

# Efekt tunelowy oraz transmisja cząstki nad barierą potencjału

# Efekt tunelowy (tunelowanie przez barierę potencjału)

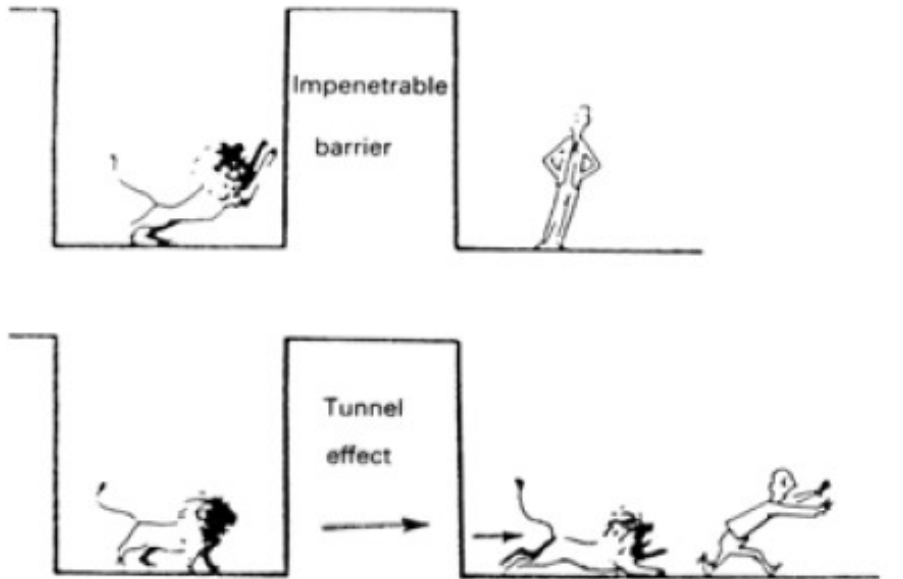


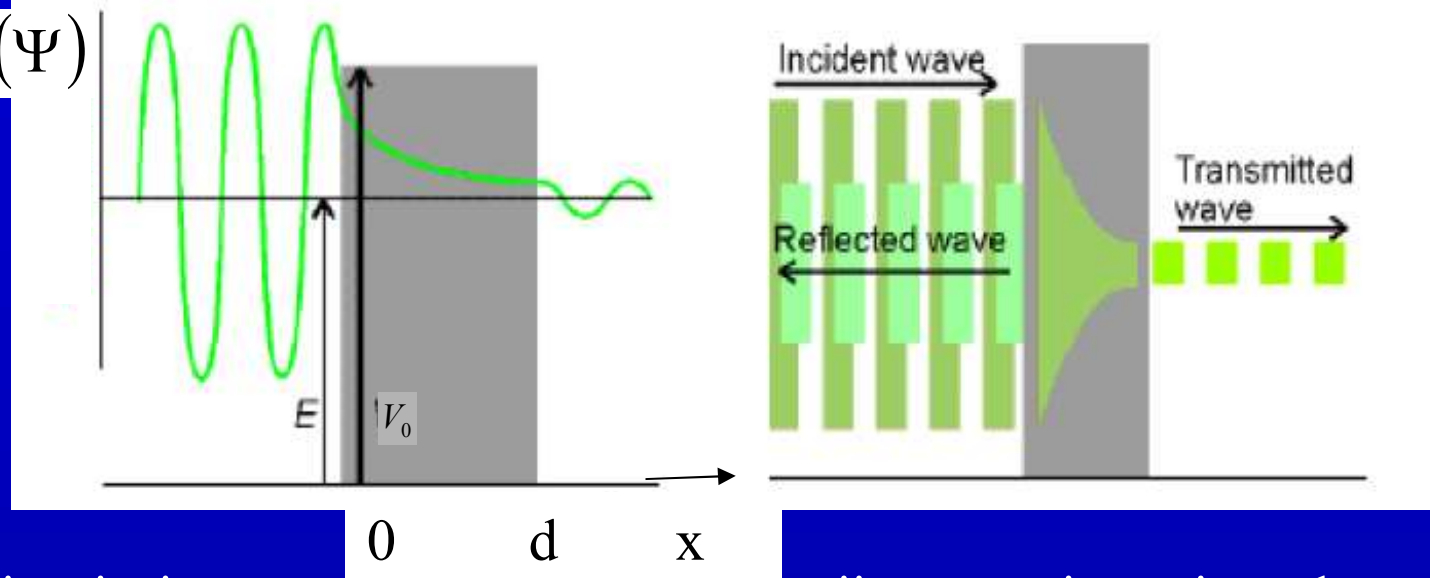
Fig. 1.1. The difference between classical theory and quantum theory, illustrating tunneling through a potential barrier (Bleaney, 1984).

Cząstka klasyczna nie może przejść przez barierę, której wysokość przewyższa jej energię  $E < V_0$  gdyż nie może ona przebywać w obszarze bariery. W myśl klasycznej mechaniki **prawdopodobieństwo przeniknięcia przez barierę takiej cząstki jest równe zero.**

Fala materii związana z cząstką kwantową wnika w obszar bariery potencjału i może osiągnąć przeciwną granicę bariery.

Mechanika kwantowa dopuszcza sytuację, że cząstka o energii mniejszej od wysokości bariery potencjału może przedostać się do obszaru leżącego na prawo od bariery o ile masa cząstki oraz wysokość i szerokość bariery jest odpowiednio mała.

**Prawdopodobieństwo przejścia cząstki kwantowej przez barierę jest różne od zera**

$\text{Re}(\Psi)$ 

Fale materii opisujące cząstki o ustalonej energii poruszające się w lewo lub w prawo w obszarze leżącym na lewo od bariery ( $x < 0$ ) oraz poruszające się w prawo w obszarze na prawo od bariery ( $x > d$ ) wyrażają odpowiednio dobrane do powyższych przypadków zespolone harmoniczne fale płaskie. W obszarze bariery o szerokości  $d$  i wysokości  $V_0$  cząstką o energii  $E < V_0$  wiążemy funkcje falową malejącą w przybliżeniu wykładniczo ze wzrostem  $x$ . Gdy wartość tej funkcji jest różna od zera dla  $x = d$  to łączy się ona płynnie z falą płaską w obszarze  $x > d$  co gwarantuje możliwość zaistnienia efektu tunelowego.

Przyjęty tu opis pozwala na określenie współczynników transmisji i odbicia określających prawdopodobieństwa tego iż cząstka o określonej energii przejdzie (odbije się) od bariery.

To że cząstka może przebywać w stanie o energii  $E < V_0$  można też rozumieć jako przejaw zasady nieoznaczoności Heisenberga dla energii i czasu gdyż czas przebywania cząstki w barierze jest skończony (czasu tego, który może być krótszy od ps nie można nawet w przybliżeniu określić posługując się do opisu cząstek fal płaskich, jak to czynimy na wykładzie).

**Współczynnik transmisji** definiujemy jako

$$T = \frac{|j_t(x \rightarrow \infty)|}{|j_p(x \rightarrow -\infty)|}$$

**Współczynnik odbicia** definiujemy jako

$$R = \frac{|j_r(x \rightarrow -\infty)|}{|j_p(x \rightarrow -\infty)|}$$

gdzie

$j_p$  -oznacza gęstość prądu prawdopodobieństwa dla fali opisującej cząstkę padającą z lewej strony na barierę potencjału poruszającą się w prawo w obszarze położonym na lewo od bariery ( $x < 0$ ).

$j_r$  -oznacza gęstość prądu prawdopodobieństwa dla fali opisującej cząstkę odbitą od bariery poruszającą się w lewo w obszarze o  $x < 0$ .

$j_t$  -oznacza gęstość prądu prawdopodobieństwa dla fali opisującej cząstkę, która przekroczyła barierę poruszającą się w prawo w obszarze o  $x > d$ .

$T$  określa prawdopodobieństwo tego iż cząstka przejdzie przez barierę potencjału , a  $R$  iż cząstka zawróci i zacznie poruszać się w kierunku przeciwnym w obszarze  $x < 0$ .  
Przy rozpatrywaniu strumienia cząstek padających opisywanych jednakowymi funkcjami falowymi  $T$  określa stosunek ilość cząstek przechodzących przez barierę potencjału do ilości cząstek padających na barierę.  $R$  określa stosunek ilości cząstek odbitych do ilości cząstek padających.

# Gęstość prądu prawdopodobieństwa

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \nabla \Psi^*(\vec{r}, t) \right)$$

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad \text{-gradient}$$

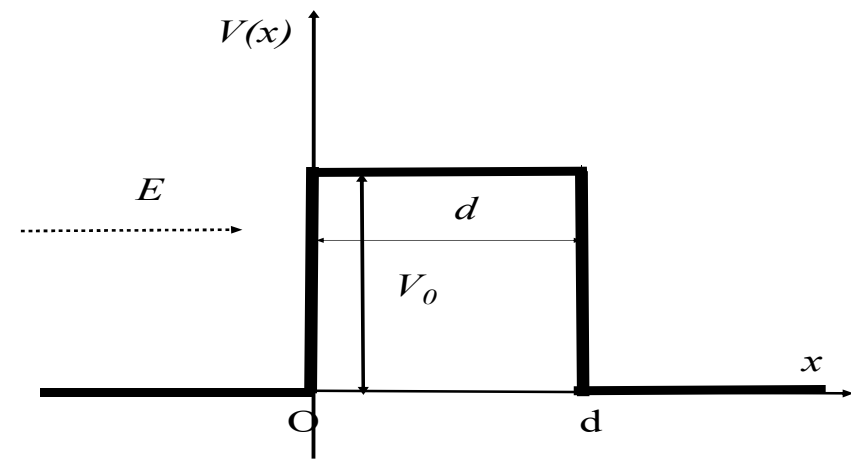
W przestrzeni jednowymiarowej

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^*(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} - \Psi(x, t) \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial x} \right)$$

Gęstość prądu prawdopodobieństwa jest wektorem i określa prędkość przepływu gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni. Np. moduł składowej x-owej tego wektora w danym punkcie jest wielkością proporcjonalną do prawdopodobieństwa transmisji cząstki przez infinitezymalnie małą płaską powierzchnię na której leży ten punkt, prostopadłą do osi Ox, w jednostce czasu. Znak tej składowej związany jest z kierunkiem transmisji cząstki. Dodatni znak oznacza iż transmisja następuje w kierunku wzrastających wartości x

$\Psi^*$  -  
funkcja  
zespolona  
sprzężona  
do funkcji  
falowej

Rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki o ustalonej energii  $E > 0$  w obszarze  $x < 0$  (na lewo od bariery) w którym  $V(x) = 0$  ma postać



$$\Psi_1(x, t) = A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) + B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) =$$

$$= \Psi_{1,p}(x, t) + \Psi_{1,r}(x, t)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Psi_{1p}(x, t) = A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

opisuje falę biegnącą w prawo  
(padającą na barierę)

$$\Psi_{1r}(x, t) = B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

opisuje falę biegnącą w lewo  
( odbitą od bariery)

Funkcja opisująca cząstkę o energii  $E > 0$  i pędzie  $p_x = \hbar k$  biegnącą w kierunku wyznaczonym przez zwrot osi Ox w obszarze stałego potencjału  $V=0$ :

$$\Psi_p(x, t) = A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

**Gęstość prądu prawdopodobieństwa dla cząstki opisanej powyższą funkcją falową jest dodatnia i wyraża się wzorem**

$$j_{1p} = \frac{\hbar}{2mi} \left[ \Psi_p^*(x, t) \frac{\partial \Psi_p(x, t)}{\partial x} - \Psi_p(x, t) \frac{\partial \Psi_p^*(x, t)}{\partial x} \right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left[ A^* \exp(-ikx) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) ik A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) - A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \cdot (-ik) \cdot A^* \exp(-ikx) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) \right] =$$

$$j_{1p} = \frac{\hbar}{2mi} [2ikA^* A] = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

