



OMNIS2

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Zasada d'Alemberta, Równania Lagrange'a I rodzaju



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Rozpatrujemy ruch układu n punktów z dodatkowymi ograniczeniami ruchu w postaci **więzów holonomicznych dwustronnych**

Więzy holonomiczne - jeżeli dane są przy pomocy równań lub nierówności zależnych w ogólności od składowych wektorów wodzących punktów materialnych i czasu (wprowadzających ograniczenia na położenia punktów materialnych)

więzy dwustronne $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$ p -liczba więzów

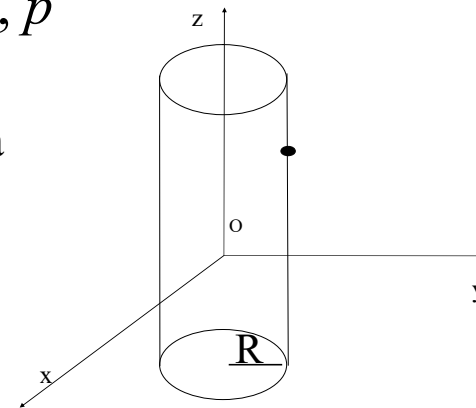
W przestrzeni 3-Dim liczba więzów $p \leq 3n$, liczba stopni swobody $= 3n - p$

więzy jednostronne $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$

Przykład więzów holonomicznych dwustronnych:

- a) Punkt materialny poruszający się po powierzchni walca o promieniu R i osi symetrii pokrywającej się z osią Oz

$$f_1(\vec{r}, t) = f_1(\vec{r}) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$



- b) Punkt materialny poruszający się w przestrzeni trójwymiarowej po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach $x + y + z = 0$ i $x + 2y + 5z = 0$

$$f_1(\vec{r}, t) = f_1(\vec{r}) = x + y + z = 0$$

$$f_2(\vec{r}, t) = f_2(\vec{r}) = x + 2y + 5z = 0$$

c) Dwa punkty materialne połączone sztywnym prętem o długości l

$$f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

Przykład więzów holonomicznych jednostronnych

Dwa punkty materialne połączone nierozciągliwą nicią o długości l

$$f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = f_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0$$

Więzy **holonomiczne** nakładają ograniczenia nie tylko na położenia ale i na prędkości punktów materialnych, które można otrzymać różniczkując równania więzów po czasie np. z równania $f_1(\vec{r}, t) = f_1(\vec{r}) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ wynika iż $\frac{df_1}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$

Nakładają też ograniczenia na przyspieszenia, które można otrzymać różniczkując równania więzów dwukrotnie po czasie

Więzy **nieholonomiczne** nakładają warunki na prędkości ale nie można ich otrzymać różniczkując po czasie równań zależnych tylko od położenia punktów materialnych i czasu. Więzy te nie ograniczają położenia zajmowanych przez punkty materialne, gdy rozpatrujemy ruch w skończonym przedziale czasu (występują np. w trakcie toczenia kuli po podłożu bez poślizgu).

Więzy skleronomiczne - jeśli w równaniach więzów czas nie występuje **jawnie** np. omawiane dotąd przykłady

Więzy reonomiczne - jeśli w równaniach więzów występuje **jawnie** czas

Np. ruch punktu materialnego po drgającej płaszczyźnie

$$f_1(\vec{r}, t) = x - A \sin(\omega t) = 0$$

W przypadku ruchu punktu materialnego po gładkiej powierzchni o równaniu $f = f(\vec{r}, t) = 0$ pojawia się siła reakcji więzów, prostopadła do powierzchni.

$$\vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad } f$$

W układzie kartezjańskim

$$\vec{F}_R = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

λ - skalarny współczynnik będący funkcją wektora wodzącego, prędkości i czasu nazywany nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a

Siły tarcia nie można traktować jako siły reakcji bo nie jest prostopadła do powierzchni

Równanie ruchu Newtona: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R$,

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ - siła wypadkowa działająca na ciało nie związana z więzami

Po rozpisaniu na składowe w układzie kartezjańskim otrzymujemy równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

Powyższy układ równań wraz z równaniem więzów $f = f(\vec{r}, t) = 0$ przy znajomości warunków początkowych ruchu pozwala na określenie $x(t), y(t), z(t)$ i λ czyli wyznaczenie ruchu punktu i siły reakcji

Równania Lagrange'a I rodzaju zapisane dla punktu materialnego poruszającego się po krzywej leżącej na przecięciu powierzchni o równaniach $f_1(\vec{r}, t) = 0$ i $f_2(\vec{r}, t) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = F_x + F_{Rx} \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = F_y + F_{Ry} \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = F_z + F_{Rz} \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{-nieoznaczone mnożniki Lagrange'a}$$

Są one równoważne równaniom wyrażającym drugą zasadę dynamiki Newtona z uwzględnieniem siły reakcji więzów $\vec{F}_R = \lambda_1 \text{grad}f_1 + \lambda_2 \text{grad}f_2$. Zakładamy iż siła ta jest prostopadła do krzywej po której porusza się punkt materialny.

