Równania Lagrange’a II rodzaju

Korzyści wynikające ze sformułowania równań ruchu przy wykorzystaniu równań Lagrange'a II rodzaju

1) Równania Lagrange'a II rodzaju stwarzają możliwość łatwego sformułowania równań ruchu dla pojedynczego punktu materialnego i układu punktów materialnych przy wykorzystaniu do opisu położenia punktów materialnych tzw. współrzędnych uogólnionych, które można wybrać na wiele sposobów. Umiejętny ich dobór niekiedy decyduje o możliwości łatwego rozwiązania równań ruchu.

   Gdy można za te współrzędne przyjąć współrzędne w układzie krzywoliniowym do sformułowania równań ruchu nie jest konieczna znajomość rozkładu wektora przyspieszenia na składowe w układzie krzywoliniowym. Najłatwiej jest sformułować równania ruchu w przypadku gdy wszystkie działające siły są potencjalne.

2) W przypadku analizy punktu materialnego lub układu takich punktów na ruch których nałożone są więzy równania ruchu wynikające z równań Lagrange'a II rodzaju rozwiązuje się bez konieczności uwzględnienia warunków wynikających z równań więzów. Ponadto nie zawierają one sił reakcji.

Poszukiwanie równań Lagrange'a II rodzaju

Rozważamy ogólny przypadek układu złożonego z n punktów materialnych, na który nałożono p więzów holonomicznych dwustronnych. W przypadku ruchu punktów w przestrzeni trójwymiarowej układ jest reprezentowany w $3n$ przestrzeni konfiguracyjnej przez punkt obraz, którego położenie dane jest wektorem $3n$-wymiarowym $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}\right)$ a równania więzów można zapisać w postaci równań $f_k(x,t) = 0$ gdzie $k=1,\ldots..,p$

Współrzędne uogólnione - zmienne niezależne takie że każdemu zespołowi ich wartości odpowiada jednoznacznie pewne położenie układu zgodne z więzami. Ilość współrzędnych uogólnionych jest równa ilości stopni swobody *f* (dla ruchu *n* punktów w przestrzeni 3DIM na który nałożono *p* więzów *f=3n-p*)

$$x_j = x_j\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, t\right) = x_j(q,t), \quad j = 1,2,\ldots,3n$$

$$q = \left(q_1, q_2, \ldots, q_f\right), \quad f = 3n - p$$

Współrzędne kartezjańskie są jednoznacznymi funkcjami współrzędnych uogólnionych

$$f_k(x(q,t),t) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0 \qquad \begin{array}{l} k = 1,2,\ldots,p \\ l = 1,2,\ldots,f \end{array}$$

Po wstawieniu relacji wiążących współrzędne kartezjańskie z uogólnionymi do równań więzów, równania te muszą stać się tożsamościami czyli być spełnione dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych. Równania więzów nie ograniczają wartości przyjmowanych przez te współrzędne

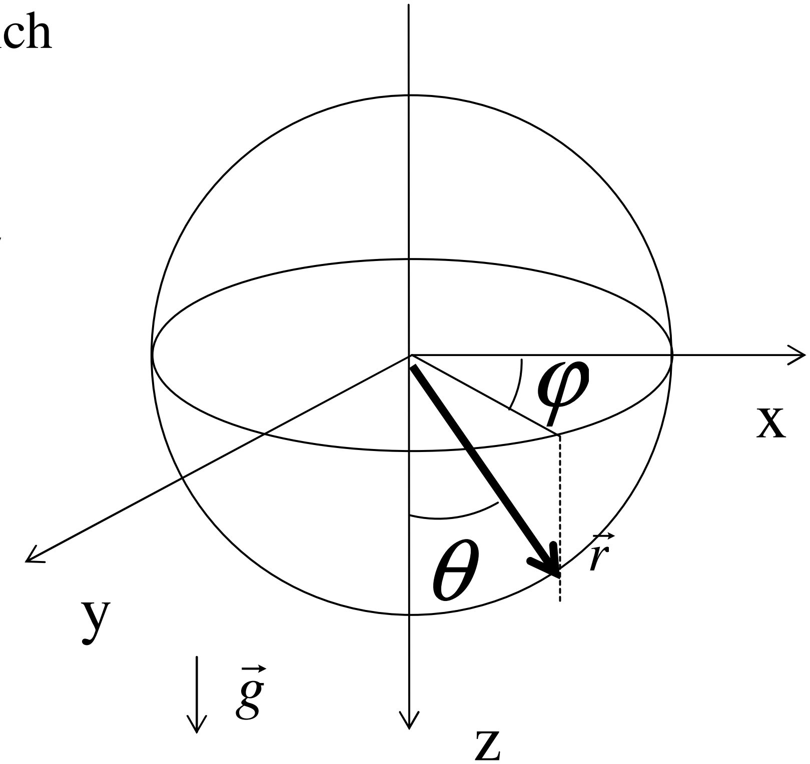
Przykład -cząstka o masie *m* poruszająca się po powierzchni kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu *R*

Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Ruch po powierzchni $\Rightarrow$liczba stopni swobody f=2

Za współrzędne uogólnione można przyjąć 2 z 3 współrzędnych w sferycznym układzie współrzędnych a mianowicie kąt biegunowy θ i azymutalny φ. Związek współrzędnych w układzie kartezjańskim ze współrzędnymi uogólnionymi



$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$

$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \varphi < 2\pi$$

Można łatwo pokazać iż równanie więzów jest spełnione tożsamościowo dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych z zakresu ich zmienności i współrzędne te jednoznacznie określają położenie punktu na powierzchni kuli

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\cos^2\theta - R^2 =$$

$$R^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + R^2\cos^2\theta - R^2 = R^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - R^2 = R^2 - R^2 \equiv 0$$

Przykład –układ złożony z 2 ciał (punktów materialnych) poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej na ruch których nie nałożono żadnych więzów

Liczba stopni swobody f=n*3-p=2*3-0=6
Za współrzędne uogólnione można przyjąć składowe wektorów wodzących $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ obu ciał w dowolnym inercjalnym układzie współrzędnych czyli np. wielkości

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ gdzie $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \qquad \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

ale także składowe $x_M, y_M, z_M, x_\mu, y_\mu, z_\mu$

wektorów $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_\mu\vec{i} + y_\mu\vec{j} + z_\mu\vec{k}$

$\vec{R}$ -wektor określający położenie środka masy

Ponieważ $\vec{r}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$ to zachodzi np.

$$x_1 = x_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_\mu \qquad x_2 = x_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x_\mu$$

Wybór współrzędnych uogólnionych zarówno dla układu punktów materialnych jak i pojedynczego punktu można dokonać na wiele sposobów . Dla pojedynczego punktu materialnego na który nie nałożono więzów współrzędnymi uogólnionymi mogą być wszystkie współrzędne w dowolnym krzywoliniowym lub kartezjańskim układzie współrzędnych.

Wyprowadzenie użytecznych relacji

$$x_j = x_j(q_1,.....,q_f,t) = x_j(q,t) \rightarrow \dot{x}_j = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial t}$$

$$\dot{x}_j = \dot{x}_j(q,\dot{q},t)$$

$$q = (q_1,........,q_f)$$

$$\dot{q} = (\dot{q}_1,........,\dot{q}_f)$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_j}{\partial q_k}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)}$$

$\dot{q}_k = \dfrac{dq_k}{dt}$ -prędkość uogólniona związana ze współrzędną uogólnioną q_k

Wyprowadzenie równań Lagrange'a II rodzaju z zasady d'Alemberta

Składowe wektora przesunięcia wirtualnego układu δx_j zgodnego z więzami występujące w zasadzie d'Alemberta można wyrazić przy pomocy współrzędnych uogólnionych i uogólnionych przesunięć wirtualnych zgodnych z więzami δq_l

$$\delta x_j = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l, \quad j = 1,2,\ldots,3n$$

$$f_k\big(x(q,t),t\big) \equiv 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0} \qquad \begin{matrix} k = 1,2,\ldots,p \\ l = 1,2,\ldots,f \end{matrix}$$

Po wstawieniu relacji wiążących współrzędne kartezjańskie z uogólnionymi do równań więzów, równania te stają tożsamościami i nie zależą od tych współrzędnych

Z równania $\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0$ zasady d'Alemberta wynika więc iż

$$0 = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^{f} \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial f_k}{\partial q_l} \delta q_l \equiv 0 \Rightarrow \delta q_l \quad \text{dowolne}$$

Uogólnione przesunięcia wirtualne zgodne z więzami są dowolne (związek po lewej jest spełniony tożsamościowo, tzn. warunek na zgodność przesunięć z więzami nie ogranicza dowolności δq_l).