Przy rozpatrywaniu strumienia cząstek opisywanych jednakowymi funkcjami falowymi gęstość prądu prawdopodobieństwa jest proporcjonalna do ilości cząstek przenikających przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku biegu cząstek w jednostce czasu

interpretacja klasyczna

$$j_{1p} = \frac{\hbar k}{m} \rho = \frac{p}{m} \rho = V \rho$$

$V$ -prędkość cząstek  
 $\rho$  -koncentracja cząstek (przy odpowiednim unormowaniu funkcji falowej)

Funkcja opisująca cząstkę o energii  $E > 0$  i pędzie  $p_x = -\hbar k$  biegnącą w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Ox w obszarze stałego potencjału  $V=0$ .

$$\Psi_{1r}(x, t) = B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

**Gęstość prądu prawdopodobieństwa dla cząstki opisanej powyższą funkcją falową jest ujemna i wyraża się wzorem**

$$\begin{aligned} j_{1r} &= \frac{\hbar}{2mi} \left[ \Psi_r^*(x, t) \frac{\partial \Psi_r(x, t)}{\partial x} - \Psi_r(x, t) \frac{\partial \Psi_r^*(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2mi} \left[ B^* \exp(ikx) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) (-ik) B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) - B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \cdot (ik) \cdot B^* \exp(ikx) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$j_{1r} = \frac{\hbar}{2mi} \left[ -2ik B^* B \right] = -\frac{\hbar k}{m} |B|^2$$



Rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki o ustalonej energii  $E > 0$  w obszarze  $x > d$  (na prawo od bariery) w którym  $V(x) = 0$  ma postać

$$\Psi_3(x, t) = F \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) + G \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = \\ = \Psi_{3,t}(x, t) + \Psi_{3,r}(x, t)$$

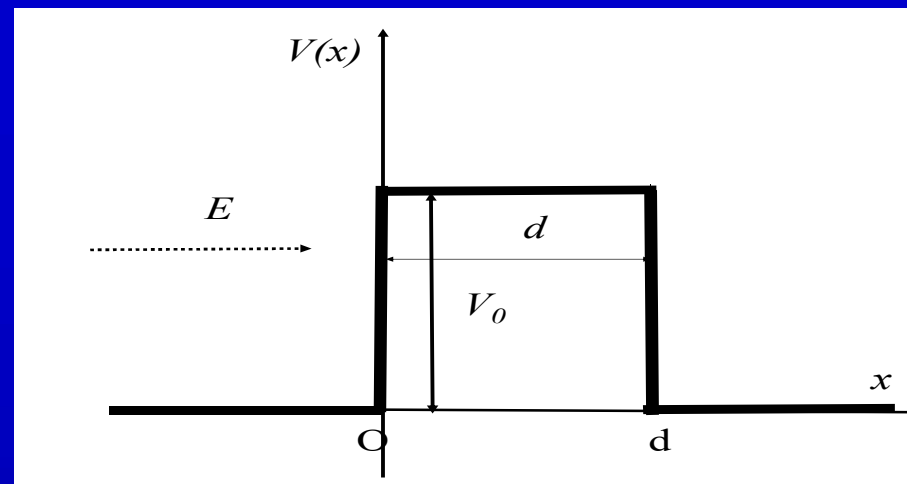
$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Ponieważ funkcja falowa ma opisywać falę biegnącą w prawo ( w obszarze leżącym na prawo od bariery cząstka nie może ulec odbiciu) to nie może zawierać wyrazu opisującego falę biegnącą w lewo. Z tego powodu przyjmujemy iż  $G=0$  i

$$\Psi_3(x, t) = \Psi_{3,t}(x, t) = F \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Gęstość prądu prawdopodobieństwa dla fali przechodzącej

$$j_{3t} = \frac{\hbar k}{m} |F|^2$$



Rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki o ustalonej energii  $E < V_0$  w obszarze bariery  $0 < x < d$  ( w którym  $V(x) = V_0 > E$ ) ma postać

$$\Psi_2(x, t) = [C \exp(\kappa x) + D \exp(-\kappa x)] \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Współczynnik  $C$  nie musi być równy zero gdyż szerokość bariery jest skończona i funkcja falowa w żadnym punkcie w barierze nie osiąga wartości nieskończonej

$$\Psi_1 = \Psi_{1,p} + \Psi_{1,r} = A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) + B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad x < 0$$

$$\Psi_2 = [C \exp(\kappa x) + D \exp(-\kappa x)] \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad 0 < x < d$$

$$\Psi_3 = \Psi_{3,t} = F \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad x > d$$

Znaleziona funkcja falowa i jej pochodna po zmiennej  $x$  musi być ciągła w punktach  $x=0$  oraz  $x=d$ , co prowadzi do układu czterech równań pozwalających na uzależnienie stałych  $B, C, D, F$  od stałej  $A$

## Współczynniki transmisji $T$ i odbicia $R$

$$T = \frac{|j_{3t}|}{|j_{1p}|} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |F|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \left| \frac{F}{A} \right|^2$$

$$R = \frac{|j_{1r}|}{|j_{1p}|} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

## Szczegółowe obliczenia współczynników $R$ i $T$

$$\Psi_1 = \Psi_{1,p} + \Psi_{1,r} = A \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) + B \exp(-ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad x < 0$$

$$\Psi_2 = [C \exp(\kappa x) + D \exp(-\kappa x)] \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad 0 < x < d$$

$$\Psi_3 = \Psi_{3,t} = F \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad x > d$$

Warunki ciągłości funkcji falowej i jej pochodnej po zmiennej przestrzennej przyjmują postać

$$\Psi_1(x=0) = \Psi_2(x=0) \quad (A+B) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) = (C+D) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad (1)$$

$$\frac{d\Psi_1}{dx}(x=0) = \frac{d\Psi_2}{dx}(x=0) \quad ik(A-B) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) = \kappa(C-D) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad (2)$$

$$\Psi_2(x=d) = \Psi_3(x=d) \quad (C \exp(\kappa d) + D \exp(-\kappa d)) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) = F \exp(ikd) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad (3)$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx}(x=d) = \frac{d\Psi_3}{dx}(x=d) \quad \kappa(C \exp(\kappa d) - D \exp(-\kappa d)) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) = ikF \exp(ikd) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad (4)$$

Po podzieleniu równań (1-4) przez czynnik  $\exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$  otrzymujemy układ równań

$$A + B = C + D \quad (1)$$

$$ik(A - B) = \kappa(C - D) \quad (2)$$

$$C \exp(\kappa d) + D \exp(-\kappa d) = F \exp(ikd) \quad (3)$$

$$\kappa(C \exp(\kappa d) - D \exp(-\kappa d)) = ikF \exp(ikd) \quad (4)$$

Dodając stronami równanie (1) pomnożone obustronnie przez  $ik$  oraz równanie (2) otrzymujemy  $2ikA = (ik + \kappa)C + (ik - \kappa)D$

czyli

$$A = \frac{(ik + \kappa)}{2ik} C + \frac{(ik - \kappa)}{2ik} D \quad (5)$$

Dodając stronami równanie (3) pomnożone obustronnie przez  $\kappa$  oraz równanie (4) otrzymujemy  $2\kappa \exp(\kappa d)C = (\kappa + ik)\exp(ikd)F$

czyli

$$C = \frac{(\kappa + ik)}{2\kappa} \exp(-\kappa d) \exp(ikd) F \quad (6)$$

Odejmując stronami od równania (3) pomnożonego obustronnie przez  $\kappa$  równanie (4) otrzymujemy  $2\kappa \exp(-\kappa d)D = (\kappa - ik)\exp(ikd)F$

czyli

$$D = \frac{(\kappa - ik)}{2\kappa} \exp(\kappa d) \exp(ikd) F \quad (7)$$

Wstawiając równania (6) i (7) do (5) otrzymujemy

$$\frac{A}{F} = \frac{\exp(ikd)}{4ik\kappa} \left[ (ik + \kappa)^2 \exp(-\kappa d) - (ik - \kappa)^2 \exp(\kappa d) \right].$$

$$\frac{A}{F} = \frac{\exp(ikd)}{4ik\kappa} \left[ (ik + \kappa)^2 \exp(-\kappa d) - (ik - \kappa)^2 \exp(\kappa d) \right].$$

$$\frac{A}{F} = \frac{\exp(ikd)}{4ik\kappa} \left[ (\kappa^2 - k^2) [\exp(-\kappa d) - \exp(\kappa d)] + 2ik\kappa [\exp(-\kappa d) + \exp(\kappa d)] \right]$$

Ponieważ

$$\exp(x) + \exp(-x) = 2 \cosh(x)$$

oraz

$$\exp(x) - \exp(-x) = 2 \sinh(x)$$

to

$$\frac{A}{F} = \frac{\exp(ikd)}{2ik\kappa} \left[ -(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa d) + 2i\kappa k \cosh(\kappa d) \right]$$

$$\frac{F}{A} = 2ik\kappa \exp(-ikd) \left[ 2i\kappa k \cosh(\kappa d) - (\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa d) \right]^{-1} \quad (8)$$

Współczynnik transmisji jest równy

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 \kappa^2}{4\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa d) + (\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

$$A + B = C + D \quad (1)$$

$$ik(A - B) = \kappa(C - D) \quad (2)$$

$$C = \frac{(\kappa + ik)}{2\kappa} \exp(-\kappa d) \exp(ikd) F \quad (6)$$

$$D = \frac{(\kappa - ik)}{2\kappa} \exp(\kappa d) \exp(ikd) F \quad (7)$$

Odejmując stronami od równania (1) pomnożonego obustronnie przez  $ik$  równanie (2) otrzymujemy

$$2ikB = (ik - \kappa)C + (ik + \kappa)D \text{ czyli}$$

$$B = \frac{(ik - \kappa)}{2ik} C + \frac{(ik + \kappa)}{2ik} D \quad (9)$$

Wstawiając równania (6) i (7) do (9) otrzymujemy

$$\frac{B}{F} = \frac{\exp(ikd)}{4ik\kappa} [(ik - \kappa)(\kappa + ik) \exp(-\kappa d) + (ik + \kappa)(\kappa - ik) \exp(\kappa d)].$$

Można to zapisać w postaci

$$\frac{B}{F} = \frac{\exp(ikd)}{4ik\kappa} (\kappa^2 + k^2) [\exp(\kappa d) - \exp(-\kappa d)]$$

$$\frac{B}{F} = \frac{\exp(ikd)}{2ik\kappa} (\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa d)$$

$$\frac{F}{B} = 2ik\kappa \exp(-ikd) [(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa d)]^{-1} \quad (10)$$

Dzieląc stronami równanie (8)  $\frac{F}{A} = 2ik\kappa \exp(-ikd) [2i\kappa k \cosh(\kappa d) - (\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa d)]^{-1}$  i (10) dostajemy

$$\frac{B}{A} = \frac{(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa d)}{2i\kappa k \cosh(\kappa d) - (\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa d)}$$

Z powyższej relacji wynika wzór na współczynnik odbicia

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}{4\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa d) + (\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)} \quad (11)$$

Współczynnik transmisji

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 \kappa^2}{4\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa d) + (\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

Współczynnik odbicia

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}{4\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa d) + (\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

$$\cosh(\kappa d) = \frac{1}{2} [\exp(\kappa d) + \exp(-\kappa d)]$$

$$\sinh(\kappa d) = \frac{1}{2} [\exp(\kappa d) - \exp(-\kappa d)]$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 \kappa^2}{4\kappa^2 k^2 + (\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}{4\kappa^2 k^2 + (\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

$$R + T = 1$$



Gdy  $\kappa d \gg 1$  to  $\cosh(\kappa d) = \frac{1}{2}[\exp(\kappa d) + \exp(-\kappa d)] \approx \frac{1}{2}\exp(\kappa d)$  oraz

$\sinh(\kappa d) = \frac{1}{2}[\exp(\kappa d) - \exp(-\kappa d)] \approx \frac{1}{2}\exp(\kappa d)$  i