Równania te można zapisać w postaci wektorowej wzorem

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R = \vec{F} + \lambda_1 \cdot \text{grad}f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad}f_2$$

$$f_1(\vec{r}, t) = 0, \quad f_2(\vec{r}, t) = 0$$

Zasada d'Alemberta dla punktu materialnego, na który nie nałożono więzów

Z równania wyrażającego II zasadę dynamiki Newtona dla swobodnego punktu materialnego (na który nie nałożono więzów) wynika poniższa relacja wyrażająca zasadę d'Alemberta

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} - m\ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$\delta\vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ -wektor zwany wektorem przesunięcia wirtualnego określający możliwe a priori kierunki infinitezymalne małego przemieszczenia punktu materialnego w trakcie ruchu gdy więzy nie zależą od czasu będący dla swobodnego punktu materialnego wektorem dowolnym

Z dowolności $\delta\vec{r}$ wynika iż $(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

A zatem zasada d'Alemberta w rozważanym przypadku jest równoważna równaniom Newtona. W układzie kartezjańskim

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k} \quad \delta\vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$$

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Leftrightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0$$

Z dowolności $\delta\vec{r}$ wynika iż można przyjąć w powyższym równaniu iż $\delta y = \delta z = 0$

Wówczas równanie redukuje się do postaci $(F_x - m\ddot{x})\delta x = 0$

Ponieważ ma być ono spełnione dla dowolnego δx to musi zachodzić

$$F_x = m\ddot{x}$$

Podobnie można pokazać iż $F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z} \rightarrow \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

Z równania ruchu Newtona $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R$, z uwzględnieniem siły reakcji więzów $\vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad } f$ wynika **zasada d'Alemberta dla punktu materialnego poruszającego się po powierzchni o równaniu $f = f(\vec{r}, t) = 0$** .

$$\begin{aligned}
 (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \Rightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0, \\
 f(\vec{r}, t) &= 0 \\
 \delta\vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k} &\text{ jest dowolnym wektorem stycznym do powierzchni} \\
 \text{spełniającym warunek } \text{grad } f \cdot \delta\vec{r} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0
 \end{aligned}$$

Dowód

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f \cdot \delta\vec{r} = 0 &\Rightarrow \vec{F}_R \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad \text{a zatem} \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_R - m\ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\vec{F} + \vec{F}_R - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0
 \end{aligned}$$

Praca siły reakcji na przesunięciach wirtualnych znika

$\delta\vec{r}$ -przesunięcie wirtualne zgodne z więzami. Określa możliwe kierunki infinitezymalnie małego przemieszczenia punktu mat. przy założeniu iż powierzchnia się nie porusza

Można pokazać iż z zasady d'Alemberta dla rozważanego przypadku wynikają równania wyrażające II zasadę dynamiki Newtona.

Z równania $\text{grad } f \cdot \delta \vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$

można gdy $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ wyznaczyć δx w funkcji $\delta y, \delta z$ otrzymując $\delta x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z}{\frac{\partial f}{\partial x}}$

Wówczas otrzymujemy $(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$

$$(F_y - m\ddot{y} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(F_x - m\ddot{x}))\delta y + (F_z - m\ddot{z} - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(F_x - m\ddot{x}))\delta z = 0$$

Ponieważ powyższa równość musi zachodzić przy dowolnych $\delta y, \delta z$ to wynikają z niej równania

$$(F_y - m\ddot{y} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(F_x - m\ddot{x})) = 0 \quad (F_z - m\ddot{z} - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(F_x - m\ddot{x})) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{F_x - m\ddot{x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{F_y - m\ddot{y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{F_z - m\ddot{z}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} -\lambda$$

λ - skalarny współczynnik który po wyznaczeniu ruchu punktu można przedstawić jako funkcje czasu

$$\frac{F_x - m\ddot{x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{F_y - m\ddot{y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{F_z - m\ddot{z}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Równania te nazywamy
**równaniami Lagrange'a I
rodzaju** zapisanymi dla
punktu materialnego
poruszającego się po
powierzchni o równaniu
 $f = f(\vec{r}, t) = 0$

λ -nieoznaczony mnożnik Lagrange'a

Powyższy układ równań stanowi zapis w układzie kartezjańskim
wynikającego z II zasady dynamiki Newtona równania

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R \quad \text{w którym} \quad \vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad } f$$

$$f = f(\vec{r}, t) = 0$$

Ruch punktu materialnego po gładkiej krzywej możemy opisać jako ruch po linii leżącej na przecięciu dwóch powierzchni o równaniach $f_1(\vec{r}, t) = 0$ oraz $f_2(\vec{r}, t) = 0$

Na ciało działa siła reakcji więzów

$$\vec{F}_R = \lambda_1 \text{grad} f_1 + \lambda_2 \text{grad} f_2 \quad \text{gdzie } \lambda_1 \text{ i } \lambda_2 \text{ skalarne współczynniki do wyznaczenia}$$

Można pokazać iż zasada d'Alemberta dla punktu materialnego poruszającego się po krzywej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \Rightarrow \\ (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z &= 0, \\ f_1(\vec{r}, t) &= 0, \quad f_2(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}$$

$\delta\vec{r}$ jest dowolnym wektorem stycznym do krzywej spełniającym warunki:

$$\text{grad} f_1 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0,$$

$$\text{grad} f_2 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0$$

Wektor $\delta\vec{r}$ nazywamy go wektorem przesunięcia wirtualnego zgodnego z więzami.

Wektor ten określa możliwe kierunki infinitezymalnie małego przemieszczenia punktu materialnego w układzie inercyjnym gdy równania więzów nie zależą jawnie od czasu (więzy są skleronomiczne)

Dowód $\text{grad } f_1 \cdot \delta\vec{r} = 0, \text{grad } f_2 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F}_R \cdot \delta\vec{r} = 0$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_R - m\ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow (\vec{F} + \vec{F}_R - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Wyprowadzenie z zasady d'Alemberta dla punktu poruszającego się po krzywej równań Lagrange'a I rodzaju mających postać równań Newtona z siłami reakcji więzów .

(Zasada d'Alemberta dla punktu materialnego poruszającego się po krzywej).