Z innego równania zasady d'Alemberta wynika iż

$$0=\sum_{j=1}^{3n}\left(X_j-m_j\ddot{x}_j\right)\delta x_j=\sum_{j=1}^{3n}\left(X_j-m_j\ddot{x}_j\right)\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\delta q_l=$$

X_i –składowe wektora siły

Siła działająca na i-te ciało:

$$\vec{F}_i=X_{3i-2}\vec{i}+X_{3i-1}\vec{j}+X_{3i}\vec{k}$$

$$=\sum_{l=1}^{f}\left(\sum_{j=1}^{3n}X_j\frac{\partial x_j}{\partial q_l}-\sum_{j=1}^{3n}m_j\ddot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)\delta q_l$$

Siły uogólnione

$$\boxed{Q_l\equiv\sum_{j=1}^{3n}X_j\frac{\partial x_j}{\partial q_l}}$$

$$\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial q_l}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)\qquad\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial\dot{q}_l}=\frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

$$\sum_{j=1}^{3n}m_j\ddot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_l}=\sum_{j=1}^{3n}\left(\frac{d}{dt}\left(m_j\dot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)\right)-\sum_{j=1}^{3n}m_j\dot{x}_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)=$$

$T=\sum_{j=1}^{3n}\frac{m_j\dot{x}_j^2}{2}$ energia kinetyczna

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3n}m_j\dot{x}_j\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial\dot{q}_l}\right)-\sum_{j=1}^{3n}m_j\dot{x}_j\frac{\partial\dot{x}_j}{\partial q_l}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3n}\frac{m_j}{2}\frac{\partial\dot{x}_j^2}{\partial\dot{q}_l}\right)-\sum_{j=1}^{3n}\frac{m_j}{2}\frac{\partial\dot{x}_j^2}{\partial q_l}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_l}$$

$$x=(x_1,\dots,x_j,\dots,x_{3n})\qquad q=(q_1,\dots,q_f)$$

$$\dot{x}=(\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_j,\dots,\dot{x}_{3n})\qquad\dot{q}=(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_f)$$

$$T=T(q,\dot{q},t)=T(\dot{x}(q,\dot{q},t))$$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(Q_l-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}+\frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\delta q_l=0\;\Rightarrow\;\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_l}=Q_l,\quad l=1,2,\dots,f}$$

dowolne

Równania Lagrange'a II rodzaju

Siły uogólnione i równania Lagrange'a II rodzaju dla swobodnego punktu materialnego we współrzędnych cylindrycznych

Gdy współrzędnymi uogólnionymi opisującymi swobodny punkt materialny o masie *m* są współrzędne w układzie krzywoliniowym to wówczas

$$Q_l = \sum_{j=1}^{3} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} = L_l \left(\vec{F} \cdot \vec{e}_l\right)$$

$$\vec{e}_l = \frac{1}{L_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}$$

L_l- współczynnik Lamé

Np. w układzie cylindrycznym $L_\rho = L_z = 1, L_\varphi = \rho$

$$Q_\rho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\rho = F_\rho \qquad Q_\varphi = \rho\left(\vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi\right) = \rho F_\varphi = D_z \qquad Q_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = F_z$$

Siły Q_ρ, Q_z są rzutami siły wypadkowej na osie wyznaczone przez wersory układu cylindrycznego a siła uogólniona Q_φ reprezentuje z-ową składową wypadkowego momentu siły

$$x = \rho\cos(\varphi)$$
$$y = \rho\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

$$Q_\rho = \sum_{j=1}^{3} X_j \frac{\partial x_j}{\partial \rho} = F_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + F_y \frac{\partial y}{\partial \rho} + F_z \frac{\partial z}{\partial \rho} = F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\rho$$

$$Q_\varphi = \sum_{j=1}^{3} X_j \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -F_x \rho\sin\varphi + F_y \rho\cos\varphi = -F_x y + F_y x = D_z$$

$$Q_z = \sum_{j=1}^{3} X_j \frac{\partial x_j}{\partial z} = F_x \frac{\partial x}{\partial z} + F_y \frac{\partial y}{\partial z} + F_z \frac{\partial z}{\partial z} = F_z$$

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Określenie energii kinetycznej T we współrzędnych cylindrycznych

$$x=\rho\cos\varphi \Rightarrow \dot{x}=\frac{\partial x}{\partial\rho}\dot{\rho}+\frac{\partial x}{\partial\varphi}\dot{\varphi}=\cos(\varphi)\dot{\rho}-\rho\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_j=\dot{x}_j(q,\dot{q})$$

$$y=\rho\sin\varphi \Rightarrow \dot{y}=\frac{\partial y}{\partial\rho}\dot{\rho}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\dot{\varphi}=\sin(\varphi)\dot{\rho}+\rho\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$z=z\Rightarrow \dot{z}=\dot{z}$$

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{m}{2}\begin{pmatrix}\dot{\rho}^2\cos^2(\varphi)-2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho^2\sin^2(\varphi)\dot{\varphi}^2+\\ \dot{\rho}^2\sin^2(\varphi)+2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho^2\cos^2(\varphi)\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)+\rho^2\left(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right)\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)$$

Do powyższego wzoru można dojść także wychodząc ze wzoru na energie kinetyczną wyrażoną od razu przez składowe prędkości w układzie cylindrycznym

v_ρ, v_φ, v_z

Ponieważ układ cylindryczny jest układem ortogonalnym

(czyli zachodzi $\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\varphi=\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_z=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\rho=0$)

to energia kinetyczna $T=\frac{m}{2}\left(v_\rho^2+v_\varphi^2+v_z^2\right)$

Ponieważ składowe prędkości w układzie cylindrycznym są równe

$$v_\rho = \dot{\rho} \qquad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \qquad v_z = \dot{z}$$

to energia kinetyczna

$$T = \frac{m}{2}\left(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = T\left(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right)$$

Obliczenia pomocnicze prowadzące do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{d\left(m\dot{\rho}\right)}{dt} - m\rho\dot{\varphi}^2 = m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = ma_\rho$$

L_z –z-towa składowa momentu pędu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{d\left(m\rho^2\dot{\varphi}\right)}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = 2m\rho\dot{\varphi}\dot{\rho} + m\rho^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{d\left(m\dot{z}\right)}{dt} = m\ddot{z} = ma_z$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho \Rightarrow ma_\rho = F_\rho$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = D_z$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z \Rightarrow ma_z = F_z$$

Siły uogólnione i równania Lagrange'a II rodzaju dla układu złożonego z 2 ciał (punktów materialnych) poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej na ruch których nie nałożono żadnych więzów (do samodzielnej analizy)

Na ciała działają siły wypadkowe $\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}$, $\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}$

Przyjmując za współrzędne uogólnione składowe w układzie kartezjańskim wektorów

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_\mu\vec{i} + y_\mu\vec{j} + z_\mu\vec{k}$$

gdzie $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

czyli wielkości $x_M, y_M, z_M, x_\mu, y_\mu, z_\mu$ i uwzględniając relacje

$$x_1 = x_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_\mu \qquad x_2 = x_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x_\mu$$

$$y_1 = y_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2}y_\mu \qquad y_2 = y_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2}y_\mu$$

$$z_1 = z_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2}z_\mu \qquad z_2 = z_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2}z_\mu$$

widzimy jaką postać mają siły uogólnione np.

$$Q_{x_M} = \sum_{j=1}^{6} X_j \frac{\partial x_j}{\partial x_M} = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial x_M} + F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial x_M} + F_{1z}\frac{\partial z_1}{\partial x_M} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial x_M} + F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial x_M} + F_{2z}\frac{\partial z_2}{\partial x_M} = F_{1x} + F_{2x}$$

$$Q_{x_\mu} = \sum_{j=1}^{6} X_j \frac{\partial x_j}{\partial x_\mu} = F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial x_\mu} + F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial x_\mu} + F_{1z}\frac{\partial z_1}{\partial x_\mu} + F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial x_\mu} + F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial x_\mu} + F_{2z}\frac{\partial z_2}{\partial x_\mu} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}F_{1x} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}F_{2x}$$

Ponieważ energię kinetyczną układu złożonego z tych ciał można przedstawić jako

$$T=\frac{(m_1+m_2)}{2}\left(\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2+\dot{z}_M^2\right)+\frac{\mu}{2}\left(\dot{x}_\mu^2+\dot{y}_\mu^2+\dot{z}_\mu^2\right)$$

to zachodzi np. $\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ -masa zredukowana

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_M}=\frac{d\left((m_1+m_2)\dot{x}_M\right)}{dt}=(m_1+m_2)\ddot{x}_M$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_\mu}=\frac{d\left(\mu\dot{x}_\mu\right)}{dt}=\mu\ddot{x}_\mu$$

Przykładowe 2 z 6 równań Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_M}=Q_{x_M}\Rightarrow(m_1+m_2)\ddot{x}_M=F_{1x}+F_{2x}$$

jedno z 3 równań opisujących ruch środka masy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_\mu}=Q_{x_\mu}\Rightarrow\mu\ddot{x}_\mu=-\frac{m_2}{m_1+m_2}F_{1x}+\frac{m_1}{m_1+m_2}F_{2x}$$

jedno z 3 równań opisujących ruch względny

Gdy $\vec{F}_1=-\vec{F}_2\Rightarrow F_{1x}=-F_{2x}\Rightarrow\mu\ddot{x}_\mu=F_{2x}\qquad \ddot{x}_M=0$

Pozostałe 4 analogiczne równania opisują zmiany w czasie y_M, z_M, y_μ, z_μ

Równania Lagrange'a II rodzaju przy siłach potencjalnych

Niech siły działające na układ punktów materialnych mają potencjał *V(x,t)*

$$\vec{F}_i = -grad_i V \qquad i = 1,\dots\dots,n \qquad \Rightarrow \qquad X_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad j = 1,2,\dots,3n$$

$$Q_l \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l}, \quad l = 1,2,\dots,f$$

gdzie $V(q,t) = V(x(q,t),t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1,2,\dots,f$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_l} = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \qquad l = 1,2,\dots,f \\ L \equiv T - V \end{cases}}$$

Funkcja Lagrange'a (Lagrangian)

$$L(q,\dot{q},t) \equiv T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$$

Postać równań Lagrange'a nie zależy od wyboru współrzędnych uogólnionych. Równania te są niezmiennicze względem zamiany tych współrzędnych (tzw. przekształceń punktowych)

Dla punktu materialnego o masie m, na ruch którego nie nałożono więzów można np. przyjąć za współrzędne uogólnione składowe jego wektora wodzącego w układzie kartezjańskim czyli przyjąć iż $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

Przy założeniu iż siły działające na punkt są potencjalne

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Można określić funkcje Lagrange'a jako

$$L(q,\dot{q},t) = L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = T(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) - V(x,y,z,t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x,y,z,t)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmą postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - F_x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} - F_y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = F_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} - F_z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = F_z$$