$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{4\kappa^2k^2 \cosh^2(\kappa d) + (k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa d)} \approx \frac{4k^2\kappa^2}{4\kappa^2k^2 \cdot \frac{1}{4}\exp(2\kappa d) + (k^2 - \kappa^2)^2 \cdot \frac{1}{4}\exp(2\kappa d)}$$
$$= \frac{16k^2\kappa^2}{4\kappa^2k^2 + (k^2 - \kappa^2)^2} \exp(-2\kappa d) = \frac{16k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} \exp(-2\kappa d)$$

Gdy bariera nie jest bardzo niska i wąska to współczynnik transmisji dla cząstki o  $E < V_0$  jest znacznie mniejszy od 1 i maleje wykładniczo ze wzrostem grubości bariery

$$T \approx \frac{16k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} \exp(-2\kappa d)$$

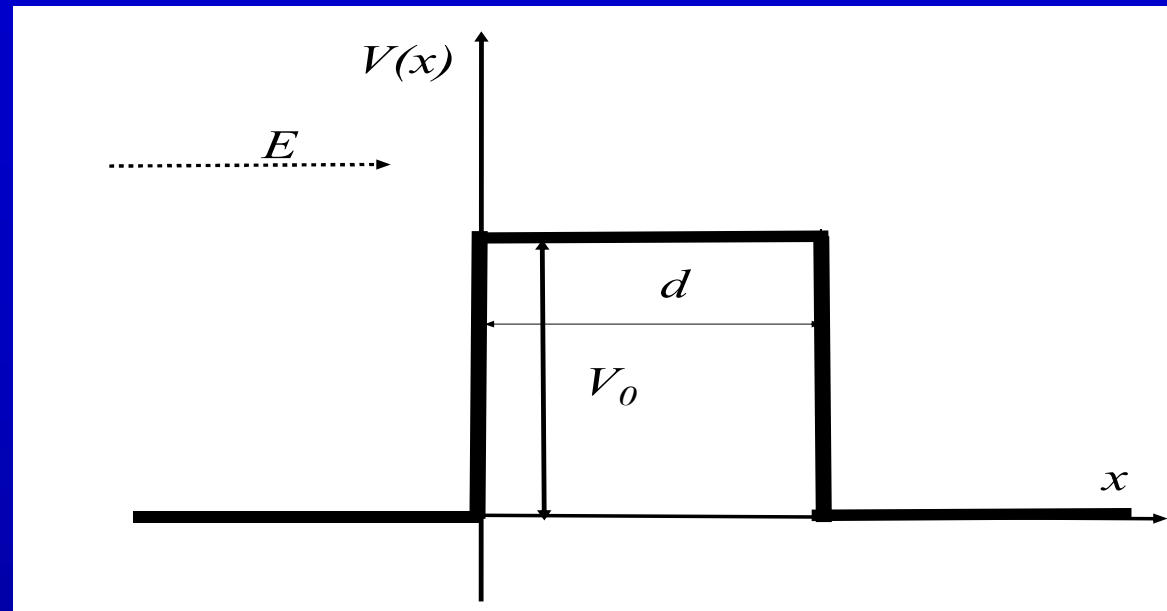
$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Współczynnik transmisji maleje także monotonicznie ze wzrostem wysokości bariery, wzrostem masy cząstki oraz zmniejszeniem jej energii. Dla cząstki klasycznej o  $E < V_0$  współczynnik transmisji byłby równy tożsamościowo zero.

# Transmisja cząstki nad barierą potencjału

Dla cząstki o  $E > V_0$  według mechaniki klasycznej współczynnik transmisji cząstki byłby równy tożsamościowo jedności. Według mechaniki kwantowej jest on niemonotoniczną funkcją szerokości i wysokości bariery.



Sposób wyprowadzenia wzoru na  $T$  analogiczny do opisanego przy tunelowaniu z tym że funkcja falowa w obszarze bariery ma postać

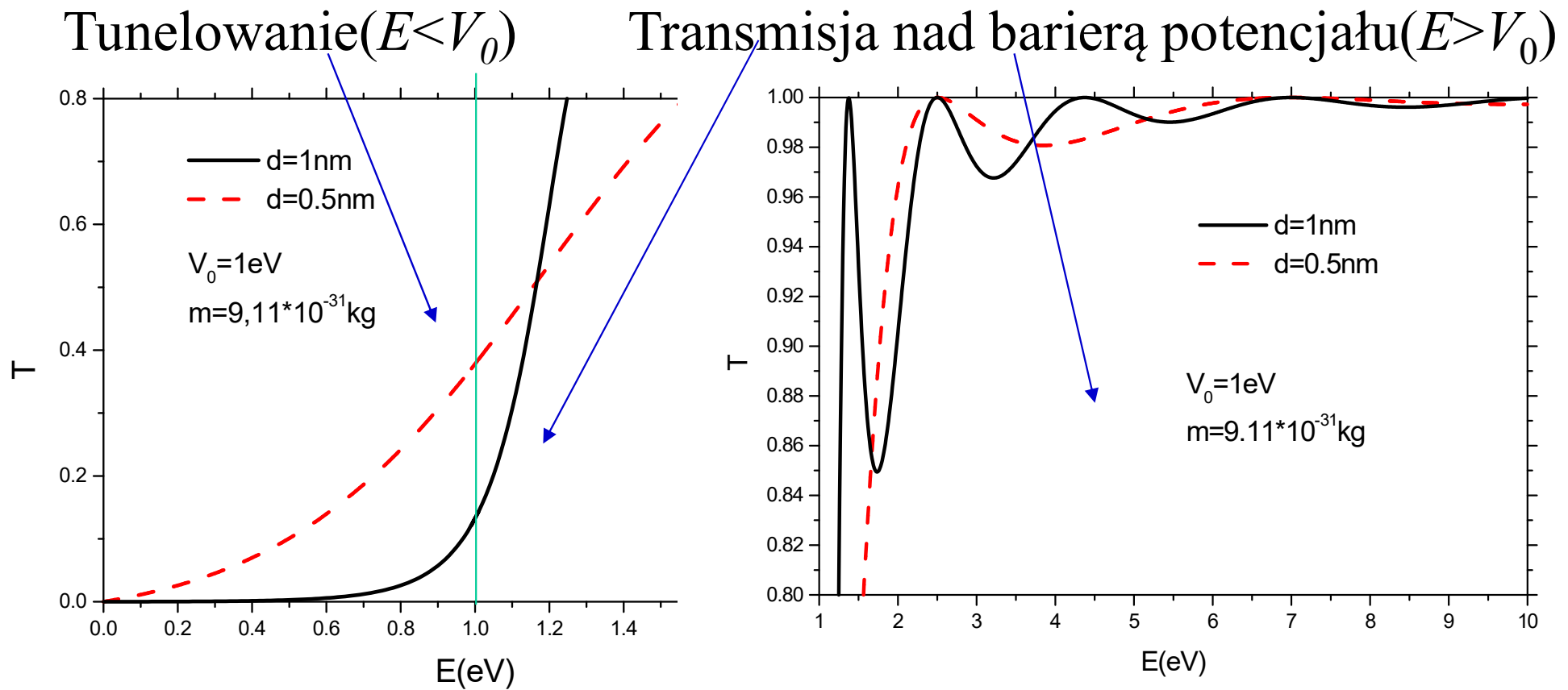
$$\Psi_2 = \left[ C \exp(ik_2x) + D \exp(-ik_2x) \right] \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

Po obliczeniach otrzymujemy

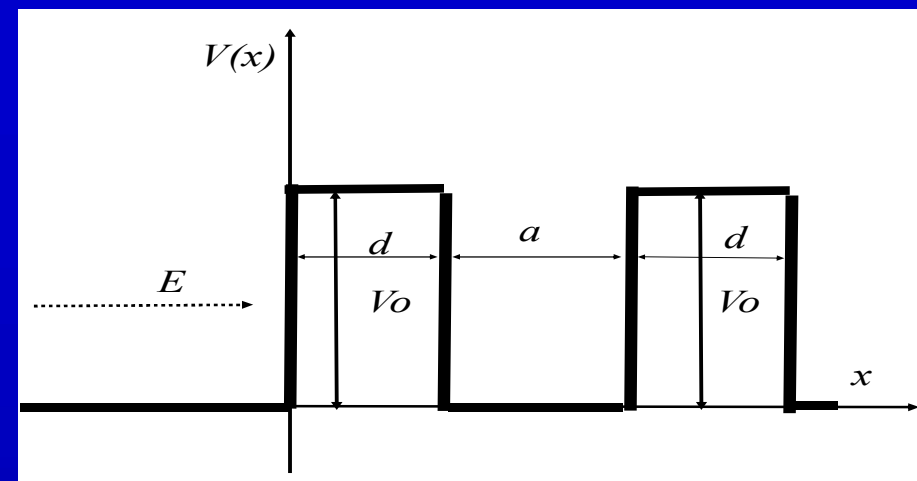
$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2k_2^2}{4k^2k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2d)}$$

# Zależność współczynnika transmisji od energii

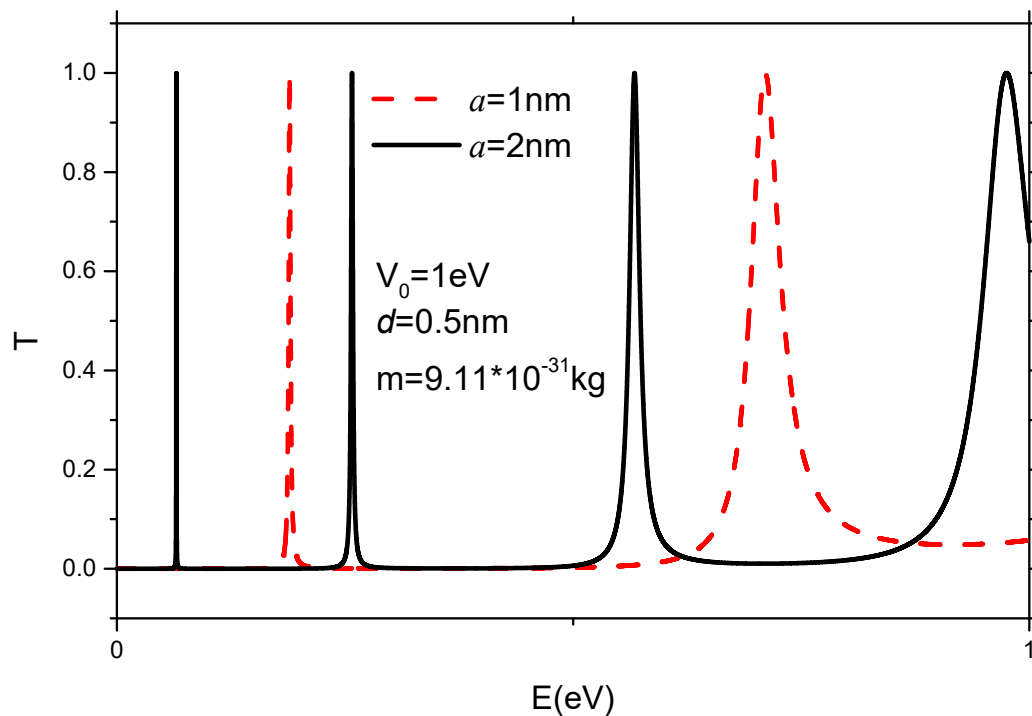


Gdy  $E > V_0$  to  $T$  może być równe 1 (pełna transmisja) gdy  $k_2 d = n\pi$  czyli uwzględniając to iż  $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$  wtedy gdy  $d = \frac{n\lambda_2}{2}$  ( $n$ -liczba naturalna) czyli długość progu potencjału jest równa wielokrotności połowy długości fali. Analogiczny efekt dla przypadku gdy barierę zastąpimy studnią ( $V_0 < 0$ ) prowadzi w układach trójwymiarowych do wyraźnego zmniejszenia prawdopodobieństwa rozproszenia elektronów o określonych energiach przez atomy gazów szlachetnych (efekt Ramsauera)