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0, \quad (*)$$

$$f_1(\vec{r}, t) = 0 \quad f_2(\vec{r}, t) = 0$$

$\delta\vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ jest wektorem przesunięcia wirtualnego stycznym do krzywej spełniającym warunki

$$\text{grad} f_1 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0 \quad (**)$$

$$\text{grad} f_2 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0 \quad (***)$$

Równanie (*) przy uwzględnieniu równań (**) i (***) można zapisać w postaci

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = (\vec{F} + \lambda_1 \text{grad} f_1 + \lambda_2 \text{grad} f_2 - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

mnożniki Lagrange'a (będące na tym etapie rozważań dowolnymi skalarami)

Równanie to można zapisać w układzie kartezjańskim w postaci

$$\left(F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - m\ddot{x} \right) \delta x + \left(F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - m\ddot{y} \right) \delta y + \left(F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0$$

Z równań $\text{grad}f_i \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_i}{\partial z} \delta z = 0 \quad i=1,2$

można np. gdy $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ wyznaczyć δx oraz δy w funkcji δz .

Wówczas δz jest dowolne, a δx oraz δy - wyznaczone.
Dobierzmy λ_1 i λ_2 tak, aby zachodziło

$$F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - m\ddot{x} = 0$$

$$F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - m\ddot{y} = 0$$

Wówczas

$$\left(F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - m\ddot{x} \right) \delta x + \left(F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - m\ddot{y} \right) \delta y + \left(F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0$$

$$\Rightarrow \left(F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0$$

Z dowolności δz wynika iż musi być spełnione równanie

$$F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} = 0$$

Otrzymaliśmy układ 3 równań

$$F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - m\ddot{x} = 0$$

$$F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - m\ddot{y} = 0$$

$$F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - m\ddot{z} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = F_x + F_{Rx} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = F_y + F_{Ry} \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = F_z + F_{Rz} \end{aligned}$$

Równania te nazywamy **równaniami Lagrange'a I rodzaju** zapisanymi dla punktu materialnego poruszającego się po krzywej leżącej na przecięciu powierzchni o równaniach $f_1(\vec{r}, t) = 0$ $f_2(\vec{r}, t) = 0$

Są one równoważne równaniom wyrażającym drugą zasadę dynamiki z uwzględnieniem siły reakcji więzów $\vec{F}_R = \lambda_1 \text{grad} f_1 + \lambda_2 \text{grad} f_2$

Przykład: Wyznaczenie ruchu ciała (punktu materialnego) o masie m po gładkiej powierzchni walca-pod wpływem jednocześnie siły harmoniczej $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ i ciężkości $\vec{F}_c = -mg\vec{e}_z$ -rozważania oparte na zasadzie d'Alemberta

Wypadkowa siła (bez uwzględnienia siły reakcji) :

$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_c = -kx\vec{i} - ky\vec{j} + (-kz - mg)\vec{k} =$$

$$\Rightarrow F_x = -kx, \quad F_y = -ky \quad F_z = -kz - mg$$

Równanie więzów:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Zasada d'Alemberta :

$$\begin{aligned} (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \Rightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-kx - m\ddot{x})\delta x + (-ky - m\ddot{y})\delta y + (-kz - mg - m\ddot{z})\delta z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

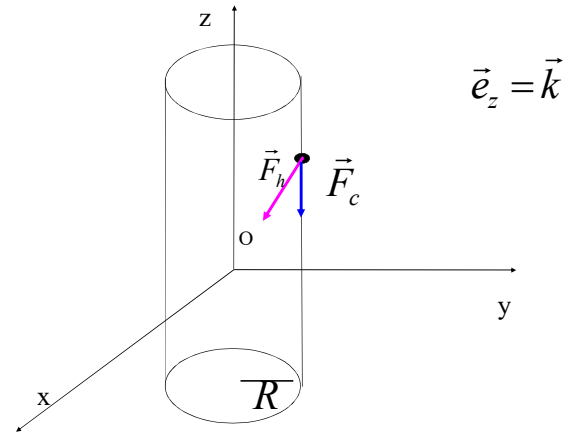
Warunek na przesunięcie wirtualne $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ wynikający z istnienia więzów

$$\text{grad}f \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \Rightarrow 2x\delta x + 2y\delta y = 0 \Rightarrow \delta y = -\frac{x}{y}\delta x \quad (y \neq 0)$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku w równaniu (1) otrzymujemy

$$(-kx - m\ddot{x})\delta x - \frac{x}{y}(-ky - m\ddot{y})\delta x + (-kz - mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-kx - m\ddot{x} + kx + \frac{mx\ddot{y}}{y} \right) \delta x + (-kz - mg - m\ddot{z})\delta z = 0$$



$$\left(-m\ddot{x} + \frac{mxy\ddot{y}}{y}\right)\delta x + (-kz - mg - m\ddot{z})\delta z = 0$$

Ze względu na brak wynikających z więzów dalszych ograniczeń na możliwe wartości $\delta x, \delta z$ równanie to musi być spełnione dla dowolnych $\delta x, \delta z$

$$\begin{aligned} \delta z = 0 &\Rightarrow \left(-m\ddot{x} + \frac{mxy\ddot{y}}{y}\right)\delta x = 0 \xRightarrow{\delta x \text{ dowolne}} -m\ddot{x} + \frac{mxy\ddot{y}}{y} = 0 \Rightarrow -\ddot{x}y + x\ddot{y} = 0 \\ \delta x = 0 &\Rightarrow (-kz - mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \xRightarrow{\delta z \text{ dowolne}} -kz - mg - m\ddot{z} = 0 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy dwa równania, które muszą być spełnione w trakcie ruchu ciała

$$-kz - mg - m\ddot{z} = 0 \quad (2)$$

$$-\ddot{x}y + x\ddot{y} = 0 \quad (3)$$

Trzeba je rozwiązać uwzględniając dodatkowo równanie więzów

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

które nie wprowadza jednak ograniczenia na z

W związku z tym na rozwiązanie równania (2) nie wpływa równanie więzów.

