \hat{K} q\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{u}^{T} \hat{I} \dot{u} - u^{T} \hat{K}''' u\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\left(\dot{u}_k^2 - \omega_k^2 u_k^2\right)$$

gdzie $\hat{K}''' = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_f^2 \end{bmatrix}$ $\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $\dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \\ \dot{u}_f \end{bmatrix}$

$$u^{T} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & & u_f \end{bmatrix} \qquad \dot{u}^{T} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{u}_2 & & \dot{u}_f \end{bmatrix}$$

Współrzędne normalne u_1 oraz u_2 dla wahadła podwójnego o $m_1=m_2=m$ i $l_1=l_2=l$



$$T = \frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{\alpha}_1^2 + M_{22}\dot{\alpha}_2^2 + M_{12}\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + M_{21}\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1\right)$$

$$M_{11} = 2ml^2 \qquad M_{22} = ml^2 \qquad M_{12} = M_{21} = ml^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left(K_{11}\alpha_1^2 + K_{22}\alpha_2^2 + K_{12}\alpha_1\alpha_2 + K_{21}\alpha_2\alpha_1\right) + const$$

$$K_{11} = 2mgl \qquad K_{22} = mgl \qquad K_{12} = K_{21} = 0 \qquad const = -3mgl$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \qquad \hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$q = \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Poprzednio znaleziono $C^{(1)} = \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ -\sqrt{2}C_1^{(1)} \end{bmatrix}$ oraz $C^{(2)} = \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ \sqrt{2}C_1^{(2)} \end{bmatrix}$ spełniające równanie

$\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right) C^{(i)} = 0$ dla $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)}$ oraz $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)}$ odpowiednio

Dodatkowo wiadomo iż współrzędne uogólnione $q=\alpha$ wiążą się ze

współrzędnymi normalnymi $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ relacją $q = \hat{W}^{-1} u$

Macierz $\hat{W}^{-1}$ ma postać $\hat{W}^{-1} = \left[\chi^{(1)} \quad \chi^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix}$

przy czym macierze kolumnowe $\chi^{(i)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix}$ spełniają równania

$\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)\chi^{(i)} = 0$ (1) $\quad \chi^{(i)T}\left(\hat{M}\right)\chi^{(j)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & gdy \quad i \neq j \end{cases}$ (2)

Równania (1) mają identyczną postać jak równania wyznaczające $C^{(i)}$

A zatem $\chi_2^{(1)} = -\sqrt{2}\chi_1^{(1)}; \chi_2^{(2)} = \sqrt{2}\chi_1^{(2)}$

Równania (2) gdy $i \neq j$ są spełnione automatycznie bo $\omega_i \neq \omega_j$

Ponieważ $\hat{M} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}$ to

równania (2) gdy *j=i* przyjmują postać *(i=1,2)*

$$\chi^{(i)T}\left(\hat{M}\right)\chi^{(i)} = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)}\end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ml^2\begin{bmatrix}\chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)}\end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ml^2\begin{bmatrix}\chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\chi_1^{(i)} + \chi_2^{(i)} \\ \chi_1^{(i)} + \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = 1$$

$$\chi_2^{(1)} = -\sqrt{2}\chi_1^{(1)}; \chi_2^{(2)} = \sqrt{2}\chi_1^{(2)}$$

$$2\left[\chi_1^{(i)}\right]^2 + \left[\chi_2^{(i)}\right]^2 + 2\chi_1^{(i)}\chi_2^{(i)} = \frac{1}{ml^2}$$

$$2\left[\chi_1^{(1)}\right]^2 + 2\left[\chi_1^{(1)}\right]^2 - 2\sqrt{2}\left[\chi_1^{(1)}\right]^2 = \frac{1}{ml^2}$$ i=1

$$2\left[\chi_1^{(2)}\right]^2 + 2\left[\chi_1^{(2)}\right]^2 + 2\sqrt{2}\left[\chi_1^{(2)}\right]^2 = \frac{1}{ml^2}$$ i=2

$$2\left[\chi_1^{(1)}\right]^2+2\left[\chi_1^{(1)}\right]^2-2\sqrt{2}\left[\chi_1^{(1)}\right]^2=\frac{1}{ml^2}\ \rightarrow\ \chi_1^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}}\ \rightarrow\ \chi_2^{(1)}=-\sqrt{2}\chi_1^{(1)}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}}$$

$$2\left[\chi_1^{(2)}\right]^2+2\left[\chi_1^{(2)}\right]^2+2\sqrt{2}\left[\chi_1^{(2)}\right]^2=\frac{1}{ml^2}\ \rightarrow\ \chi_1^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}\ \rightarrow\ \chi_2^{(2)}=\sqrt{2}\chi_1^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}$$

$$\hat{W}^{-1}=\begin{bmatrix}\chi_1^{(1)} & \chi_1^{(2)}\\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}\\ \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}\end{bmatrix}$$

$$q=\alpha=\hat{W}^{-1}u\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}\\ \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Równania określające związek współrzędnych uogólnionych ze współrzędnymi normalnymi przyjmują więc postać

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2ml^2}}\left(\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\qquad \alpha_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2}}\left(-\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

Związek odwrotny ma postać

$$u = \left(W^{-1}\right)^T \hat{M} q \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} & \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2-\sqrt{2})}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2(2+\sqrt{2})}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \left[\left(2-\sqrt{2}\right)\alpha_1 + \left(1-\sqrt{2}\right)\alpha_2\right] \\ \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \left[\left(2+\sqrt{2}\right)\alpha_1 + \left(1+\sqrt{2}\right)\alpha_2\right] \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{ml^2}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}} \left[\left(2-\sqrt{2}\right)\alpha_1 + \left(1-\sqrt{2}\right)\alpha_2\right]$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{ml^2}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} \left[\left(2+\sqrt{2}\right)\alpha_1 + \left(1+\sqrt{2}\right)\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}}\left(\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) \qquad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2ml^2}}\left(-\frac{u_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{u_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

Funkcja Lagrange'a we współrzędnych normalnych

$$L = \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2\right) + ml^2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + 3mgl - \frac{1}{2}mgl\left(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{4\dot{u}_1\dot{u}_2}{2} + \frac{2\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}} - \frac{4\dot{u}_1\dot{u}_2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}}\right) + 3mgl +$$

$$- \frac{1}{4}\frac{g}{l}\left(\frac{2u_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2u_2^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{4u_1u_2}{2} + \frac{2u_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2u_2^2}{2+\sqrt{2}} - \frac{4u_1u_2}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}}\right) + 3mgl +$$

$$- \frac{g}{l}\left(\frac{u_1^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{u_2^2}{2+\sqrt{2}}\right) =$$

$$L=\left(\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}}+\frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\dot{u}_1^2}{2-\sqrt{2}}+\frac{\dot{u}_2^2}{2+\sqrt{2}}\right)+3mgl-\frac{g}{l}\left(\frac{u_1^2}{2-\sqrt{2}}+\frac{u_2^2}{2+\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2\right)+3mgl-\frac{1}{2}\left(\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)u_1^2+\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)u_2^2\right)$$

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2\right)+3mgl-\frac{1}{2}\left(\omega_1^2u_1^2+\omega_2^2u_2^2\right)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial u_1}=0 \Rightarrow \ddot{u}_1+\omega_1^2u_1=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial u_2}=0 \Rightarrow \ddot{u}_2+\omega_2^2u_2=0$$

opisują dwa niesprzężone oscylatory o częstościach

kołowych $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right)}$ oraz $\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)}$