W przypadku tunelowania gdy  $E < V_0$  uzyskanie współczynnika transmisji równego  $T=1$  jest możliwe w przypadku tunelowania przez podwójną barierę potencjału



$$T = \left\{ 1 + \left( \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right)^2 \sinh^2(\kappa d) \left[ \cos(ka) \cosh(\kappa d) + \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right) \sin(ka) \sinh(\kappa d) \right]^2 \right\}^{-1}$$



$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

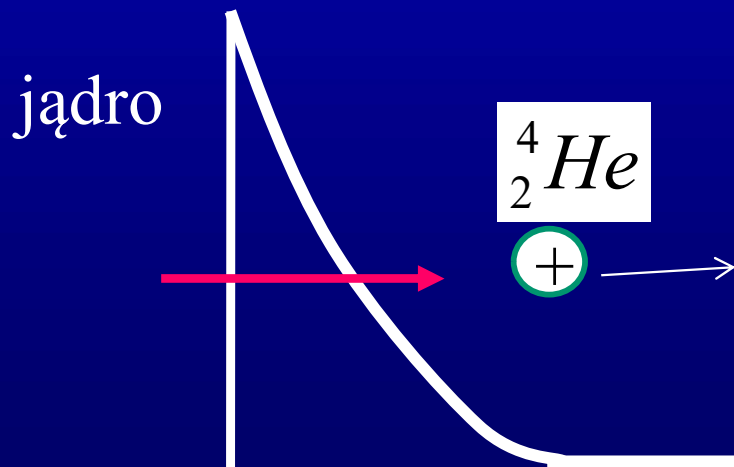
$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Tunelowanie rezonansowe z  $T=1$  występuje dla energii bliskich tym jakie posiadać by mogła cząstka umieszczona w studni potencjału pomiędzy barierami i jest związane z konstruktywną interferencją fal biegnących w przeciwnych kierunkach w obszarze studni kwantowej

# Efekt tunelowy w fizyce jądrowej

Efekt tunelowania tłumaczy możliwość wydostania się cząstki  $\alpha$  (podwójnie zjonizowanego atomu helu) z jądra w trakcie przemiany jądrowej  $\alpha$  (G. Gamow 1928). Szacuje się iż wysokość bariery potencjału wynikającej z oddziaływania kolumbowskiego cząstki z jądrem jest dla  $^{238}\text{U}$  nie mniejsza niż 8,8 MeV, podczas gdy energia cząstek  $\alpha$  opuszczających takie jądro może wynosić tylko 4,2 MeV. Wynika z tego iż zgodnie z klasyczną mechaniką cząstki te nie mogłyby opuścić jądra. Mogą one jednak opuścić jądro na skutek efektu tunelowego.

Od energii emitowanych cząstek bardzo silnie zależy prawdopodobieństwa tunelowania a tym samym emisji cząstki  $\alpha$  prowadzącej do rozpadu jądra, determinujące średni czas życia jąder promieniotwórczych (od  $10^{-6}\text{s}$  do  $10^{10}$  lat).



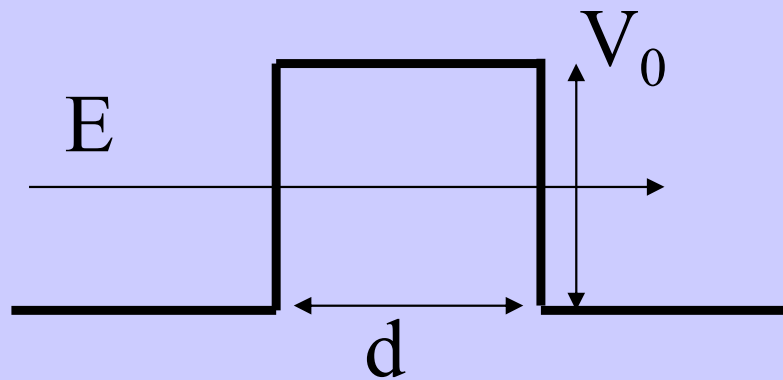
Efekt tunelowy zmniejsza energię niezbędną do zaistnienia syntezy jader lekkich pierwiastków niezbędną do pokonania ich elektrostatycznego odpychania.

# Tunelowanie przez barierę -prąd tunelowy

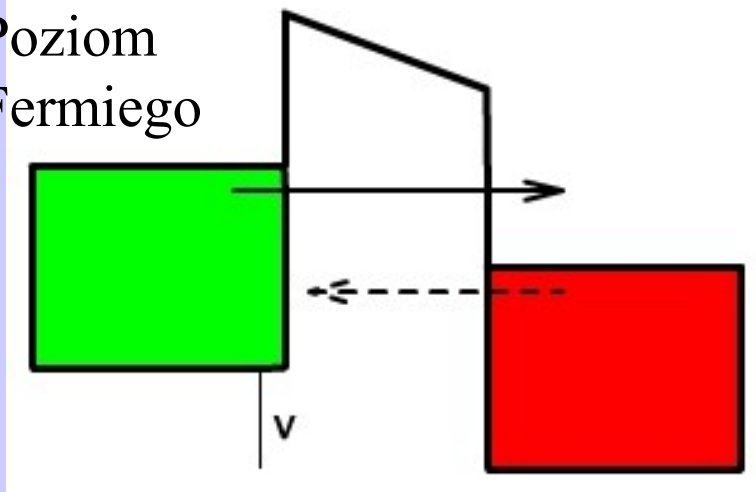
## Prawdopodobieństwo tunelowania

$$T \approx \frac{16k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} \exp(-2\kappa d)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$



Poziom  
Fermiego



Po przyłożeniu napięcia między dwoma przewodzącymi materiałami rozdzielonymi przez barierę potencjału (warstwę izolatora lub próżnię) płynie pomiędzy nimi prąd wtedy gdy bariera jest odpowiednio cienka ( $\sim 0,1-1$  nm). Główny wkład do prądu tunelowego wnoszą elektrony o najwyższych dozwolonych energiach w elektrodzie źródłowej znajdujących się poniżej poziomu Fermiego w tej elektrodzie (poziom ten oddziela stany obsadzone od nieobsadzonych w temperaturze  $T=0K$ ).

**Natężenie prądu tunelowego  $I$  jest bardzo czułe na zmianę grubości bariery (wzrost grubości o  $0,1\text{nm}$  zmniejsza prąd o rząd wielkości –zależność wykładnicza).**

Zależy ono także od gęstości stanów w obu elektrodach w zakresie energii leżącej pomiędzy poziomami Fermiego w obu elektrodach, która w przypadku elektrod ferromagnetycznych zależy od ustawienia momentów magnetycznych elektrod.





# metody badania powierzchni

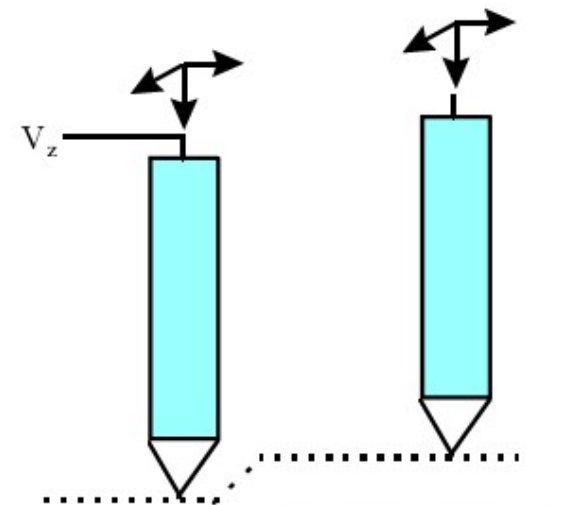
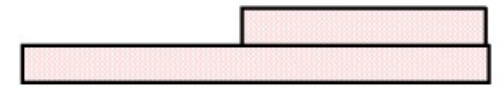
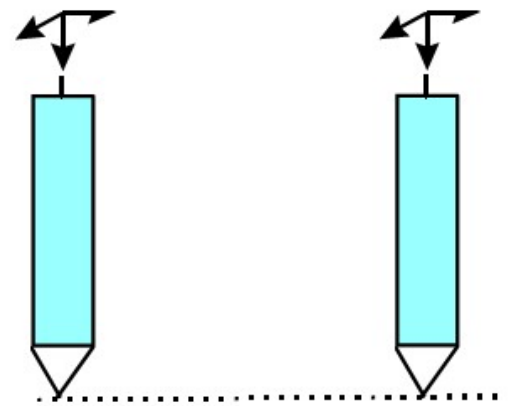
1) metoda stałej wysokości – położenie końcówki skanującej się nie zmienia, niewielka zmiana odległości między igłą a atomami próbki prowadzi do znaczącej zmiany natężenia prądu.

2) metoda stałego prądu – stała szerokość bariery potencjału

Metoda użyteczna przy badaniu powierzchni nieregularnych, w celu zachowania stałego natężenia prądu zmieniamy położenie igły, które to położenie informuje nas o badanej powierzchni

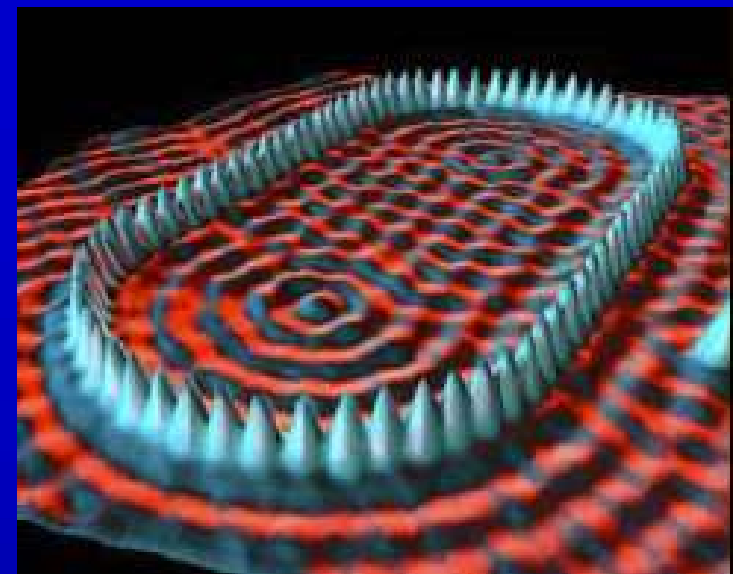
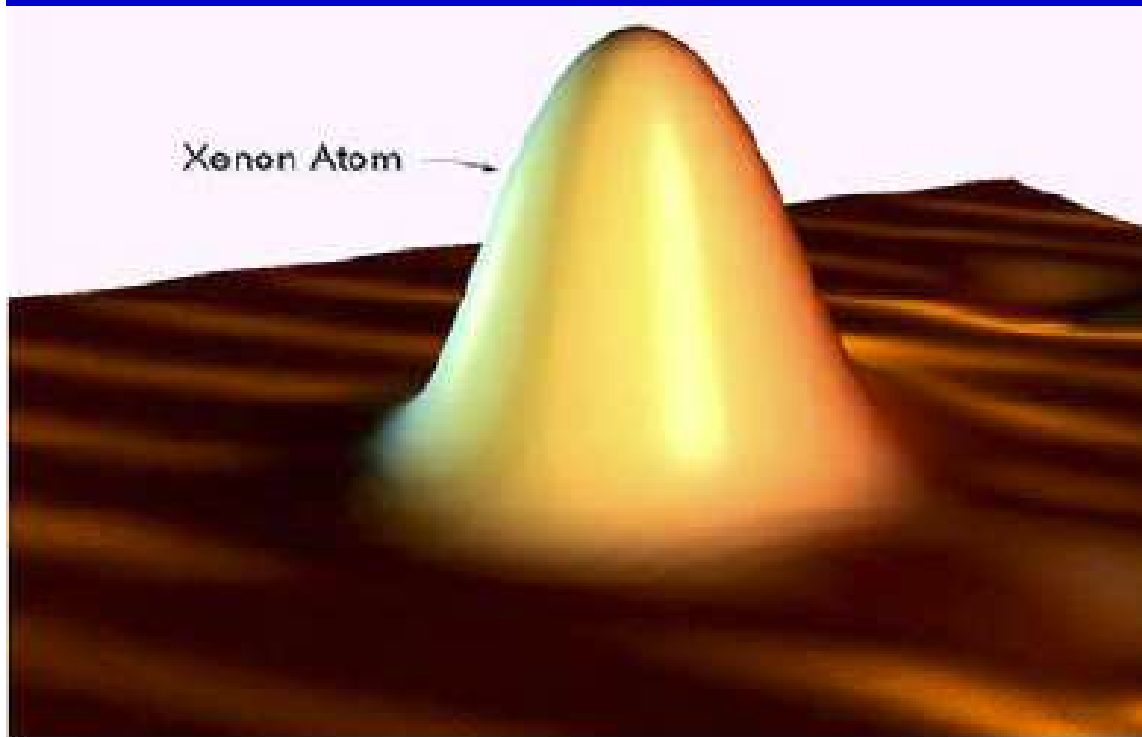
Uchwyt igły mikroskopu wykonany jest z materiałów piezoelektrycznych zmieniających kształt pod wpływem przyłożonego napięcia, co pozwala na precyzyjne ustalenie położenia igły. W celu wykonania pomiarów niezbędne jest tłumienie drgań uchwytu wywołanych np. przez fale akustyczne czy drganie podłoża na którym stoi mikroskop.