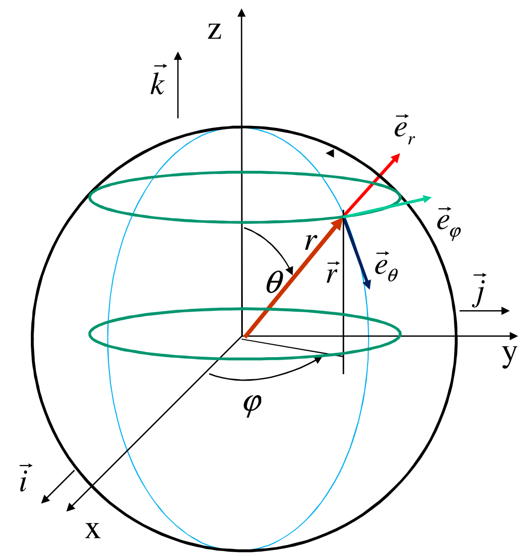
Przykład do samodzielnej analizy

Dla punktu materialnego o masie m, na ruch którego nie nałożono więzów można np. przyjąć za współrzędne uogólnione także współrzędne w układzie krzywoliniowym np. sferycznym   czyli przyjąć iż $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ przy czym

$$x = y(r,\theta,\varphi) = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

$$y = y(r,\theta,\varphi) = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$z = z(r,\theta) = r\cos(\theta)$$



Ponieważ jest to układ ortogonalny
i składowe prędkości w tym układzie są równe :

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_\varphi = r\sin(\theta)\dot{\varphi}$$

to

$$T = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) = T\left(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}\right)$$

Energię kinetyczną można też określić w następujący sposób

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\dot{r} + r\cos(\theta)\cos(\varphi)\dot{\theta} - r\sin(\theta)\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \sin(\theta)\sin(\varphi)\dot{r} + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\dot{\theta} + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$z = r\cos\theta \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\dot{\theta} = \cos(\theta)\dot{r} - r\sin(\theta)\dot{\theta}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

Przy założeniu iż siły są potencjalne można określić funkcje Lagrange'a jako

$$L(q,\dot{q},t) = L\left(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi},t\right) = T\left(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}\right) - V(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta), t) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - V(r,\theta,\varphi,t) =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmą postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\dot{\theta}^2 r - m\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 r + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\left[\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right)\right] = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\Rightarrow ma_r = -[gradV]_r \Rightarrow \boxed{ma_r = F_r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr\left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] = -r\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow rma_\theta = -r[gradV]_\theta \Rightarrow \boxed{rma_\theta = rF_\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}) = -r\sin\theta\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = -r\sin\theta[gradV]_\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{dL_z}{dt} = r\sin\theta F_\varphi = D_z}$$

D_z - z-owa składowa momentu siły

$L_z = mx\dot{y} - my\dot{x} = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}$ - z-owa składowa momentu pędu

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$gradV = [gradV]_r\vec{e}_r + [gradV]_\theta\vec{e}_\theta + [gradV]_\varphi\vec{e}_\varphi = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

Szkic dowodu wzoru $D_z = rF_\varphi \sin\theta$

$$\vec{D} = \vec{r}\times\vec{F} = r\vec{e}_r \times\left(F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= rF_r\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_r\right) + rF_\theta\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\right) + rF_\varphi\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi\right) = rF_\theta\vec{e}_\varphi - rF_\varphi\vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k} \qquad \vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j} \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0, \qquad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$D_z = \vec{D}\cdot\vec{k} = rF_\theta\left(\vec{e}_\varphi\cdot\vec{k}\right) - rF_\varphi\left(\vec{e}_\theta\cdot\vec{k}\right) = rF_\theta\cdot 0 - rF_\varphi\cdot(-\sin\theta) = rF_\varphi\sin\theta$$

Szkic dowodu wzoru $L_z = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}$

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = mr\vec{e}_r\times\left(v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= mrv_r\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_r\right) + mrv_\theta\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\right) + mrv_\varphi\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi\right) = mrv_\theta\vec{e}_\varphi - mrv_\varphi\vec{e}_\theta$$

$$L_z = \vec{L}\cdot\vec{k} = rv_\theta\left(\vec{e}_\varphi\cdot\vec{k}\right) - rv_\varphi\left(\vec{e}_\theta\cdot\vec{k}\right) = mrv_\theta\cdot 0 - mrv_\varphi\cdot(-\sin\theta) = mrv_\varphi\sin\theta$$

$$v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi} \Rightarrow \quad L_z = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}$$

Pędy uogólnione

$$\boxed{p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}, \quad l = 1,2,\ldots, f} \quad \left(\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp_l}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_l} \right)$$

Związek między pędem uogólnionym *p_l związanym ze współrzędną q_l* $\quad p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$
a składowymi w układzie kartezjańskim wektorów pędu punktów materialnych

$p_{m,j} = m_j \dot{x}_j$ równych $\quad p_{m,j} = m_j \dot{x}_j = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}\left(\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 1,2,\ldots,3n$

$L(x, \dot{x}, t)$

$$L(q,\dot{q},t) = L(x(q,t), \dot{x}(q,\dot{q},t),t) = T(\dot{x}) - V(x,t)$$

$$p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \quad l = 1,2,\ldots, f$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

(wektor pędu *i*-tego punktu w układzie kartezjańskim:

$\vec{p}_{mi} = m_i \dot{\vec{r}}_i = [m_i \dot{x}_i, m_i \dot{y}_i, m_i \dot{z}_i] = [p_{m,3i-2}, p_{m,3i-1}, p_{m,3i}]$), $\quad i = 1,\ldots,n$

$$p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \quad l = 1,2,\ldots, f$$

Gdy współrzędnymi uogólnionymi opisującymi układ złożony wyłącznie ze swobodnego punktu materialnego (i=1) o pędzie

$$\vec{p}_m = m\dot{\vec{r}} = [m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}] = [p_{m1}, p_{m2}, p_{m3}] = [p_x, p_y, p_z]$$

są współrzędne w układzie cylindrycznym $q_1=\rho, q_2=\varphi, q_3=z$ to

$$x = \rho\cos(\varphi)$$
$$y = \rho\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

$$p_\rho = \sum_{j=1}^{3} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial \rho} = p_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + p_y \frac{\partial y}{\partial \rho} + p_z \frac{\partial z}{\partial \rho} = p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi = \vec{p}_m \cdot \vec{e}_\rho$$

$$p_\varphi = \sum_{j=1}^{3} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} = p_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + p_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + p_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -p_x \rho \sin\varphi + p_y \rho\cos\varphi =$$

$$= -p_x y + p_y x = L_z$$

z-towa składowa momentu pędu

$$p_z = \sum_{j=1}^{3} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial z} = p_x \frac{\partial x}{\partial z} + p_y \frac{\partial y}{\partial z} + p_z \frac{\partial z}{\partial z} = p_z$$

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{p}_m = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

Całki pierwsze równań Lagrange'a II rodzaju

Całka pędu uogólnionego związanego ze współrzędną uogólnioną

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \Leftrightarrow \frac{dp_r}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \Rightarrow \frac{dp_r}{dt}=0 \Rightarrow p_r = const$$

Jeżeli funkcja Lagrange'a nie zależy od jednej ze wsp. uogólnionych (taka współrzędna nazywana jest **współrzędną cykliczną**), to pęd uogólniony zw. z tą współrzędną jest całką ruchu. Pęd uogólniony nie musi mieć wymiaru pędu mechanicznego

Całki pierwsze równań Lagrange'a II rodzaju

Całka uogólnionej energii

$$\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l} \Rightarrow \dot{p}_l \dot{q}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l \Rightarrow \dot{p}_l \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(\dot{p}_l \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) = 0$$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{dp_l}{dt}\dot{q}_l - \frac{\partial L_l}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{d(p_l\dot{q}_l)}{dt} - p_l\ddot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) = 0$$

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{d(p_l\dot{q}_l)}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l\right) - \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l\right) - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{l=1}^{f}(p_l\dot{q}_l) - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dG}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

gdzie

$$\boxed{G(q,\dot{q},t) = \sum_{l=1}^{f} p_l(q,\dot{q},t)\dot{q}_l - L(q,\dot{q},t)}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

ze wzoru na pochodną zupełną *L* po czasie

Uogólnioną energie traktujemy w ogólności jako funkcje współrzędnych uogólnionych prędkości uogólnionych i czasu.

$$\boxed{\frac{dG}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dG}{dt} = 0 \Rightarrow G = const}$$

Jeżeli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu, to uogólniona energia jest stałą ruchu

Ogólnie $\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Jaki jest sens funkcji G-uogólnionej energii?

Cały czas zakładamy ze siły są potencjalne czyli $L = T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$

Dodatkowo dobieramy współrzędne uogólnione q_1 tak by wzory transformacyjne między współrzędnymi kartezjańskimi układu punktów materialnych a współrzędnymi uogólnionymi $x_j = x_j(q)$ nie zależały explicite (jawnie) od czasu. Taki dobór współrzędnych jest możliwy gdy równania więzów nie zależą explicite od czasu

$$x_j = x_j(q) \rightarrow \dot{x}_j = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l = \dot{x}_j(q,\dot{q})$$

Energia kinetyczna jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych i nie zależy jawnie od czasu

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j^2 = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{f} a_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l = T(q,\dot{q})}$$

gdzie

$$a_{kl}(q) = \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

Wówczas $\displaystyle\sum_{m=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m = \sum_{k,m=1}^{f} a_{km}(q)\dot{q}_k\dot{q}_m = 2T$

$$a_{kl}(q) = a_{lk}(q)$$

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - L = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l - L = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l - T + V = 2T - T + V = T + V$$

Widać iż przy powyższych założeniach uogólniona energia ma sens całkowitej energii. Uwzględniając to iż $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ jest ona stalą ruchu

$$\boxed{G = T(q,\dot{q}) + V(q,t)}$$

gdy potencjał nie zależy jawnie od czasu $V(q,t) = V(q) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow G = const$

Dowód relacji $T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} m_j\dot{x}_j^2=\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{f} a_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l$

$x_j = x_j(q)$

$$\dot{x}_j=\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} m_j\dot{x}_j^2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} m_j\left(\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\cdot\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f}\left(\sum_{j=1}^{3n} m_j\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f} a_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l$$

$$a_{kl}(q)=\sum_{j=1}^{3n} m_j\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

Dowód relacji $\sum_{m=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m=2T$

$$a_{mk}(q)=a_{km}(q)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{f} a_{ml}(q)\dot{q}_l+\sum_{k=1}^{f} a_{km}(q)\dot{q}_k\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{f} a_{mk}(q)\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{f} a_{km}(q)\dot{q}_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{f} a_{km}(q)\dot{q}_k$$

$$\sum_{m=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m=\sum_{k,m=1}^{f} a_{km}(q)\dot{q}_k\dot{q}_m=\sum_{k,l=1}^{f} a_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l=2T$$