Uwaga. Można pokazać iż równanie (3) można otrzymać również w przypadku gdy $y=0$ przyjmując iż $\delta x = -\frac{y}{x}\delta y$ ($x \neq 0$)

Rozwiązanie równania $-kz - mg - m\ddot{z} = 0$

$$-kz - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach niejednorodne.

Pełne rozwiązanie tego równania jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

oraz rozwiązania szczególnego równania pełnego

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$$

Równanie jednorodne można zapisać w postaci

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{gdzie} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Równanie to ma taką postać jak równanie opisujące jednowymiarowy oscylator harmoniczny nietłumiony i jego ogólne rozwiązanie ma postać

$$z_{og} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Rozwiązania szczególnego równania pełnego poszukujemy w rozważanym przypadku w postaci stałej $z_{szcz} = C$.

Po wstawieniu zapostulowanej postaci rozwiązania do pełnego równania

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$$

otrzymujemy warunek

$$0 + \frac{k}{m}C = -g \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

A zatem rozwiązanie ogólne równania pełnego ma postać

$$z(t) = z_{og} + z_{szcz} = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg}{k}$$

Stałe A i B możemy określić z warunków początkowych ruchu

Zakładając np. iż $z(t=0) = 0, \dot{z}(t=0) = 0$ i uwzględniając to iż

$$\dot{z}(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{mamy } B=0, A = \frac{mg}{k}, z(t) = \frac{mg}{k} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - 1 \right]$$

Ruch ciała w kierunku pionowym ma charakter drgań harmoniczych

wokół punktu $z = -\frac{mg}{k}$ z częstością kołową $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Rozwiązanie równania $-\ddot{x}y + x\ddot{y} = 0$

Równanie to należy rozwiązać z uwzględnieniem równania więzów $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

W zasadzie można by wykorzystując równanie więzów uzależnić y od x (oraz $\dot{y}$ od x , $\dot{x}$ i $\ddot{x}$) i rozwiązać otrzymane równanie różniczkowe dla zmiennej x .

W praktyce w celu uzyskania analitycznego rozwiązania celowe jest wprowadzić nową zmienną φ taką iż $x = R \cos(\varphi)$ $y = R \sin(\varphi)$ przy czym równanie więzów nie wprowadza ograniczeń na wartości przyjmowane przez tą zmienną

$$x^2 + y^2 - R^2 = R^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - R^2 \equiv 0$$

Chcemy wyrazić równanie $-\ddot{x}y + x\ddot{y} = 0$ przy pomocy zmiennej φ (będącej współrzędną w układzie cylindrycznym)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -R \sin(\varphi) \dot{\varphi} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = R \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} = [-R \cos(\varphi) \dot{\varphi}] \dot{\varphi} + [-R \sin(\varphi)] \ddot{\varphi} = -R \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - R \sin(\varphi) \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} = [-R \sin(\varphi) \dot{\varphi}] \dot{\varphi} + [R \cos(\varphi)] \ddot{\varphi} = -R \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + R \cos(\varphi) \ddot{\varphi}$$

$$-\ddot{x}y + x\ddot{y} = 0 \Rightarrow -[-R \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - R \sin(\varphi) \ddot{\varphi}] R \sin(\varphi) + R \cos(\varphi) [-R \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + R \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + R^2 \sin^2(\varphi) \ddot{\varphi} - R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + R^2 \cos^2(\varphi) \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 [\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)] \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi(t) = At + B$$

$$x = R \cos(\varphi) = R \cos(At + B) \Rightarrow \dot{x} = -RA \sin(At + B)$$

$$y = R \sin(\varphi) = R \sin(At + B) \Rightarrow \dot{y} = RA \cos(At + B)$$

Stałe A i B możemy określić z warunków początkowych ruchu

$$\text{Zakładając np. iż } x(t=0) = R, \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$$

$$\text{I uwzględniając to iż } x(t=0) = R \cos(B) \quad \dot{y}(t=0) = RA \cos(B)$$

$$\text{mamy } B=0, \quad A = \frac{\dot{y}_0}{R}$$

A zatem

$$x = R \cos\left(\frac{\dot{y}_0}{R}t\right) \quad y = R \sin\left(\frac{\dot{y}_0}{R}t\right)$$

Wyznaczenie ruchu ciała (punktu materialnego) o masie m po powierzchni walca oraz siły reakcji więzów -rozważania oparte na równaniach Lagrange'a I rodzaju

Wypadkowa siła (bez uwzględnienia siły reakcji) :

$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_c = -kx\vec{i} - ky\vec{j} + (-kz - mg)\vec{k} =$$

$$\Rightarrow F_x = -kx \quad F_y = -ky \quad F_z = -kz - mg$$

Równanie więzów

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \cdot \text{grad} f \quad \text{gdzie} \quad \vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad} f \quad \text{-siła reakcji}$$

Po rozpisaniu na składowe w układzie kartezjańskim

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx + 2\lambda x$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -ky + 2\lambda y$$

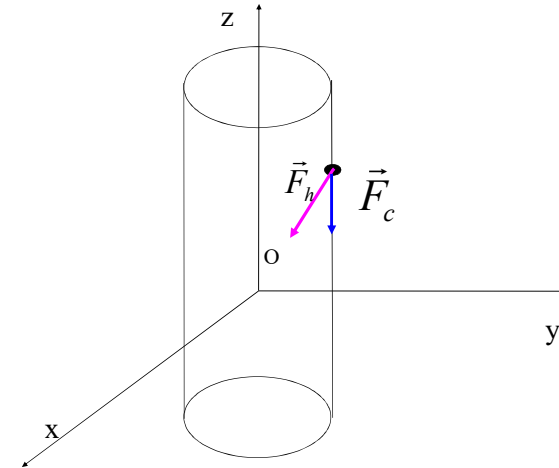
$$m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -kz - mg$$