W celu określenia gęstości stanów elektronowych bada się wpływ napięcia na prąd przy ustalonym położeniu igły.





# STM – kształt powierzchni



Atomy Fe na Cu

*STM image of a Single-Wall Carbon Nanotube*



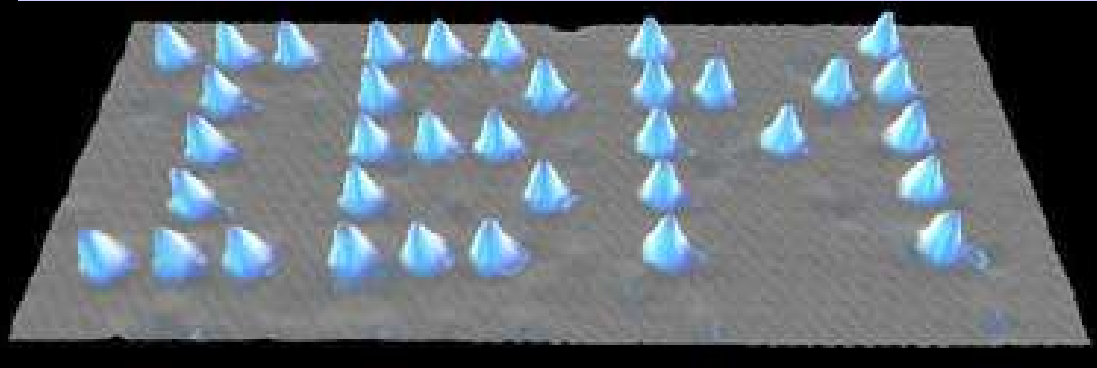
**Nanorurka węglowa**



Powierzchnia kryształu miedzi

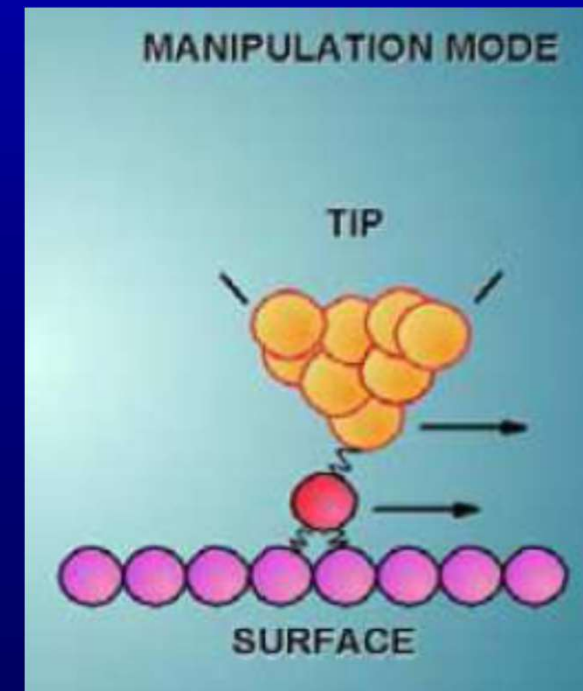
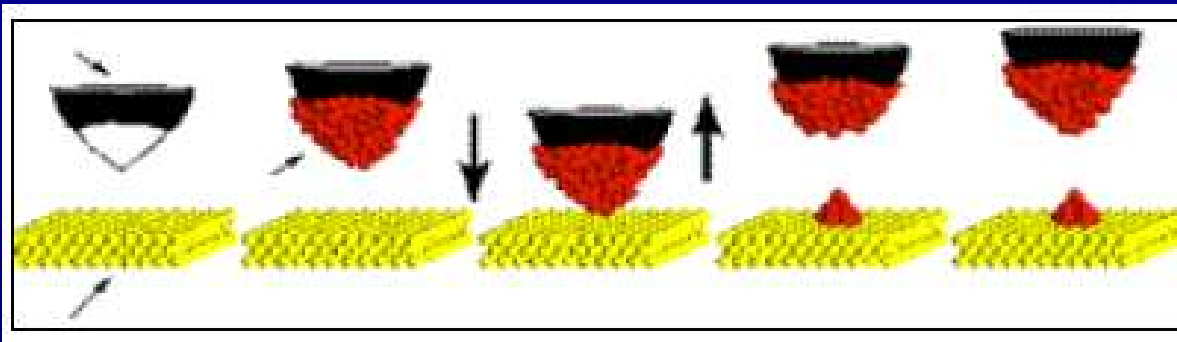
# STM – manipulacja atomami

Przy zastosowaniu silnego (impulsowego) pola elektrycznego możliwy jest przeskok atomu z powierzchni do igły i odwrotnie co pozwala na zastosowanie do przenoszenia atomów.



Xe on Ni(110) at 4 .  
The first atom-by-atom  
manipulation  
See Nature 344 (1990)  
524-526

<http://researcher.watson.ibm.com>

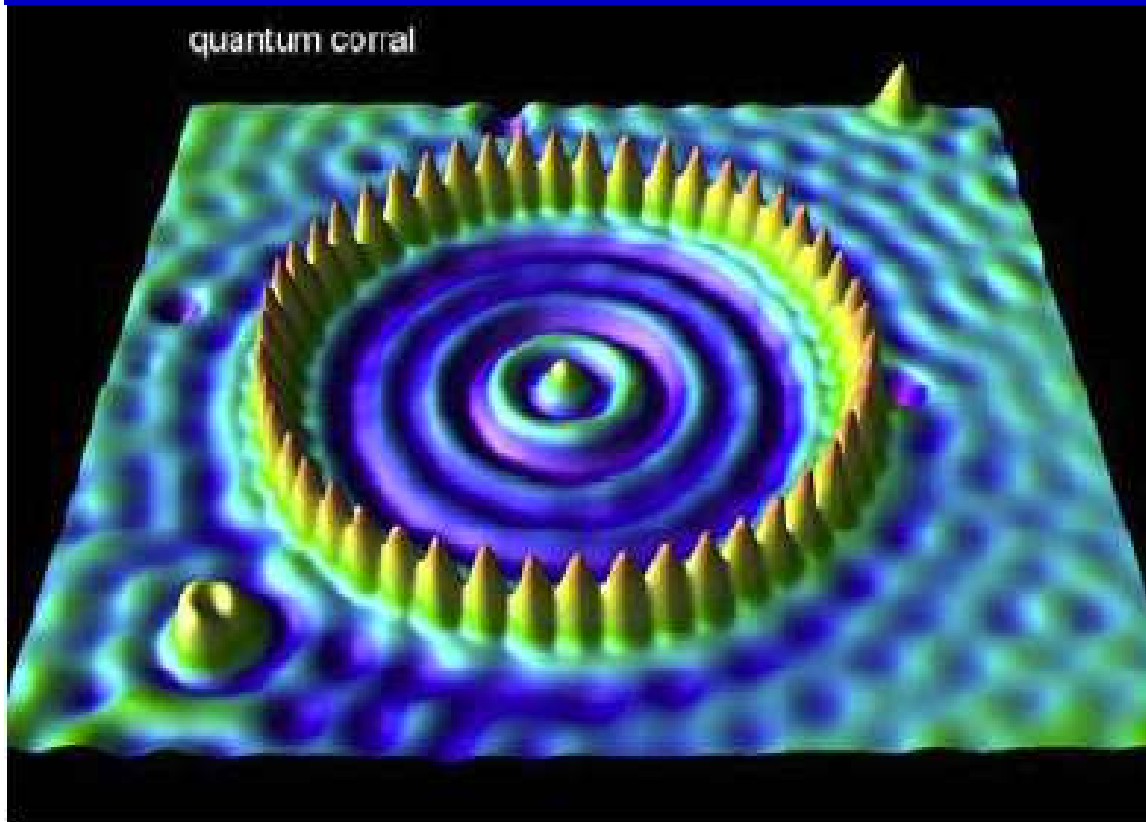


Nanolitografia

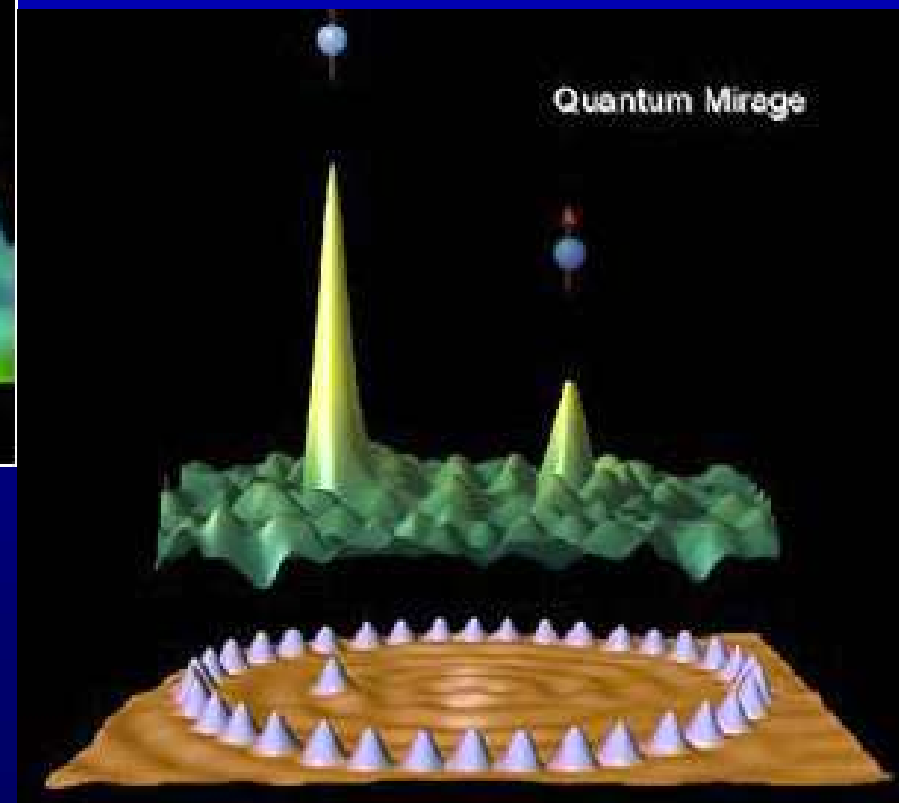
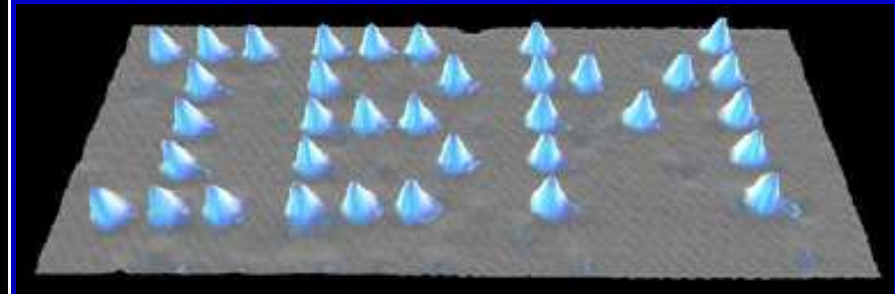
# STM – manipulacja atomami