Wskazówki przy wyborze współrzędnych uogólnionych

1) Często korzystny jest taki wybór współrzędnych by jak największa ich ilość była współrzędnymi cyklicznymi czyli pędy z nimi związane były całkami ruchu. Ogólnie każda zasada zachowania z wyjątkiem zasady zachowania energii (uogólnionej) pociąga za sobą istnienie współrzędnej cyklicznej, z którą związany jest pęd uogólniony będący stałą ruchu.
2) Gdy wiemy iż ruch zachodzi w płaszczyźnie to za współrzędne uogólnione przyjmujemy współrzędne służące do opisu położenia ciała na tej płaszczyźnie.
3) Jeżeli jest taka możliwość to korzystne jest wybrać współrzędne tak by każde z równań Lagrange'a II rodzaju było równaniem różniczkowym zawierającym wyrazy zależne tylko od jednej współrzędnej uogólnionej oraz jej pierwszych i drugich pochodnych po czasie. Jest to możliwe do osiągnięcia gdy zachodzi separacja zmiennych w funkcji Lagrange'a, czyli funkcja ta jest sumą wyrazów, z których każdy może zależeć wyłącznie od jednej współrzędnej i/lub prędkości uogólnionej.

$$L(q_{1,},.....,q_f,\dot{q}_{1,},.....,\dot{q}_f,t)=\sum_{i=1}^{f}L_i\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)$$

Wówczas układ równań Lagrange'a II rodzaju , będący układem sprężonych ze sobą f równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 2, staje się układem f niezależnych od siebie równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego.

Np. gdy wiemy iż ruch jest płaski, czyli zachodzi np. pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ to za współrzędne uogólnione wybieramy współrzędne służące do opisu położenia ciała w tej płaszczyźnie.
Mogą być nimi współrzędne r, φ w układzie biegunowym wprowadzone w płaszczyźnie ruchu, przy czym w ruchu pod wpływem siły $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ współrzędna φ jest współrzędną cykliczną gdyż

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r) \text{ gdzie } f(r) = -\frac{dV}{dr}$$

czyli $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = L_z = const$

Analizując ruch pod wpływem siły $f(r) = -kr$ a więc oscylatora izotropowego innym dogodnym wyborem jest wybór współrzędnych *x, y* w układzie kartezjańskim wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu, gdyż w takim przypadku $\vec{F} = -kx\vec{i} - ky\vec{j}$ czyli potencjał spełniający relacje $\vec{F} = -gradV$ ma postać $V = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right)$
i zachodzi separacja zmiennych w funkcji Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2\right) + \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{k}{2}y^2\right)$$

a równania Lagrange'a przyjmują postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0$$

Dla układu złożonego ze swobodnych punktów materialnych na które nie działają siły zewnętrzne wśród współrzędnych uogólnionych dobrze jest wybrać 3 współrzędne jako współrzędne kartezjańskie określające położenie środka masy

$$x_M = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \qquad y_M = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \qquad z_M = \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \qquad M = \sum_i m_i$$

Energia kinetyczna takiego układu jest równa $T = \frac{M}{2}\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2\right) + T^{(s)}$

gdzie $T^{(s)}$ –energia kinetyczna w układzie środka masy,

zaś funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{M}{2}\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2\right) + T^{(s)} - V$$

W opisywanym układzie zarówno $T^{(s)}$ jak i potencjał V nie zależy od współrzędnych x_M, y_M, z_M (są one współrzędnymi cyklicznymi)

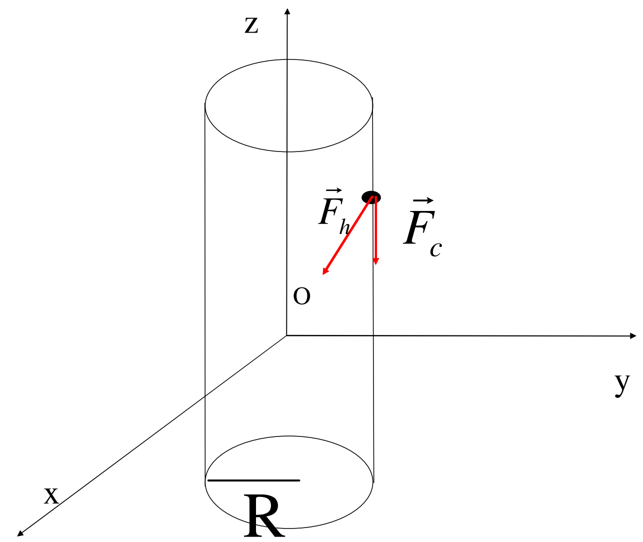
A zatem pędy uogólnione związane ze współrzędnymi x_M, y_M, z_M

$$p_{xM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = M\dot{x}_M \qquad p_{yM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_M} = M\dot{y}_M \qquad p_{zM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_M} = M\dot{z}_M$$

są stałymi ruchu gdyż $\dot{p}_{xM} = \frac{\partial L}{\partial x_M} = \frac{\partial T}{\partial x_M} - \frac{\partial V}{\partial x_M} = 0 \qquad \dot{p}_{yM} = \frac{\partial L}{\partial y_M} = 0 \qquad \dot{p}_{zM} = \frac{\partial L}{\partial z_M} = 0$

(środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnym)

Przykład-Cząstka o masie *m* poruszająca się po powierzchni cylindra o promieniu *R* i o osi Oz będącej osią symetrii cylindra w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0,0,-mg)$ oraz siły sprężystości skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych $\vec{F}_h = (-kx,-ky,-kz)$



Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich

$$f = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Ruch po powierzchni→ liczba stopni swobody f=2

Za współrzędne uogólnione można przyjąć 2 z 3 współrzędnych w cylindrycznym układzie współrzędnych a mianowicie kąt azymutalny φ oraz zmienną z .
Związek współrzędnych w układzie kartezjańskim ze współrzędnymi uogólnionymi

$$x = R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi$$

$$z = z$$

Można łatwo pokazać iż równanie więzów jest spełnione tożsamościowo dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych z zakresu ich zmienności i współrzędne te jednoznacznie określają położenie punktu na powierzchni walca

$$f = x^2 + y^2 - R^2 = R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi - R^2 = R^2 - R^2 \equiv 0$$

Określenie energii kinetycznej T we współrzędnych uogólnionych

$$x = R\cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = -R\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$y = R\sin\varphi \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = R\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$z = z \Rightarrow \dot{z} = \dot{z}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Do powyższego wzoru można dojść także rozważając ruch ciała w układzie cylindrycznym współrzędnych , w którym do opisu położenia w przestrzeni służą 3 zmienne ρ, φ, z

W tym układzie równanie więzów przyjmuje postać $f = \rho - R = 0$
Nie prowadza ona żadnych ograniczeń na współrzędne φ, z które są dobrymi współrzędnymi uogólnionymi

Składowe wektora prędkości w cylindrycznym układzie współrzędnych są równe

$$v_\rho = \dot{\rho} \qquad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \qquad v_z = \dot{z}$$

Uwzględniając warunek $\rho = R = const$ z którego wynika m.in. iż $\dot{\rho} = 0$

otrzymujemy iż $v_\rho = 0$ $v_\varphi = R\dot{\varphi}$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Określenie potencjału

$$\left(\begin{aligned} F_x &= -kx = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -ky = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z &= -mg - kz = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right) \Rightarrow V = mgz + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + const$$

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2(\varphi) + R^2\sin^2(\varphi) = R^2$$

Potencjał może zależeć tylko od współrzędnych uogólnionych i czasu; nie może zależeć od x,y

$$V = mgz + \frac{k}{2}z^2 + \frac{k}{2}R^2 + \text{const} = V(z)$$

Ponieważ potencjał określamy z dokładnością do stałej to ostatnie dwa wyrazy możemy opuścić

Dodatek - Określenie potencjału $V(x,y,z)$

$$F_x = -kx = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \Rightarrow V = -\int F_x dx + C(y,z) = \int kx dx + C(y,z) = \frac{1}{2}kx^2 + C(y,z)$$

$$F_y = -ky = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(y,z) = -\int F_y dy + D(z) = \int ky dy + D(z) = \frac{1}{2}ky^2 + D(z)$$

$$F_z = -mg - kz = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{\partial D(z)}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(z) = -\int F_z dz + const = \int (mg + kz) dz + const = mgz + \frac{1}{2}kz^2 + const$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + C(y,z) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + D(z) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgz + \frac{1}{2}kz^2 + const$$

Uwaga . W ogólnym przypadku **nie musi** zachodzić relacja

$$V = -\int F_x dx - \int F_y dy - \int F_z dz$$

(w przykładzie zaszła ona gdyż $F_x = F_x(x), F_y = F_y(y), F_z = F_z(z)$)

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz - \frac{k}{2}z^2$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \qquad q_1 = \varphi, q_2 = z$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\right) + mg + kz = 0 \Rightarrow m\ddot{z} + mg + kz = 0$$

Sposób rozwiązania powyższych równań był przedstawiony w pliku wyk3_mech.pdf

Poszukiwanie całek ruchu

Czy całkami ruchu są pędy uogólnione?

Widać iż ponieważ φ jest współrzędną cykliczną czyli $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ to

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} = const$$

Pęd uogólniony p_φ związany ze współrzędną cykliczną φ jest stałą (całką) ruchu
Pęd ten jest składową z-tową momentu pędu ciała

$$L=\frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-mgz-\frac{k}{2}z^2 \Rightarrow p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

p_z jest zetową składową pędu mechanicznego. Czy jest calką ruchu?

Ponieważ z nie jest współrzędną cykliczną czyli $\frac{\partial L}{\partial z}\neq 0$ to p_z nie jest całką ruchu

Czy całką ruchu jest uogólniona energia? Jaki ma ona sens?