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k} = \lambda \cdot \text{grad} f$$

$$F_{Rx} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x$$

$$F_{Ry} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y$$

$$F_{Rz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$



$$m\ddot{x} = -kx + 2\lambda x \Rightarrow \lambda = \frac{m\ddot{x} + kx}{2x}$$

$$m\ddot{y} = -ky + 2\lambda y \Rightarrow m\ddot{y} = -ky + 2y \frac{m\ddot{x} + kx}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mx\ddot{y} = -kxy + y(m\ddot{x} + kx) \Rightarrow x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{z} = -kz - mg$$

Eliminacja mnożnika Lagrange'a λ pozwoliła na uzyskanie równań otrzymanych wcześniej przy pomocy zasady d'Alemberta, których rozwiązanie przy uwzględnieniu warunku więzów prowadzi do znalezienia ruchu ciała.

Składowe siły reakcji przy uwzględnieniu znalezionych wcześniej rozwiązań

$$x = R \cos\left(\frac{\dot{y}_0}{R} t\right) \quad y = R \sin\left(\frac{\dot{y}_0}{R} t\right) \longrightarrow \ddot{x} = -\frac{\dot{y}_0^2}{R} \cos\left(\frac{\dot{y}_0}{R} t\right) \quad \ddot{y} = -\frac{\dot{y}_0^2}{R} \sin\left(\frac{\dot{y}_0}{R} t\right)$$

są równe $F_{Rz} = 0$

$$F_{Rx} = 2\lambda x = m\ddot{x} + kx = \left(kR - \frac{m\dot{y}_0^2}{R}\right) \cos\left(\frac{\dot{y}_0}{R} t\right) \quad F_{Ry} = 2\lambda y = m\ddot{y} + ky = \left(kR - \frac{m\dot{y}_0^2}{R}\right) \sin\left(\frac{\dot{y}_0}{R} t\right)$$

Uwaga : Siłę reakcji więzów działającą na analizowane ciało można zawsze uzależnić w ogólności od **położenia, prędkości ciała oraz czasu** bez konieczności rozwiązywania równań ruchu wykorzystując równania Lagrange'a I rodzaju oraz równanie powstałe w wyniku dwukrotnego zróźniczkowania po czasie równania więzów. W rozważanym przykładzie w którym więzy są skleronomiczne zależność jawna od czasu nie występuje

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0 \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\frac{k}{m}(x^2 + y^2) +$$

$$m\ddot{x} = -kx + 2\lambda x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{2\lambda x}{m} \quad \xrightarrow{\text{green arrow}} \quad + \frac{4\lambda}{m}(x^2 + y^2) = 0$$

$$m\ddot{y} = -ky + 2\lambda y \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y + \frac{2\lambda y}{m} \quad \xrightarrow{\text{green arrow}} \quad$$

$$\lambda(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{m}{2(x^2 + y^2)} \left[\frac{k}{m}(x^2 + y^2) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] = \frac{m}{2R^2} \left[\frac{kR^2}{m} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] = \lambda(\dot{x}, \dot{y})$$

$$F_{Rx} = 2\lambda x = \frac{mx}{R^2} \left[\frac{kR^2}{m} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] = kx - \frac{x}{R} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R}$$

$$F_{Ry} = 2\lambda y = \frac{my}{R^2} \left[\frac{kR^2}{m} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] = ky - \frac{y}{R} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R}$$

Wyznaczenie ruchu punktu materialnego o masie m po powierzchni walca oraz sił reakcji więzów -rozważania oparte na równaniach Lagrange'a I rodzaju w układzie cylindrycznym

Wypadkowa siła (bez uwzględnienia siły reakcji) :

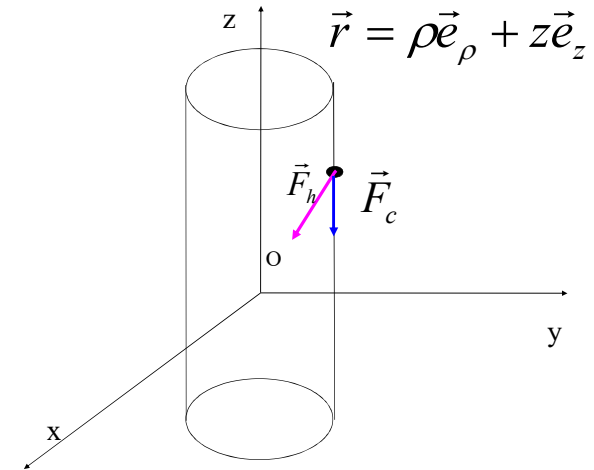
$$\vec{F} = -k\vec{r} - mg\vec{e}_z = -k\rho\vec{e}_\rho - kz\vec{e}_z - mg\vec{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\rho = -k\rho, F_\varphi = 0, F_z = -kz - mg$$

Równanie więzów

$$f(\rho) = \rho - R = 0$$

Równania Lagrange'a I rodzaju



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \cdot \text{grad } f \quad \text{gdzie } \vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad } f \text{ -siła reakcji}$$

Po rozpisaniu na składowe w układzie cylindrycznym

$$ma_\rho = F_\rho + \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} \Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -k\rho + \lambda$$

$$ma_\varphi = F_\varphi + \lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \Rightarrow m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0$$

$$ma_z = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -kz - mg$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