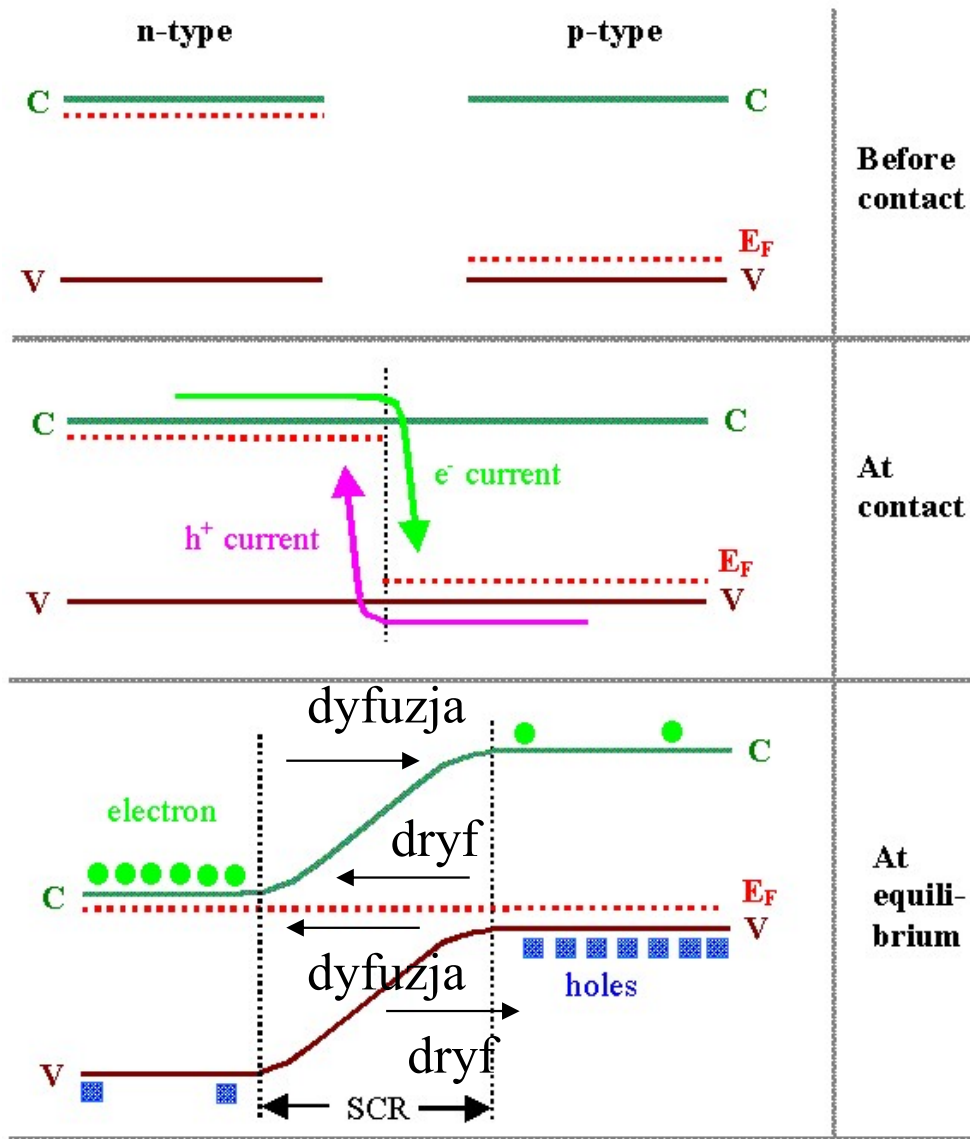
<http://physics.stackexchange.com>

<http://researcher.watson.ibm.com>



Zagroda kwantowa utworzona w  $T=4\text{K}$  z 48 atomów żelaza ustawionych na obwodzie koła o promieniu około 7nm na podłożu utworzonym z atomów miedzi



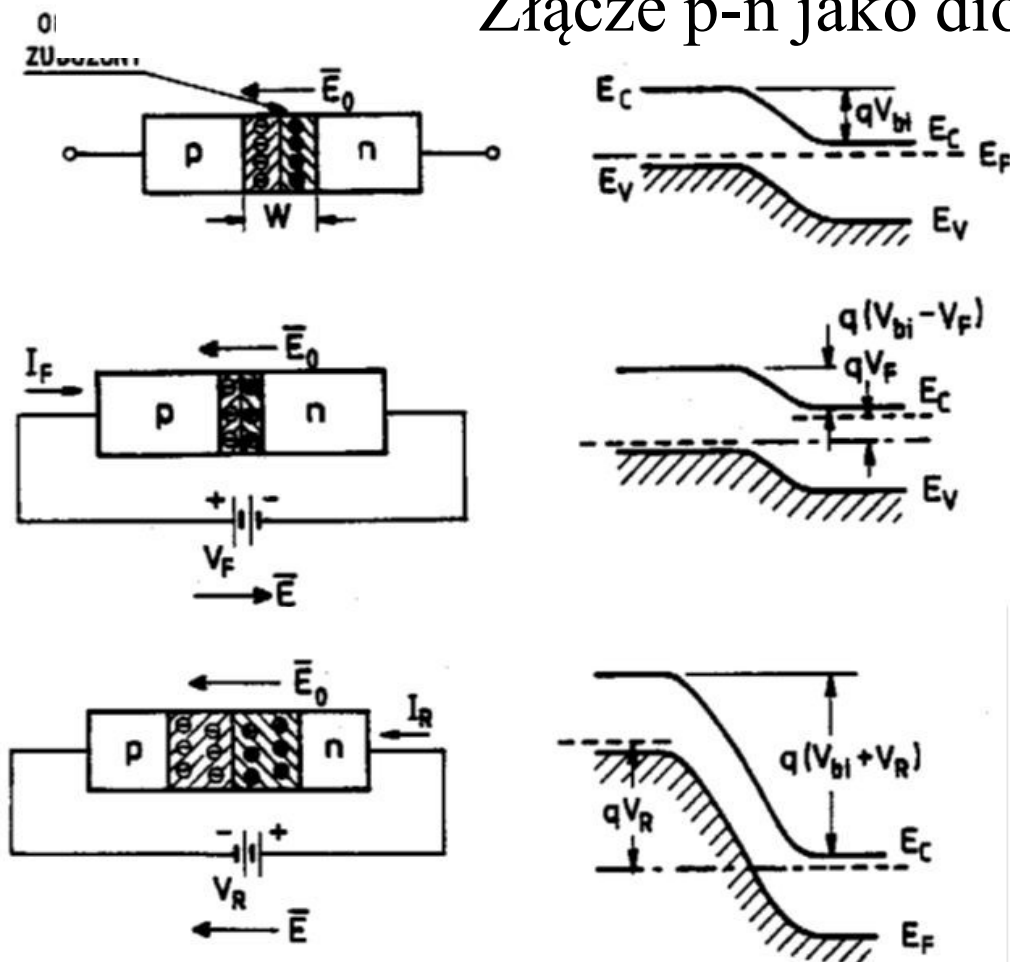


**Złącze *p-n*** jest utworzone z dwóch półprzewodników z których jeden (typu *n*) jest domieszkowany atomami będącymi źródłem dodatkowych elektronów, a drugi (typu *p*) atomami przewodzącymi do pojawienia się dziur. Elektrony nie mogą zajmować stanów o energiach z zakresu ( $E_v, E_c$ ) leżących w przerwie energetycznej. Po połączeniu półprzewodników część elektronów przepływa na drodze dyfuzji z materiału typu *n* do *p*, a część dziur przepływa z materiału typu *p* do *n*, co prowadzi także do zagięcia się dna pasma przewodnictwa *c* i wierzchołka pasma walencyjnego *v* na interfejsie i ustalenia jednego położenia poziomu Fermiego  $E_F$  w układzie

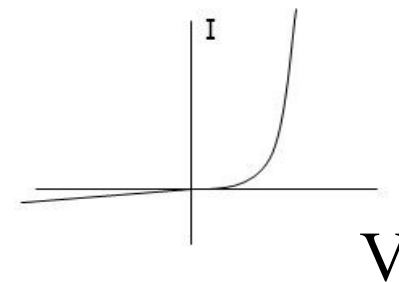
W pobliżu interfejsu półprzewodnik typu *p* ładują się ujemnie, a półprzewodnik typu *n* ładuje się dodatnio. Powstałe pole elektryczne prowadzi do zmniejszenia prądu dyfuzji, który jest równoważony przez prąd dryfu elektronów i dziur powstających odpowiednio w obszarze *p* i *n* na skutek generacji termicznej. Wypadkowy prąd płynący przez złącze jest równy zero.



# Złącze p-n jako dioda półprzewodnikowa



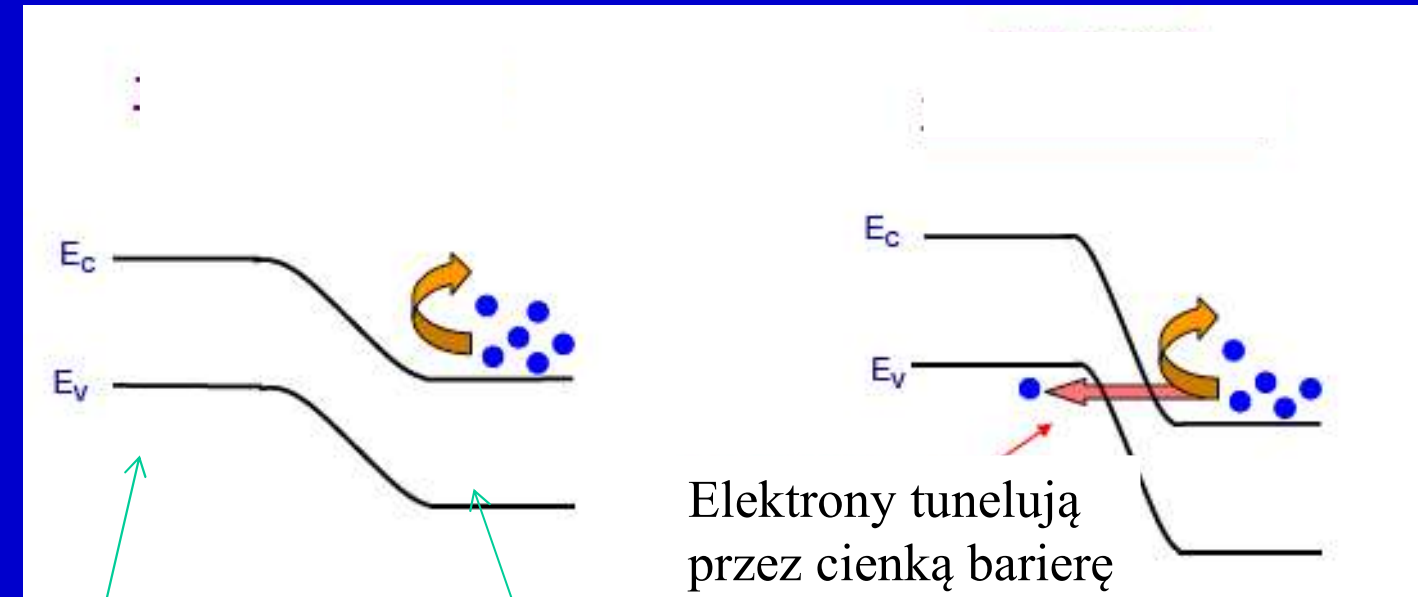
charakterystyka IV:



Mirosława Koziński

Po przyłożeniu do półprzewodnika typu  $p$  dodatniego napięcia następuje zmniejszenie spadku potencjału na złączu co prowadzi do wykładniczego wzrostu natężenia prądu dyfuzyjnego, który staje się znacznie większy od prądu dryfu, co prowadzi do przepływu znaczącego prądu przez złącze. Po przyłożeniu napięcia o przeciwnej polaryzacji następuje wzrost różnicy potencjałów na złączu, co prowadzi do nieznacznego spadku natężenia prądu dyfuzyjnego, przy braku istotnej zmiany natężenia prądu dryfu. Przez złącze nie płynie znaczący prąd.