$p_\varphi = mR^2\dot{\varphi};\ p_z = m\dot{z}$

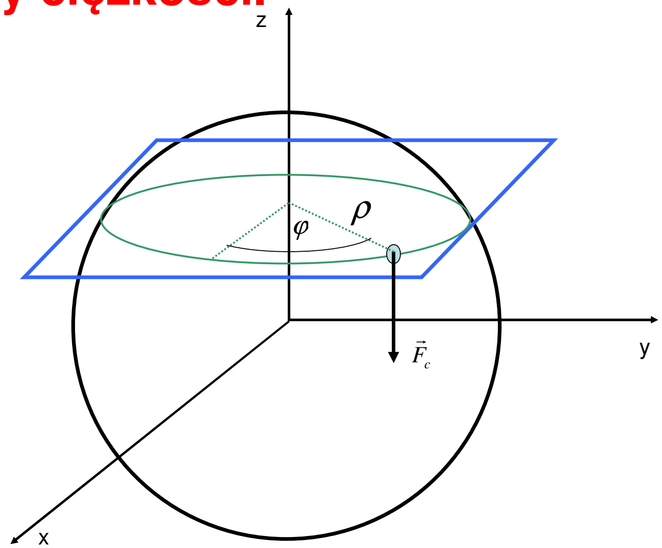
$$G=\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - L = p_\varphi\dot{\varphi}+p_z\dot{z}-L = mR^2\dot{\varphi}^2+m\dot{z}^2-\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2-\frac{m}{2}\dot{z}^2+mgz+\frac{k}{2}z^2=$$

$$=\frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)+mgz+\frac{k}{2}z^2=T+V$$

Ponieważ wzory transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi nie zależą od czasu oraz siły są potencjalne to uogólniona energia G jest równa całkowitej energii ciała.

Ponadto ponieważ funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ to jest ona całką ruchu

Przykład. Ciało (punkt materialny) poruszający się po przecięciu powierzchni kuli o promieniu *R* i środku w początku układu współrzędnych oraz drgającej wzdłuż os OZ płaszczyzny zgodnie z równaniem $z = R\sin(\omega t)$ ($t < \frac{\pi}{2\omega}$) w polu siły ciężkości.



Równania więzów można w układzie kartezjańskim przedstawić w postaci

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad f_2 = z - R\sin(\omega t) = 0$$

Ruch po krzywej pojedynczego ciała *n*=1 w przestrzeni trójwymiarowej >liczba stopni swobody *f*=3*n*-*p*=3-2=1

Do opisu ruchu ciała należy wykorzystać 1 współrzędną uogólnioną. Może być nią współrzędna φ w układzie cylindrycznym. Współrzędna ta jednoznacznie określa położenie ciała a więzy nie wprowadzają żadnych ograniczeń na wartości przyjmowane przez tą współrzędną

Związki między współrzędnymi kartezjańskimi a współrzędną uogólnioną

$$z = R\sin(\omega t)$$

Odległość ciała od osi Oz jest równa $\rho = \sqrt{R^2 - z^2} = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2(\omega t)} = R|\cos(\omega t)| \overset{\cos(\omega t)>0}{=} R\cos(\omega t)$

a zatem $x = \rho\cos(\varphi) = R\cos(\omega t)\cos(\varphi)$ $\qquad y = \rho\sin(\varphi) = R\cos(\omega t)\sin(\varphi)$

$$x = R\cos(\omega t)\cos(\varphi) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = -R\omega\sin(\omega t)\cos(\varphi) - R\cos(\omega t)\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$y = R\cos(\omega t)\sin(\varphi) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = -R\omega\sin(\omega t)\sin(\varphi) + R\cos(\omega t)\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$z = R\sin(\omega t) \Rightarrow \dot{z} = R\omega\cos(\omega t)$$

Można sprawdzić iż równania więzów po wstawieniu do nich relacji

$x = x(\varphi, t),\ y = y(\varphi, t),\ z = z(t)$ stają się tożsamościami

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = R^2\cos^2(\omega t)\left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right] + R^2\sin^2(\omega t) - R^2 = R^2 - R^2 \equiv 0$$

$$f_2 = z - R\sin(\omega t) = R\sin(\omega t) - R\sin(\omega t) \equiv 0$$

Określenie energii kinetycznej

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(R^2\omega^2\sin^2(\omega t)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) + R^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) + R^2\omega^2\cos^2(\omega t)\right) +$$

$$+ \frac{m}{2}\left(2R^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi} - 2R^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(R^2\omega^2\sin^2(\omega t) + R^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2 + R^2\omega^2\cos^2(\omega t)\right) = \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2 + \cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2\right)$$

Przy określaniu energii kinetycznej można by było też skorzystać ze wzoru słusznego dla układu cylindrycznego

$$T = \frac{m}{2}\left(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

uwzględniając to iż

$$\rho = R\cos(\omega t) \Rightarrow \dot{\rho} = -R\omega\sin(\omega t) \qquad z = R\sin(\omega t) \Rightarrow \dot{z} = R\omega\cos(\omega t)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\omega^2\sin^2(\omega t) + R^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2 + R^2\omega^2\cos^2(\omega t)\right) =$$

$$= \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2 + \cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2\right)$$

Określenie energii potencjalnej

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0, F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg \Rightarrow V = mgz = mgR\sin(\omega t)$$

Określenie funkcji Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2 + \cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2\right) - mgR\sin(\omega t)$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mR^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(mR^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(mR^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}\right)\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow -2mR^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)\dot{\varphi} + mR^2\cos^2(\omega t)\ddot{\varphi} = 0$$

Określenie pędu uogólnionego

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi}$$

Pęd p_φ jest równy z-towej składowej momentu pędu ciała gdyż

$$p_\varphi = mR^2\cos^2(\omega t)\dot{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z$$

(uwz. wzór na L_z w układzie cylindrycznym)

$$L = T - V = \frac{m}{2} R^2 \left(\omega^2 + \cos^2(\omega t)\dot{\varphi}^2\right) - mgR\sin(\omega t)$$

Ponieważ φ jest współrzędną cykliczną (nie występuje w funkcji Lagrange'a $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$)

to pęd z nią związany $p_\varphi = mR^2 \cos^2(\omega t)\dot{\varphi}$ jest całką ruchu gdyż $\dot{p}_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Korzystając z tej całki ruchu można łatwo wyznaczyć ruch punktu przyrównując znaleziony pęd dla dowolnej chwili czasu z pędem w chwili początkowej ruchu, który można określić znając warunki początkowe ruchu

$$p_\varphi(t) = p_\varphi(t=0) \Rightarrow mR^2 \cos^2(\omega t)\dot{\varphi} = mR^2 \dot{\varphi}(t=0)$$

$\varphi(t=0), \dot{\varphi}(t=0)$ można określić uwzględniając relacje

$$y = R\cos(\omega t)\sin(\varphi) \Rightarrow y(t=0) = R\sin(\varphi(t=0)) \qquad x = R\cos(\omega t)\cos(\varphi) \Rightarrow x(t=0) = R\cos(\varphi(t=0))$$

$$\dot{y} = -R\omega\sin(\omega t)\sin(\varphi) + R\cos(\omega t)\cos(\varphi)\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{y}(t=0) = R\cos(\varphi(t=0))\dot{\varphi}(t=0)$$

Gdy np. $\begin{array}{c} y(t=0) = 0, x(t=0) = R \\ \dot{y}(t=0) = \dot{y}_o \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi(t=0) = 0 \\ \dot{\varphi}(t=0) = \frac{\dot{y}_0}{R} \end{array}$

$t < \frac{\pi}{2\omega}$

A zatem $mR^2 \cos^2(\omega t)\dot{\varphi} = mR^2 \frac{\dot{y}_0}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{\dot{y}_0}{R} \int \frac{1}{\cos^2(\omega t)} dt + const = \frac{\dot{y}_0}{R\omega} tg(\omega t)$

Przy wyborze współrzędnych uogólnionych jest celowe by w miarę możliwości jak największa ich ilość była całkami ruchu, co upraszcza wyznaczenie ruchu układu

$$L = T - V = \frac{m}{2} R^2 \left(\omega^2 + \cos^2(\omega t) \dot{\varphi}^2 \right) - mgR \sin(\omega t)$$

Określenie funkcji G (uogólnionej energii)

$$p_\varphi = mR^2 \cos^2(\omega t) \dot{\varphi}$$

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l \dot{q}_l - L = p_\varphi \dot{\varphi} - L = mR^2 \cos^2(\omega t) \dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2} R^2 \left(\omega^2 + \cos^2(\omega t) \dot{\varphi}^2 \right) + mgR \sin(\omega t) =$$

$$= \frac{m}{2} R^2 \left(\cos^2(\omega t) \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \right) + mgR \sin(\omega t) \neq T + V$$

Ponieważ związki między współrzędnymi kartezjańskimi i współrzędną φ (przyjętą jako współrzędną uogólnioną) zależą od czasu to funkcja G nie jest równa całkowitej energii mechanicznej ciała w układzie inercjalnym.
Nie jest ona także całką ruchu gdyż

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = mR^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega \dot{\varphi}^2 + mgR\omega \cos(\omega t) = mR\omega \cos(\omega t) \left[R \sin(\omega t) \dot{\varphi}^2 + g \right] =$$

$$= mR\omega \cos(\omega t) \left[R \sin(\omega t) \frac{L_z^2}{m^2 R^4 \cos^4(\omega t)} + g \right] \neq 0$$

Uwaga. Może wystąpić sytuacja kiedy funkcja G nie jest równa energii całkowitej w układzie inercjalnym a jest całką ruchu.