Z równania więzów wynika iż $\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0$ Warunki te trzeba uwzględnić w równaniach ruchu co pozwala na ich uproszczenie

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -k\rho + \lambda \Rightarrow -mR\dot{\varphi}^2 = -kR + \lambda \quad (*)$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \quad (**)$$

$$m\ddot{z} = -kz - mg \quad (***)$$

Równania (**) i (***) są identyczne z równaniami wcześniej otrzymanymi, zaś równanie (*) pozwala na określenie mnożnika Lagrange'a $\lambda = kR - mR\dot{\varphi}^2$

Siła reakcji $\vec{F}_R$ jest równa $\vec{F}_R = \lambda \cdot \text{grad} f$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z, f = \rho - R = 0 \Rightarrow \vec{F}_R = \lambda \vec{e}_\rho = (kR - mR\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho$$

Siła reakcji jest prostopadła do powierzchni bocznej walca

Składowe siły reakcji przy uwzględnieniu znalezionego wcześniej rozwiązania przy zadanych warunkach początkowych ruchu

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{R} t \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{R}$$

są równe

$$F_{R\rho} = kR - mR\dot{\varphi}^2 = kR - \frac{m\dot{\varphi}_0^2}{R} = \text{const} \quad F_{R\varphi} = 0 \quad F_{Rz} = 0$$

Przestrzeń konfiguracyjna $3n$ -wymiarowa dla układu n punktów materialnych

Układ złożony z n punktów obrazujemy przez pojedynczy punkt w przestrzeni konfiguracyjnej, którego położenie dane jest wektorem $3n$ -wymiarowym $x = (x_1, x_2, \dots, x_{3n})$

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \rightarrow (\dots, x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Podobnie wprowadzamy $3n$ -wymiarowy wektor siły $X = (X_1, X_2, \dots, X_{3n})$

$$\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} + F_{iz} \vec{k} \rightarrow (\dots, X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i}, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{3i-2} = F_{ix}, X_{3i-1} = F_{iy}, X_{3i} = F_{iz}$$

Równania ruchu dla punktu w przestrzeni konfiguracyjnej przyjmują postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, i = 1, 2, \dots, n \rightarrow m_j \ddot{x}_j = X_j, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

$$m_i \rightarrow m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

p równań więzów $f_k(x_1, \dots, x_{3n}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \leq 3n$ wprowadza ograniczenia na wektor $3n$ wymiarowy określający możliwe położenia punktu w przestrzeni konfiguracyjnej, wektor ten musi postawać na hiperpowierzchni więzów o wymiarze $f=3n-p$ równym liczbie stopni swobody układu. Zakładamy ponadto iż więzy wprowadzają siłę reakcji więzów o składowych X_{RJ} , (która jest prostopadła do tej hiperpowierzchni)

Równania ruchu z uwzględnieniem sił reakcji

zapisane dla układu n punktów materialnych w przestrzeni 3-DIM

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} + F_{iz} \vec{k} \quad \vec{F}_{Ri} = F_{Rix} \vec{i} + F_{Riy} \vec{j} + F_{Riz} \vec{k}$$

zapisane dla punktu obrazującego układ n punktów materialnych w przestrzeni konfiguracyjnej

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + X_{Rj}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_{3n})$$

$$X_R = (X_{R1}, X_{R2}, \dots, X_{R3n})$$

$$f_k(x_1, \dots, x_{3n}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$X_{3i-2} = F_{ix}, X_{3i-1} = F_{iy}, X_{3i} = F_{iz} \quad X_{R3i-2} = F_{Rix}, X_{R3i-1} = F_{Riy}, X_{R3i} = F_{Riz}$$

Przy czym wektor wodzący i -tego punktu w przestrzeni 3-DIM $\vec{r}_i$ można powiązać ze współrzędnymi $x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}$ punktu w przestrzeni konfiguracyjnej

$$\vec{r}_i = x_{3i-2} \vec{i} + x_{3i-1} \vec{j} + x_{3i} \vec{k} \quad \text{Analogicznie} \quad \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{x}_{3i-2} \vec{i} + \ddot{x}_{3i-1} \vec{j} + \ddot{x}_{3i} \vec{k}$$

Uwaga. Występujące w układzie ewentualne siły tarcia **włączamy** do sił nie związanych z więzami $\vec{F}_i$, a nie **włączamy** do sił reakcji więzów $\vec{F}_{Ri}$

Przesunięcie wirtualne zgodne z więzami w przestrzeni konfiguracyjnej

- dowolny wektor $3n$ -wymiarowy $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3n})$ taki iż

$$\text{grad} f_k \cdot \delta x = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Wektor przesunięcia wirtualnego punktu w przestrzeni konfiguracyjnej $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3N})$ jest wektorem stycznym do hiperpowierzchni więzów na którym pozostaje punkt w przestrzeni konfiguracyjnej.