# Dioda tunelowa oparta na złączu $p$ - $n$

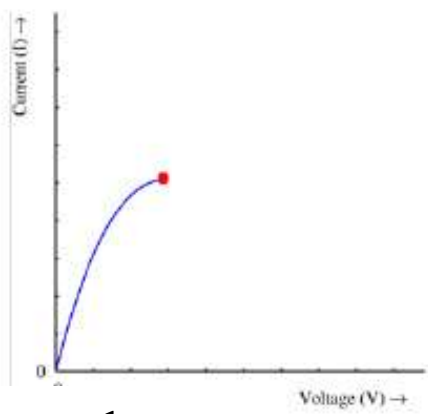
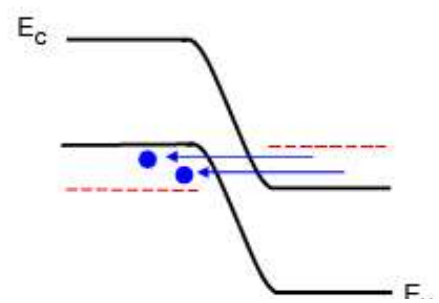
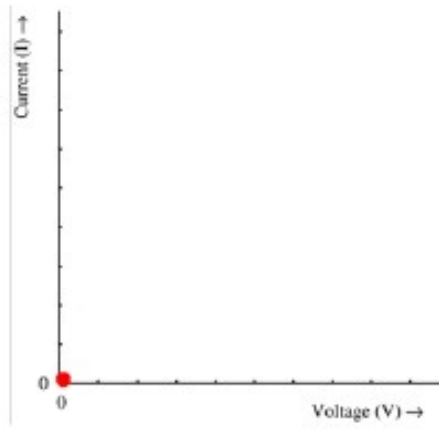
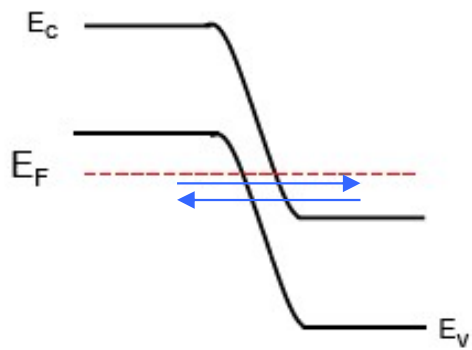


półprzewodnik  
typu  $p$

półprzewodnik  
typu  $n$

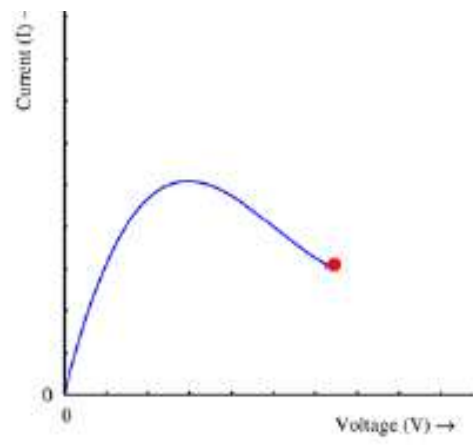
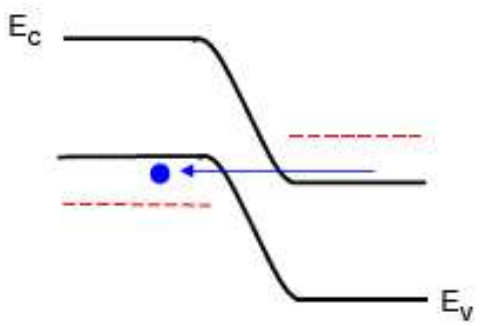
W złączu mogącym pełnić role diody tunelowej wierzchołek pasma walencyjnego  $E_v$  w półprzewodniku typu  $p$  jest położony wyżej niż dno pasma przewodnictwa  $E_c$  w półprzewodniku typu  $n$ . Dzięki temu jest możliwe tunelowanie elektronów pomiędzy pasmem przewodnictwa półprzewodnika typu  $n$  i pasmem walencyjnym półprzewodnika typu  $p$

Przy braku napięcia przyłożonego do złącza jednakowa liczba elektronów tuneluje w obu kierunkach i prąd nie płynie. Po przyłożeniu skończonego napięcia występuje zakres energii dla którego elektrony które mogą tunelować występują głównie w jednym półprzewodniku i natężenie prądu jest maksymalne. Przy dalszym wzroście napięcia maleje liczba elektronów które mogą tunelować pomiędzy półprzewodnikami co prowadzi do spadku natężenia prądu.



Maksymalny prąd tunelowy

8

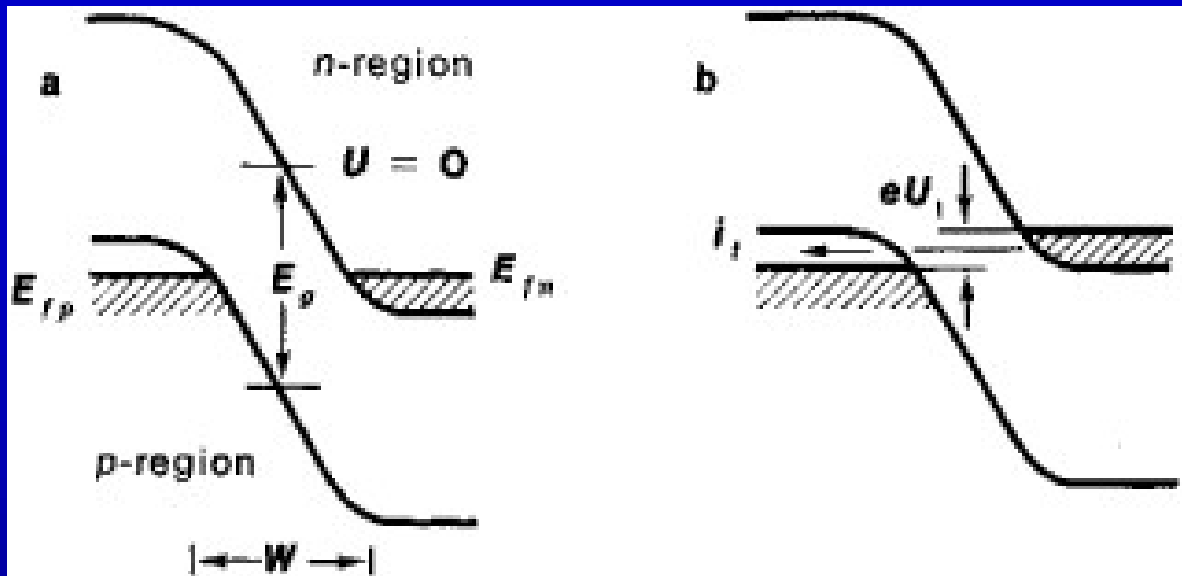


Prąd tunelowy maleje

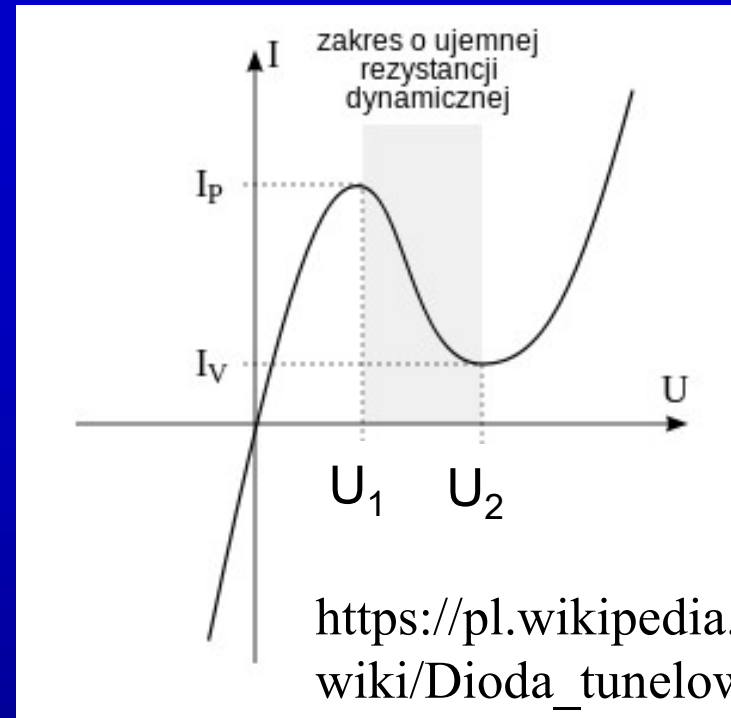
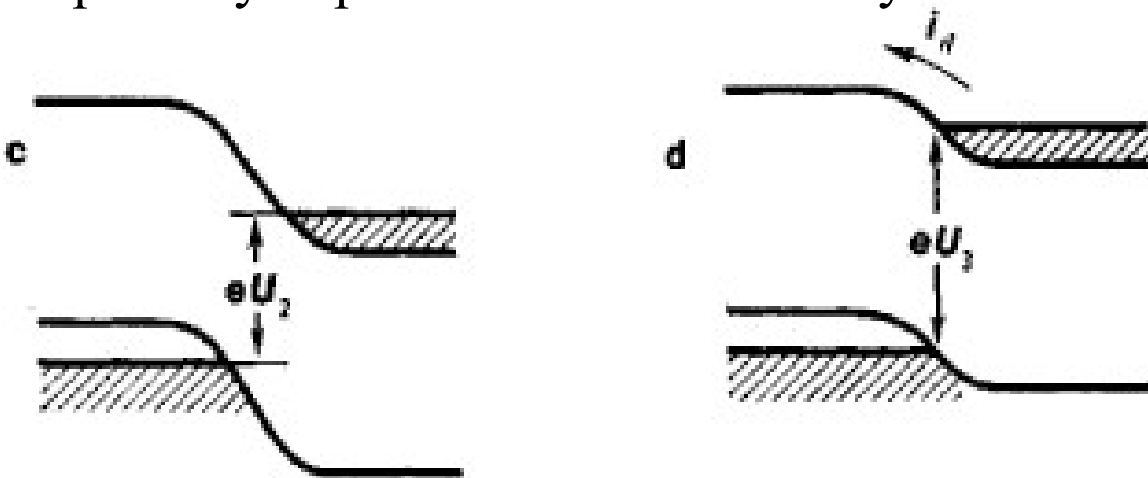
..... poziom Fermiego -energia oddzielająca stany obsadzone ( o niższych energiach) od nieobsadzonych ( o wyższych energiach) w  $T=0K$