Funkcja Lagrange'a i równania Lagrange'a II rodzaju w przypadku istnienia potencjałów uogólnionych

Potencjał uogólniony - funkcja taka, że siły uogólnione wyrażają się przez nią następująco:

Potencjał uogólniony zależy nie tylko od współrzędnych ale również prędkości uogólnionych

$$Q_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f, \quad U = U(q,\dot{q},t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \dfrac{\partial L}{\partial q_l} = 0 & l = 1,2,\ldots,f \\ L \equiv T - U \end{cases}}$$

Uwaga: dla potencjałów uogólnionych składowe siły <u>nie są dane przez -grad *U*</u>

Niech $U(q,\dot{q},t) = U(x(q,t),\dot{x}(q,\dot{q},t),t)$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right)$$

$$Q_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} = -\sum_{j=1}^{3n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l}\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right) = \sum_{j=1}^{3n}\left(-\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

$$Q_l \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \Rightarrow \boxed{X_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}}$$

Przykład konstrukcji potencjału uogólnionego :
elektron w polu elektromagnetycznym ($\vec{E}$- natężenie pola elektrycznego, $\vec{B}$- indukcja pola magnetycznego, e-ładunek elektronu, $e<0$, $\vec{v}$ -prędkość elektronu φ-potencjał skalarny pola , $\vec{A}$-potencjał wektorowy pola)

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B} \qquad \left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi \\ \vec{B} &= rot\vec{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow U = e\varphi - e\vec{A}\cdot\vec{v} = e\varphi - e\left(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}\right)$$

Tak przyjęty potencjał uogólniony daje prawidłowe składowe siły działającej na elektron w polu elektromagnetycznym, np. dla składowej x-owej otrzymujemy

$$F_x = X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right) = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right) - e\frac{dA_x}{dt} =$$

$$= -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) =$$

$$= -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] = \quad -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\left[\dot{y}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_z - \dot{z}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_y\right]$$

$$= e\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + e\left(\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_x = eE_x + e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_x$$

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Pędy uogólnione dla układów opisanych potencjałem uogólnionym

Załóżmy iż współrzędnymi uogólnionymi są współrzędne kartezjańskie $(x_1,.........,x_{3n})$ opisujące analizowany układ ciał w przestrzeni konfiguracyjnej

Pęd uogólniony związany ze współrzędną x_j dla układu opisanego funkcją Lagrange'a z potencjałem uogólnionym $U(x_1,......,x_{3n},\dot{x}_1,............\dot{x}_{3n})$ jest równy

$$p_j \overset{ozn.}{=} p_{uj} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} = p_{mj} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 1,2,\ldots,3n$$

Pędy uogólnione p_{uj} **nie są równe składowym** $p_{mj} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j$ wektorów pędu mechanicznego tych ciał

np. dla elektronu o masie *m* w polu elektromagnetycznym $m_1=m_2=m_3=m$

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - e\varphi + e\vec{A}\cdot\vec{v} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{m\dot{x}_j^2}{2} + eA_j\dot{x}_j\right) - e\varphi \rightarrow p_{uj} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + eA_j$$

Pędy p_{uj} (j=1,2,3) są składowymi w ukł. kart. wektora $\vec{p}_u = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}$

φ -potencjał skalarny ($\vec{A}$ -potencjał wektorowy) pola elektromagnetycznego

Dla układu opisanego współrzędnymi uogólnionymi q_l obowiązuje relacja

$$p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} p_{uj}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

Dla układu opisanego potencjałem uogólnionym nie obowiązuje relacja $\cancel{G = T + U}$ bo $p_l \neq \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}$

Przykład. Sformułowanie równań ruchu dla elektronu w jednorodnym polu magnetycznym (obecnie do samodzielnej analizy)

Załóżmy iż elektron na który nie nałożono żadnych więzów porusza się w jednorodnym stałym w czasie polu magnetycznym o indukcji skierowanej wzdłuż osi Oz $\vec{B} = B\vec{k}$ (pole elektryczne nie występuje)

Wybór potencjału wektorowego i skalarnego pola nie jest jednoznaczny. Można go wybrać np. w postaci $\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & B \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{By}{2}\vec{i} + \frac{Bx}{2}\vec{j} = \left[-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right]$ oraz $\varphi = 0$

ale także w postaci $\vec{A} = [-By, 0, 0]$ oraz $\varphi = 0$

Można sprawdzić np. iż gdy $\vec{A} = \left[-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right]$ to $\vec{B} = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{By}{2} & \frac{Bx}{2} & 0 \end{vmatrix} = B\vec{k} = [0,0,B]$

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0$$

Gdy $\vec{A} = \left[-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right]$ oraz $\varphi = 0$ to przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne kartezjańskie x,y,z jego wektora wodzącego potencjał uogólniony

$$U = -e\vec{A}\cdot\vec{v}\cdot + e\varphi = -e\left(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}\right) = \frac{eB}{2}\left(y\dot{x} - x\dot{y}\right)$$

Funkcja Lagrange'a $L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{eB}{2}\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right)$

Uwzględniając to iż $L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{eB}{2}\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{eB}{2}y \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{eB}{2}x \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - \frac{eB}{2}\dot{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} + \frac{eB}{2}\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{eB}{2}\dot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{eB}{2}\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - eB\dot{y} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = eB\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + eB\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = -eB\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 0$$

Są one równoważne równaniu

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = e\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ gdy $\vec{B} = B\vec{k}$

gdyż

$$\vec{F} = e\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right) = e\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \left[eB\dot{y}, -eB\dot{x}, 0\right]$$

$$\vec{A} = \left[-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right]$$

Pędy uogólnione

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = m\dot{z} + eA_z$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{eB}{2}y = m\dot{x} + eA_x \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{eB}{2}x = m\dot{y} + eA_y$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{eB}{2}\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right)$$

$$p_x = m\dot{x} - \frac{eB}{2}y \qquad p_y = m\dot{y} + \frac{eB}{2}x \qquad p_z = m\dot{z}$$

Określenie funkcji G (uogólnionej energii)

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l \dot{q}_l - L = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eB}{2}\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right) =$$

$$= m\dot{x}^2 - \frac{eB}{2}y\dot{x} + m\dot{y}^2 + \frac{eB}{2}x\dot{y} + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eB}{2}\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = T$$

Widać iż **nie** zachodzi relacja $\cancel{G = T + U}$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow G = T = const$$

Energia kinetyczna stałą ruchu

Poszukiwanie położenia równowagi przy wykorzystaniu do opisu układu współrzędnych uogólnionych

Zakładamy iż więzy działające w układzie są skleronomiczne oraz siły działające w układzie nie zależą jawnie od czasu

Z zasady Lagrange'a (prac wirtualnych) w położeniu równowagi $\sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j = 0$

Równanie to po wprowadzeniu sił uogólnionych $Q_l \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$ i uogólnionych przesunięć wirtualnych δq_l ($l=1,\ldots,f$ -liczba stopni swobody) przyjmuje postać

$$\sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} X_j \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^{f} \left(\sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l = \sum_{l=1}^{f} Q_l \delta q_l = 0$$

Z uwagi na dowolność δq_l powyższe równanie jest równoważne układowi równań $Q_l=0$ ($l=1,\ldots,f$)

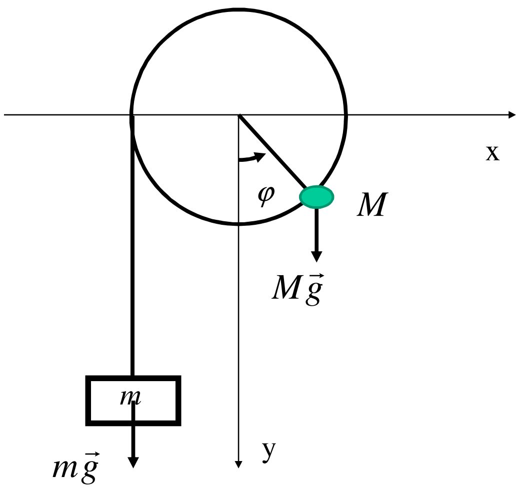
W stanie równowagi wszystkie siły uogólnione muszą się zerować

Gdy siły działające są potencjalne czyli $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$

to warunek ten jest równoważny temu by $\frac{\partial V}{\partial q_l} = 0$ ($l=1,\ldots,f$)

Można pokazać iż stabilnemu położeniu odpowiada przypadek gdy potencjał w punkcie równowagi przyjmuje wartość minimalną

Do ciała o masie M poruszającego się po okręgu o promieniu R doczepiono nić o długości l na końcu której zwisa ciało o masie m



1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i napisać równanie Lagrange'a II rodzaju
2) Znaleźć położenie równowagi, w którym ciała umieszczone bez prędkości początkowej będą spoczywały
3) Określić ruch układu wokół położenia równowagi gdy w trakcie drgań układ pozostaje blisko położenia równowagi

(częściowo do samodzielnej analizy)

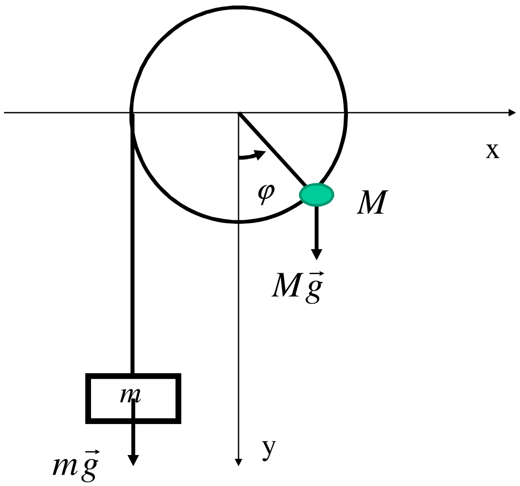
Problem rozwiązujemy zakładając iż ciało o masie m może poruszać się tylko w kierunku poziomym a więc ma 1 stopień swobody jego położenie opisuje zmienna y_m .

Ciało o masie M może poruszać się po okręgu (krzywej) a więc ma 1 stopień swobody. Do opisu jego położenia może służyć kąt φ pokazany ma rysunku (w pełni opisuje ono położenie ciała na okręgu a równanie więzów $x_M^2 + y_M^2 - R^2 = 0$ nie wprowadza ograniczenia na wartości kąta φ)

Na skutek połączenia obu ciał nicią dochodzi dodatkowy warunek więzów

$$y_m + \frac{3}{2}R\pi - R\varphi = l \Rightarrow y_m = l - \frac{3}{2}R\pi + R\varphi$$

a więc liczba stopni swobody układu maleje z 2 do 1 . Do opisu ruchu wystarcza 1 współrzędna uogólniona . Może być nią kąt φ od którego można uzależnić także położenie ciała o masie m



1 współrzędna uogólniona φ.