Wektor przesunięcia wirtualnego i -tego punktu materialnego w przestrzeni 3-DIM

$$\vec{\delta r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k} = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i) = (\delta x_{3i-2}, \delta x_{3i-1}, \delta x_{3i})$$

3 składowe $3n$ - wymiarowego wektora przesunięcia wirtualnego w przestrzeni konfiguracyjnej

Wektory przesunięcia wirtualnego punktów materialnych zgodne z więzami w przestrzeni 3 DIM spełniają warunki

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i f_k \cdot \vec{\delta r}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Związek przesunięcia wirtualnego z przesunięciem rzeczywistym

Wektor rzeczywistego przesunięcia punktu w przestrzeni konfiguracyjnej zachodzącego w czasie $dt \rightarrow 0$ $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_{3n})$ o składowych $dx_j = \dot{x}_j dt$

jest jednym z przesunięć wirtualnych gdy więzy są skleronomiczne

Różniczkując bowiem zupełnie po czasie równanie więzów $f_k(x, t) = 0$ otrzymujemy

$$\frac{df_k(x, t)}{dt} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \dot{x}_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \dot{x}_j dt = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} dx_j = 0$$

czyli wektor przesunięcia rzeczywistego zachodzącego w czasie $dt \rightarrow 0$ spełnia te same równanie co wektor przesunięcia wirtualnego $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3n})$

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Zakładamy iż suma prac sił reakcyjnych na dowolnych przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami znika, gdy nie występują siły tarcia lub siły tarcia włączamy do sił zewnętrznych

$$\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3n})$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ri} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 = \sum_{j=1}^{3n} X_{Rj} \cdot \delta x_j = 0 \Rightarrow X_R \cdot \delta x = 0$$

$$X_R = (X_{R1}, X_{R2}, \dots, X_{R3n})$$

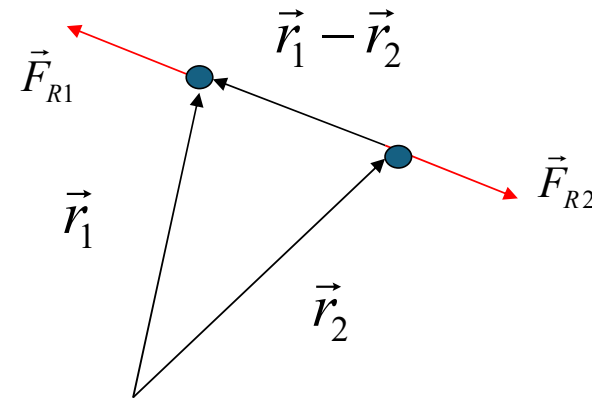
Ponieważ wektor przesunięcia wirtualnego w przestrzeni konfiguracyjnej jest styczny do hiperpowierzchni więzów to wynika z tego iż siła reakcji więzów musi być prostopadła do hiperpowierzchni więzów

Dygresja : Praca sił reakcyjnych na przesunięciach rzeczywistych znika wtedy gdy więzy nie zależą od czasu gdyż wówczas infinitesimalnie małe przesunięcie rzeczywiste jest jednym z przesunięć wirtualnych. Oznacza to iż w tym przypadku siły reakcji nie wykonują pracy nad układem i nie mogą prowadzić do zmiany jego energii.

Gdy więzy zależą od czasu to siły reakcji mogą wykonywać pracę i prowadzić do zmiany energii układu.

Założenie $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ri} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

możemy sprawdzić na przykładzie
dwóch punktów materialnych
zmuszonych do pozostania w stałej
odległości l od siebie



Równanie więzów:

$$f = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - l^2 = 0 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$$

Warunek na przesunięcia wirtualne zgodne z więzami

$$\begin{aligned} 0 &= \text{grad}_1 f \cdot \delta \vec{r}_1 + \text{grad}_2 f \cdot \delta \vec{r}_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2 = \\ &= 2(x_1 - x_2) \delta x_1 + 2(y_1 - y_2) \delta y_1 + 2(z_1 - z_2) \delta z_1 - 2(x_1 - x_2) \delta x_2 - 2(y_1 - y_2) \delta y_2 - 2(z_1 - z_2) \delta z_2 = \\ &= 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \delta \vec{r}_1 - 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 = 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) \end{aligned}$$

Siły reakcji $\vec{F}_{R1} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} F_R = -\vec{F}_{R2}$

Praca sił reakcji na przesunięciach wirtualnych

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_{Ri} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_{R1} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_{R2} \cdot \delta \vec{r}_2 = \frac{F_R}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) = 0$$

Zakładamy iż suma prac sił reakcyjnych na dowolnych przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami znika, gdy nie występują siły tarcia lub siły tarcia włączamy do sił zewnętrznych

$$\sum_{j=1}^{3n} X_{Rj} \cdot \delta x_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ri} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (*)$$

Założenie (*) zapewnia iż

$$\sum_{j=1}^{3n} (X_j + X_{Rj} - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j$$

a zatem z równań ruchu $m_j \ddot{x}_j = X_j + X_{Rj} \quad j=1, \dots, 3n$

wynika iż $m_j \ddot{x}_j = X_j + X_{Rj} \Rightarrow (X_j + X_{Rj} - m_j \ddot{x}_j) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} (X_j + X_{Rj} - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = 0$$

Suma prac sił straconych na dowolnych przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami znika

Zasada d'Alemberta dla układu n punktów materialnych nieswobodnych o więzach holonomicznych dwustronnych (b ważne)

sformułowana w przestrzeni
konfiguracyjnej

$$\sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = 0$$

$$f_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

gdzie

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

sformułowana w przestrzeni
3-DIM w układzie
kartezjańskim

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n ((F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i) = 0$$

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i f_k \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} + F_{iz} \vec{k}$ -wypadkowa siła działająca na i -ty punkt materialny bez uwzględnienia sił reakcji
innych niż siła tarcia czyli takich których praca na przesunięciach wirtualnych znika

Wyznaczenie przyspieszenia klocków pokazanych na rysunku połączonych nierozciągliwą nicią przy pomocy zasady d'Alemberta