# Złącze *p-n* jako dioda tunelowa

$$U=V$$



<http://encyclopedia2.thefreedictionary.com>



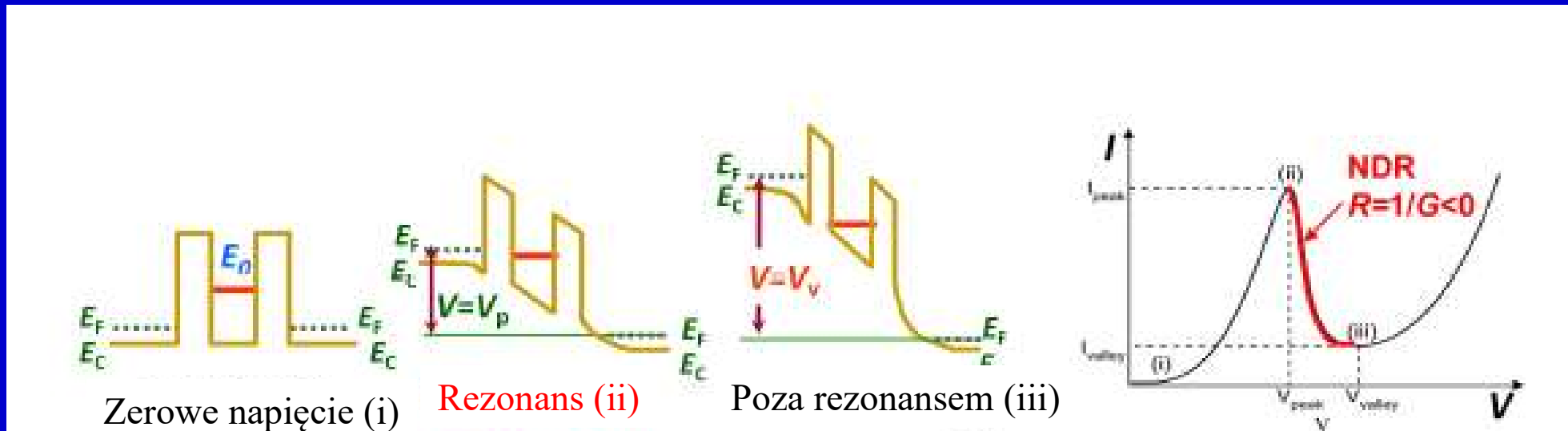
[https://pl.wikipedia.org/wiki/Dioda\\_tunelowa](https://pl.wikipedia.org/wiki/Dioda_tunelowa)

Przy wzroście napięcia można zaobserwować spadek natężenia prądu (ujemny opór różniczkowy)

Diody tunelowe można wykorzystać np. do przeprowadzenia szybkich operacji logicznych, w układach przełączających, oscylatorach o częstościach rzędu nawet  $10^{11}$  Hz.



# Tunelowa dioda rezonansowa oparta na podwójnej barierze potencjału



Przy wzroście napięcia można zaobserwować spadek natężenia prądu (ujemny opór różniczkowy) wynikający z obniżenia w skali energii położenia poziomego rezonansowego (energii dla której obserwuje się silne podwyższenie współczynnika transmisji elektronu). Maksymalny prąd płynie gdy poziom ten leży tuż poniżej poziomu Fermiego w lewej elektrodzie. Najsilniejszy spadek natężenia prądu występuje gdy poziom ten lokalizuje się poniżej dna pasma w lewej elektrodzie i przestaje być aktywny w tunelowaniu.

## Przykładowe pytania opisowe

Na czym polega efekt tunelowy? Jak można go wyjaśnić wykorzystując pojęcie funkcji falowej związanej z cząstką kwantową? Jakie są podstawowe własności zjawiska tunelowego? W szczególności określić jaką w przybliżeniu postać ma w złączach tunelowych z grubymi barierami zależność współczynnika transmisji od grubości bariery?

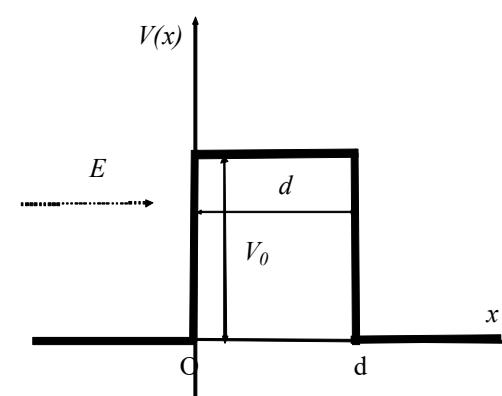
W jakich złączach tunelowych i kiedy jest możliwe osiągnięcie przez współczynnik transmisji wartości równej 1.

Omówić własności wybranych zjawisk fizycznych, które można wyjaśnić odwołując się do efektu tunelowego. Wymienić przykładowe urządzenia, których działanie jest oparte na efekcie tunelowym i omówić nieco bliżej jedno z nich ( np. omówić działanie mikroskopu tunelowego).

## Przykładowe pytania szczegółowe

1) Cząstka o energii  $E$  mniejszej od wysokości bariery potencjału ( $0 < E < V_0$ ) pada z lewej strony na barierę potencjału o szerokości  $d$  i wysokości  $V_0$  pokazaną na rysunku opisaną potencjałem:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ V_0 & \text{dla } 0 < x < d \\ 0 & \text{dla } x > d \end{cases}$$



Które z poniższych funkcji można wykorzystać do wyznaczenia funkcji falowej cząstki:

- a) padającej z lewej strony na barierę potencjału poruszającej się w prawo w obszarze  $x < 0$
- b) odbitej od tej bariery potencjału poruszającej się w lewo w obszarze  $x < 0$
- c) przenikającej przez obszar bariery potencjału w obszarze  $0 < x < d$
- d) poruszającej się w prawo w obszarze leżącym na prawo od bariery potencjału czyli dla  $x > d$  która przeniknęła przez barierę

$$1) \psi(x) = A \exp(ikx) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

$$2) \psi(x) = B \exp(-ikx) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

$$3) \psi(x) = [C \exp(ikx) + D \exp(-ikx)] \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

$$4) \psi(x) = [C \exp(\kappa x) + D \exp(-\kappa x)] \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

$$5) \psi(x) = F \exp(ikx) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

$$6) \psi(x) = F \exp(\kappa x) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$$

gdzie  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$        $\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

Dla każdego obszaru wybrać jedną z podanych wyżej funkcji (niektóre funkcje mogą pasować do kilku obszarów).

Ad a) (1), (2), (3), (4), (5), (6)

Ad b) (1), (2), (3), (4), (5), (6)

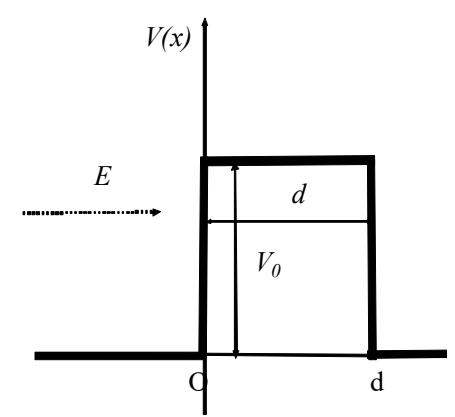
Ad c) (1), (2), (3), (4), (5), (6)

Ad d) (1), (2), (3), (4), (5), (6)

**Zapisać warunki wiążące ze sobą stałe występujące w wybranych funkcjach, które trzeba nałożyć na te funkcje, aby określić współczynnik transmisji cząstki padającej z lewej strony na**

2a) Cząstka o energii  $E < V_0$  pada z lewej strony na barierę potencjału o szerokości  $d$  i wysokości  $V_0$  pokazaną na rysunku opisaną potencjałem:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ V_0 & \text{dla } 0 < x < d \\ 0 & \text{dla } x > d \end{cases}$$



Który z poniższych zestawów wzorów można wykorzystać do wyznaczenia współczynnika transmisji cząstki  $T$  przez barierę potencjału oraz odbicia cząstki  $R$  od tej bariery

a) 
$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{4\kappa^2k^2 + (\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

$$R = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}{4\kappa^2k^2 + (\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

b) 
$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{4\kappa^2k^2 + (\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

$$R = \frac{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}{4\kappa^2k^2 + (\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$$

c) 
$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{4\kappa^2\kappa^2 + (k^2 - \kappa^2)^2 \sin^2(\kappa d)}$$

$$R = \frac{(\kappa^2 - k^2)^2 \sin^2(\kappa d)}{4\kappa^2k^2 + (\kappa^2 - k^2)^2 \sin^2(\kappa d)}$$

d) 
$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{4\kappa^2\kappa^2 + (k^2 - \kappa^2)^2 \sin^2(\kappa d)}$$

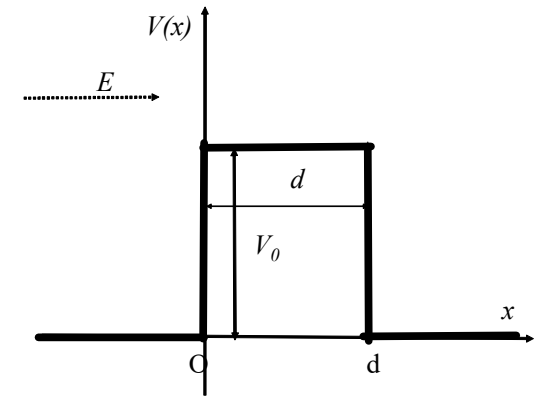
$$R = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sin^2(\kappa d)}{4\kappa^2k^2 + (\kappa^2 - k^2)^2 \sin^2(\kappa d)}$$

gdzie  $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ,  $\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ ,  $\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$ .

Zaznaczyć poprawną odpowiedź.

2b) Cząstka o energii  $E > V_0$  pada z lewej strony na barierę potencjału o szerokości  $d$  i wysokości  $V_0$  pokazaną na rysunku opisaną potencjałem:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ V_0 & \text{dla } 0 < x < d \\ 0 & \text{dla } x > d \end{cases}$$



Który z poniższych zestawów wzorów można wykorzystać do wyznaczenia współczynnika transmisji cząstki  $T$  nad tą barierą potencjału oraz odbicia cząstki  $R$  od tej bariery

a) 
$$T = \frac{4k^2 k_2^2}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}$$

$$R = \frac{(k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}$$

b) 
$$T = \frac{4k^2 k_2^2}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}$$

$$R = \frac{(k^2 + k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 d)}$$

c) 
$$T = \frac{4k^2 k_2^2}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}$$

$$R = \frac{(k^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}$$

d) 
$$T = \frac{4k^2 k_2^2}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}$$

$$R = \frac{(k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}{4\kappa^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 d)}$$

gdzie  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ,  $\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ ,  $\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$ .

Zaznaczyć poprawną odpowiedź.

3) Które z poniższych stwierdzeń są stwierdzeniami prawdziwymi?

- a) Prawdopodobieństwo tunelowania cząstki o energii mniejszej od wysokości bariery potencjału przez pojedynczą barierę potencjału może być równe 1.
- b) Prawdopodobieństwo transmisji cząstki o energii mniejszej od wysokości bariery potencjału przez pojedynczą niezbyt cienką barierę potencjału maleje wykładniczo ze wzrostem grubości bariery.
- c) Suma współczynników transmisji cząstki przez barierę potencjału  $T$  i odbicia cząstki od tej bariery potencjału  $R$  jest zawsze równa 1.
- d) Współczynnik transmisji cząstki przez podwójną barierę potencjału może być równy 1.
- e) Współczynnik transmisji cząstki przez podwójną barierę potencjału maleje monotonicznie ze wzrostem odległości między barierami potencjału tworzącymi podwójną barierę potencjału.

4) Z czym wiąże się wysoka rozdzielczość skaningowego mikroskopu tunelowego?

- a) z silną zależnością współczynnika transmisji przez barierę potencjału od grubości bariery przez którą zachodzi tunelowanie
- b) rezonansowym tunelowaniem elektronów przez podwójną barierę potencjału
- c) występowaniem ujemnego oporu różnicowego
- d) zjawiskiem Ramsauera

Zaznaczyć poprawną odpowiedź spośród podanych powyżej.

4) W których z poniższych układów można obserwować wyraźnie ujemny opór różniczkowy ?

- a) W tunelowaniu elektronów pomiędzy dwoma metalami rozdzielonymi izolatorem pełniącym rolę pojedynczej bariery potencjału
- b) W tunelowaniu elektronów i dziur pomiędzy pasmem walencyjnym i przewodnictwa w silnie domieszkowanym półprzewodnikowym złączu n-p
- c) W przepływie prądu w złączu n-p wynikającym z przepływu elektronów pomiędzy pasmami przewodnictwa obu półprzewodników
- d) W tunelowaniu elektronów poprzez podwójną barierę potencjału pomiędzy dwoma metalami

Zaznaczyć 2 poprawne odpowiedzi spośród podanych powyżej.