Związek współrzędnych x_M oraz y_M określających położenie ciała o masie M z kątem φ

$$x_M = R\sin\varphi \Rightarrow \dot{x}_M = R\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$y_M = R\cos\varphi \Rightarrow \dot{y}_M = -R\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Związek współrzędnej y_m określającej położenie ciała o masie m z kątem φ

$$y_m = l - \frac{3}{2}R\pi + R\varphi \Rightarrow \dot{y}_m = R\dot{\varphi}$$

Energia kinetyczna układu ciał

$$T = \frac{m}{2}\dot{y}_m^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2\right) = \frac{m}{2}\left(R\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(R\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m+M\right)R^2\dot{\varphi}^2 = T\left(\dot{\varphi}\right)$$

Energia potencjalna układu ciał $V = -mgy_m - Mgy_M$

Ten wybór zapewnia iż są spełnione relacje określające związek potencjału z siłami działającymi na ciało o masie M $F_{Mx} = -\frac{\partial V}{\partial x_M} = 0$ $\quad F_{My} = -\frac{\partial V}{\partial y_M} = Mg$

oraz ciało o masie m $F_{mx} = -\frac{\partial V}{\partial x_m} = 0$ $\quad F_{my} = -\frac{\partial V}{\partial y_m} = mg$

Uzależniając energie potencjalną od współrzędnej uogólnionej mamy

$$V = -mgy_m - Mgy_M = -mgR\varphi - MgR\cos\varphi + const$$

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\varphi}^2 + mgR\varphi + MgR\cos\varphi - const$

Równanie Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow (m+M)R^2\ddot{\varphi} - mgR + MgR\sin\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{g(m - M\sin\varphi)}{(M+m)R}$$

Wyznaczenie położenia równowagi oraz opis ruchu wokół położenia równowagi

W położeniu równowagi $\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{m}{M}$

Ponieważ $\sin\varphi \le 1$ to położenie równowagi może wystąpić tylko w przypadku gdy

$m \le M$ przy czym uwzględniając to iż $V = -mgR\varphi - MgR\cos\varphi + const$ $\frac{dV}{d\varphi} = -mgR + MgR\sin\varphi$

widać iż w położeniu tym $\frac{dV}{d\varphi} = 0$

Oznaczając przez φ_0 kąt spełniający warunek $\sin\varphi_0 = \frac{m}{M}$ i zakładając iż $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$

można pokazać iż

$\frac{dV}{d\varphi} > 0$ dla $\varphi > \varphi_0$ oraz $\frac{dV}{d\varphi} < 0$ dla $\varphi < \varphi_0$

A zatem w położeniu odpowiadającym $\varphi = \varphi_0$ potencjał $V = -mgR\varphi - MgR\cos\varphi$ osiąga minimum czyli jest to punkt równowagi trwałej (stabilnej).

Wprowadzamy nową współrzędną $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ określającą wychylenie z położenia równowagi. Zachodzą relację

$\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi_0 + \tilde{\varphi}) = \cos(\varphi_0)\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) =$$

$\dot{\varphi} \approx \dot{\tilde{\varphi}}$

$$= \sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0)}\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\cos(\tilde{\varphi}) - \frac{m}{M}\sin(\tilde{\varphi})$$

Energia kinetyczna $T = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\tilde{\varphi}}^2 = T(\dot{\tilde{\varphi}})$

Dla niewielkich wychyleń układu z położenia równowagi $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ możemy znaleźć przybliżoną postać potencjału i funkcji Lagrange'a przyjmując iż

$$\sin(\tilde{\varphi}) \approx \tilde{\varphi} \qquad \cos(\tilde{\varphi}) \approx 1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}$$

W tym przybliżeniu $\cos(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\cos(\tilde{\varphi}) - \frac{m}{M}\sin(\tilde{\varphi}) \approx \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) - \frac{m}{M}\tilde{\varphi}$

Potencjał

$$V = -mgR\varphi - MgR\cos(\varphi) \approx$$

$$\approx -mgR(\tilde{\varphi} + \varphi_0) - MgR\left[\sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) - \frac{m}{M}\tilde{\varphi}\right] =$$

$$-mgR\tilde{\varphi} - mgR\varphi_0 - MgR\sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\left(1 - \frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) + mgR\tilde{\varphi} =$$

$$V \approx -mgR\tilde{\varphi} - mgR\varphi_0 - MgR\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}\left(1-\frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) + mgR\tilde{\varphi} =$$

$$= +\frac{1}{2}MgR\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}\tilde{\varphi}^2 + const = \frac{1}{2}gR\sqrt{M^2-m^2}\tilde{\varphi}^2 + const$$

Potencjał V proporcjonalny do $\tilde{\varphi}^2$
Brak członów proporcjonalnych do $\tilde{\varphi}$
V-$const$ ≥ 0 $\rightarrow$Potencjał o podobnej postaci jak dla oscylatora harmonicznego

Przybliżona postać funkcji Lagrange'a

$$L = T - V \approx$$

$$\frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\tilde{\varphi}}^2 - \frac{1}{2}gR\sqrt{M^2-m^2}\tilde{\varphi}^2 - const$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{\varphi}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{\varphi}} = 0 \Rightarrow (m+M)R^2\ddot{\tilde{\varphi}} + gR\sqrt{M^2-m^2}\tilde{\varphi} = 0 \Rightarrow$$

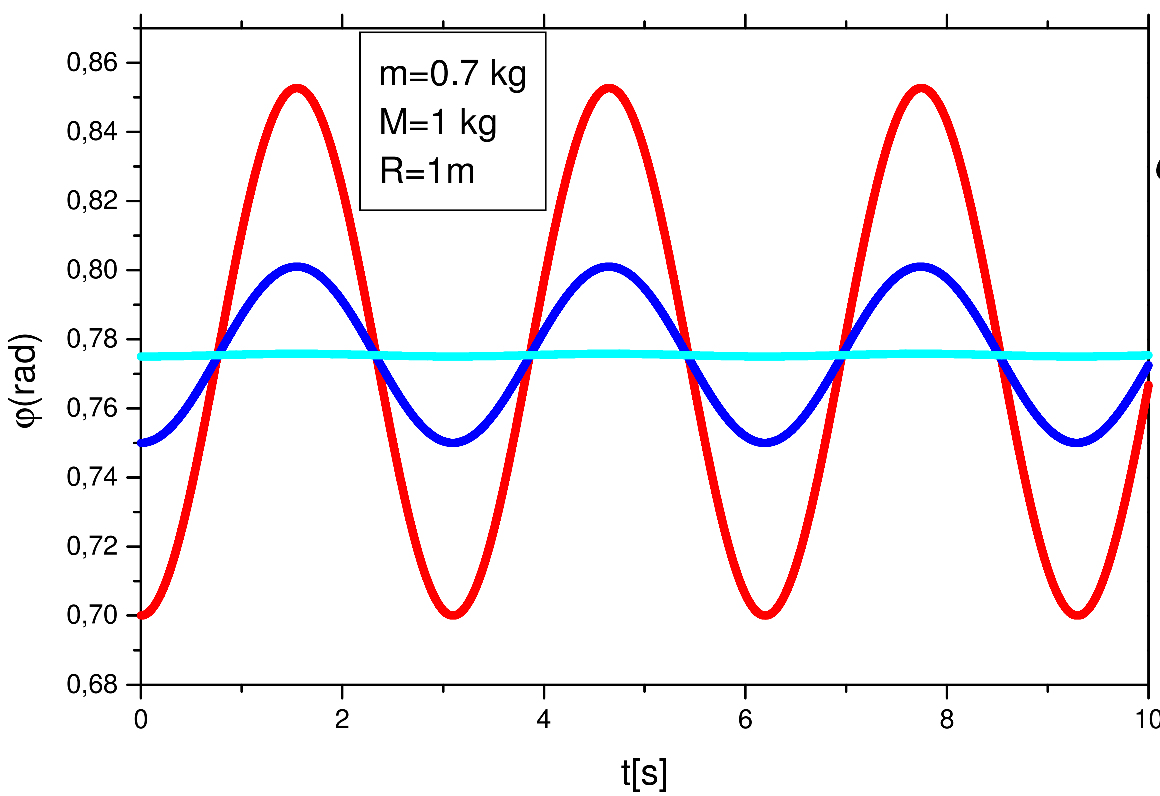
$$\Rightarrow \ddot{\tilde{\varphi}} + \frac{\sqrt{M^2-m^2}}{M+m}\frac{g}{R}\tilde{\varphi} = 0$$

Równanie to opisuje drgania harmoniczne zachodzące wokół położenia

równowagi z częstością kołową $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{M+m}\frac{g}{R}} = \sqrt{\sqrt{\frac{(M-m)(M+m)}{(M+m)^2}}\frac{g}{R}} = \sqrt{\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\frac{g}{R}}$

Przykład: m=0.7 kg, M=1 kg, sin(φ_0)=0,7, φ_0 =0.775 rad

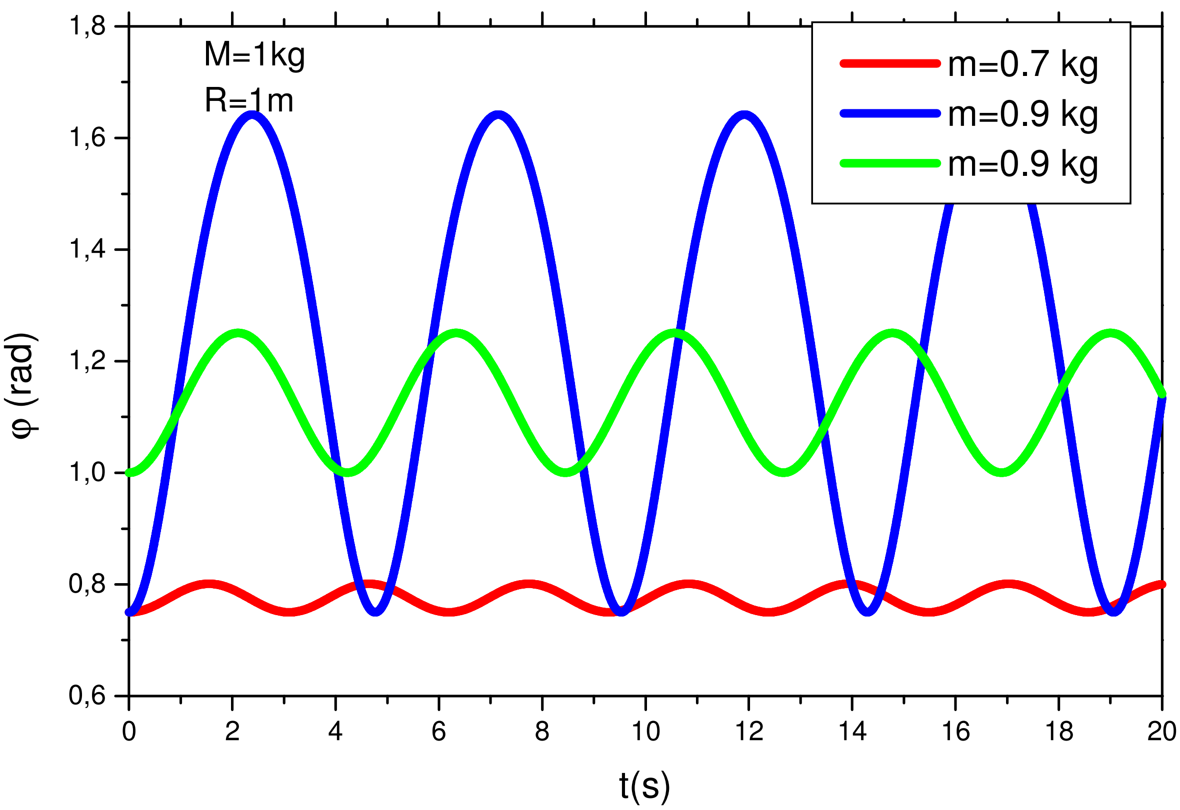
$$\omega = 2{,}03\,\frac{rad}{s} \qquad\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}1s$$



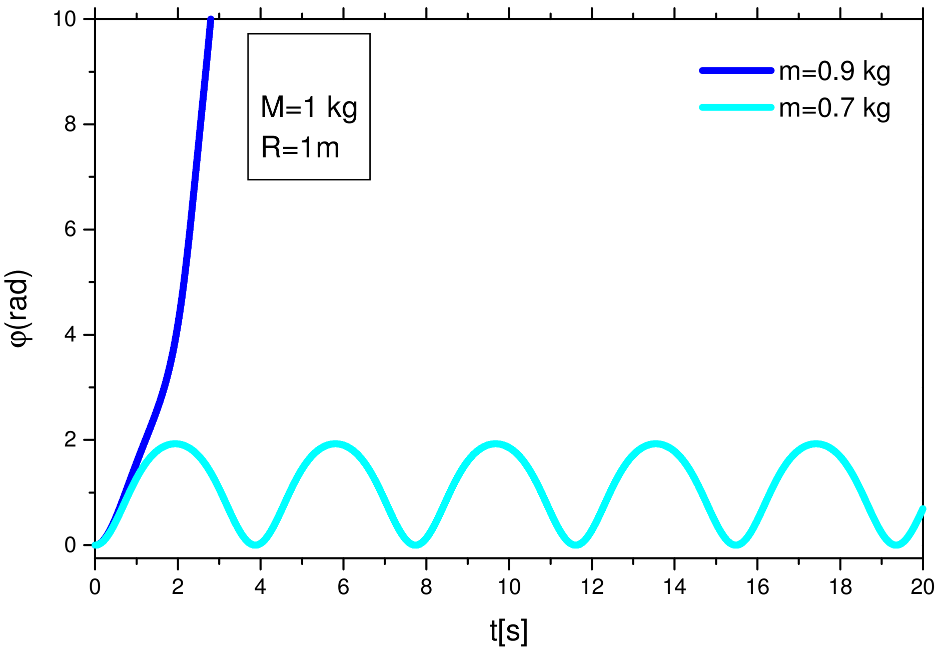
$$\dot{\varphi}(t=0) = 0$$

Przykład: m=0.9 kg, M=1 kg, $\sin(\varphi_0)$=0,9, φ_0 =1.11 rad

$$\omega = 1{,}5\,\frac{rad}{s} \qquad\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 4{,}19\,s$$



$$\dot{\varphi}(t=0) = 0$$



$$\dot{\varphi}(t=0)=0$$

Gdy wychylenie początkowe od położenia równowagi będzie zbyt duże ruch przestaje mieć charakter drgań

Gdy $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$ to potencjał V osiąga maksimum dla $\varphi = \varphi_0$ takiego iż $\sin\varphi_0 = \frac{m}{M}$

$$V = -mgR\varphi - MgR\cos\varphi \qquad \frac{dV}{d\varphi} = -mgR + MgR\sin\varphi$$

$\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi_0 + \tilde{\varphi}) = \cos(\varphi_0)\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) =$$

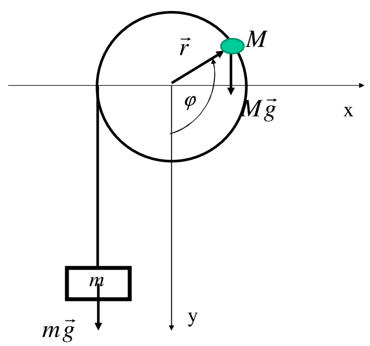
$$= -\sqrt{1-\sin^2(\varphi_0)}\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tilde{\varphi}) \approx -\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{M}\left(1-\frac{\tilde{\varphi}^2}{2}\right) - \frac{m}{M}\sin\tilde{\varphi}$$

$$V \approx -\frac{1}{2}gR\sqrt{M^2-m^2}\,\tilde{\varphi}^2 + const$$

$V\text{-}const \le 0$

Potencjał inny od potencjału oscylatora

$$L \approx \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{\tilde{\varphi}}^2 + \frac{1}{2}gR\sqrt{M^2-m^2}\,\tilde{\varphi}^2 + const$$



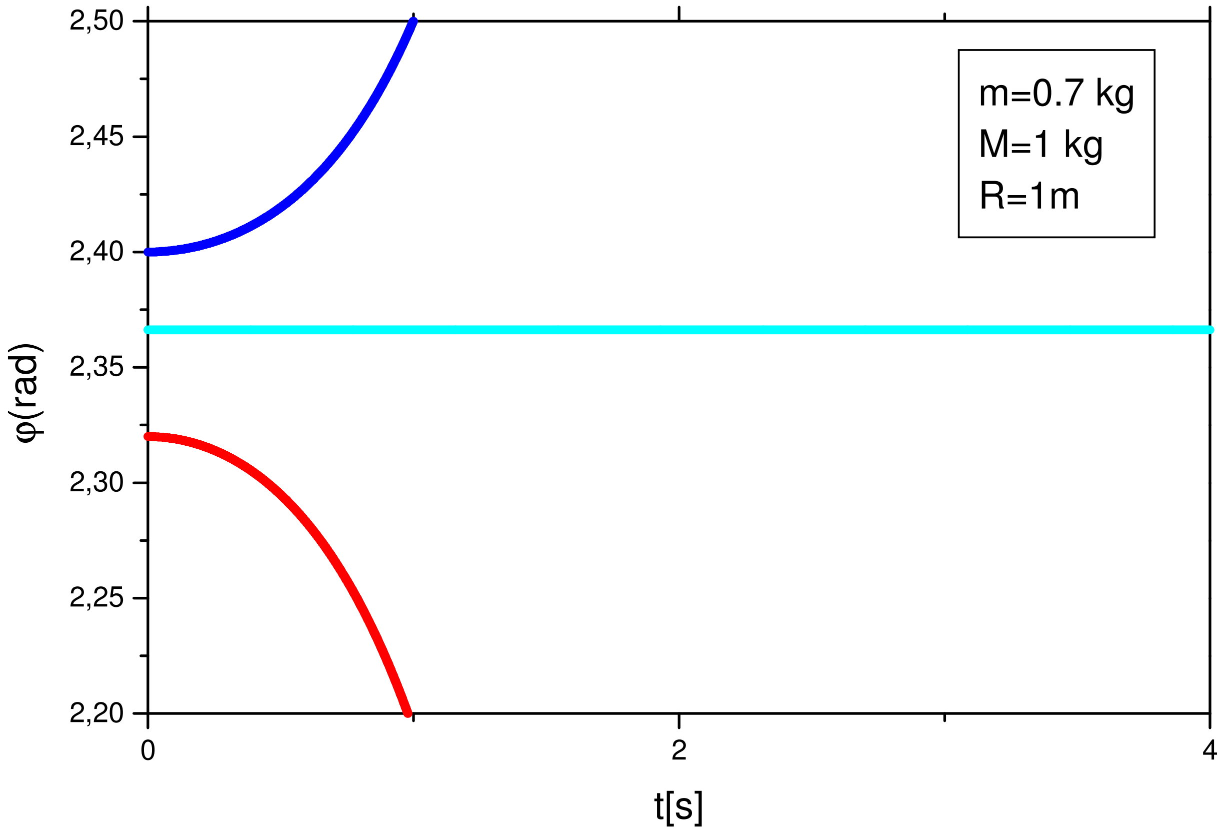
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\tilde{\varphi}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\tilde{\varphi}} = 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{\varphi}} - \sqrt{\frac{M-m}{m+m}}\frac{g}{r}\tilde{\varphi} =$$

$$\tilde{\varphi} = A\exp(\gamma t) + B\exp(-\gamma t)$$

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{\frac{M-m}{m+m}}\frac{g}{r}}$$

Układ wychylony z położenia równowagi będzie oddalał się od tego położenia

Przykład: m=0.7 kg, M=1 kg, $\sin(\varphi_0)=0,7$, $\varphi_0=2.3661$ rad



$$\dot{\varphi}(t=0)=0$$