Równanie więzów

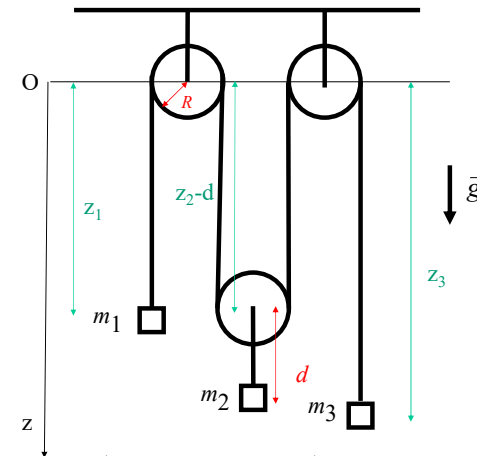
$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1 + 2(z_2 - d) + z_3 + 3\pi R - l = 0$$

l -długość nici, R -promień nieważkich bloczków

Ruch wszystkich klocków zachodzi wzdłuż osi Oz czyli efektywnie w przestrzeni jednowymiarowej

Z zasady d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{n=3} (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow (m_1 g - m_1 \ddot{z}_1) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2) \delta z_2 + (m_3 g - m_3 \ddot{z}_3) \delta z_3 = 0 \quad (1)$$



W równaniu (1) nie uwzględniono sił naciągu nici, które są siłami reakcji

więzów i których całkowita praca na przesunięciach wirtualnych znika

Przesunięcia wirtualne klocków $\delta \vec{r}_i = \delta z_i \vec{k}$ $i = 1, 2, 3$ związku z ograniczeniem ruchu klocków do kierunku pionowego mają niezerowe tylko składowe z-owe i muszą spełniać poniższe równanie wynikające z warunku więzów

$$\sum_{i=1}^{n=3} \text{grad}_i f \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} \delta z_3 = \delta z_1 + 2\delta z_2 + \delta z_3 = 0 \Rightarrow \delta z_3 = -\delta z_1 - 2\delta z_2$$

Uwzględnienie powyższego warunku w równaniu (1) prowadzi do relacji

$$(m_1 g - m_1 \ddot{z}_1 - m_3 g + m_3 \ddot{z}_3) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 g + 2m_3 \ddot{z}_3) \delta z_2 = 0$$

Przy tym równanie więzów nie nakłada żadnych dalszych ograniczeń na δz_1 oraz δz_2

Gdy $\delta z_1 = 0 \Rightarrow$

$$(m_1 g - m_1 \ddot{z}_1 - m_3 g + m_3 \ddot{z}_3) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 g + 2m_3 \ddot{z}_3) \delta z_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 g + 2m_3 \ddot{z}_3) \delta z_2 = 0 \Rightarrow m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 g + 2m_3 \ddot{z}_3 = 0$$

δz_2 dowolne

Gdy $\delta z_2 = 0 \Rightarrow$

$$(m_1 g - m_1 \ddot{z}_1 - m_3 g + m_3 \ddot{z}_3) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 g + 2m_3 \ddot{z}_3) \delta z_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_1 g - m_1 \ddot{z}_1 - m_3 g + m_3 \ddot{z}_3) \delta z_1 = 0 \Rightarrow m_1 g - m_1 \ddot{z}_1 - m_3 g + m_3 \ddot{z}_3 = 0$$

δz_1 dowolne

Otrzymaliśmy układ dwóch równań

$$m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 g + 2m_3 \ddot{z}_3 = 0 \\ m_1 g - m_1 \ddot{z}_1 - m_3 g + m_3 \ddot{z}_3 = 0$$

które rozwiązujemy przy wynikającym z równania więzów

$$z_1 + 2z_2 + z_3 + 3\pi R - 2d - l = 0 \Rightarrow z_3 = l + 2d - 3\pi R - 2z_2 - z_1$$

warunku powstałym w wyniku zróżniczkowania powyższego równania dwukrotnie po czasie $\ddot{z}_3 = -2\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1$

Otrzymany układ równań można zapisać w postaci

$$m_2 \ddot{z}_2 - 2m_3 \ddot{z}_3 = m_2 g - 2m_3 g$$

$$m_1 \ddot{z}_1 - m_3 \ddot{z}_3 = m_1 g - m_3 g$$

Uwzględnienie warunku $\ddot{z}_3 = -2\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1$ prowadzi do układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi $\ddot{z}_1, \ddot{z}_2$

$$2m_3 \ddot{z}_1 + (m_2 + 4m_3) \ddot{z}_2 = (m_2 - 2m_3)g$$

$$(m_1 + m_3) \ddot{z}_1 + 2m_3 \ddot{z}_2 = (m_1 - m_3)g$$

W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy

$$\ddot{z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} (m_2 - 2m_3)g & m_2 + 4m_3 \\ (m_1 - m_3)g & 2m_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2m_3 & m_2 + 4m_3 \\ (m_1 + m_3) & 2m_3 \end{vmatrix}} = \frac{-m_1 m_2 + 3m_2 m_3 - 4m_1 m_3}{-m_1 m_2 - m_2 m_3 - 4m_1 m_3} g = \frac{m_1 m_2 - 3m_2 m_3 + 4m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3} g$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2m_3 & (m_2 - 2m_3)g \\ (m_1 + m_3) & (m_1 - m_3)g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2m_3 & m_2 + 4m_3 \\ (m_1 + m_3) & 2m_3 \end{vmatrix}} = \frac{-m_1 m_2 - m_2 m_3 + 4m_1 m_3}{-m_1 m_2 - m_2 m_3 - 4m_1 m_3} g = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 4m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3} g$$

Ponadto $\ddot{z}_3 = -2\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = \frac{-3m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3} g$

Równania Lagrange'a I rodzaju dla układu n punktów materialnych

(dowód istotny)

Z zasady d'Alemberta

$$\sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = 0 \quad \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^{3n} \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0$$

mnożniki Lagrange'a

Niezależność funkcji

$f_k, k=1, 2, \dots, p,$

definiujących więzy,

gwarantuje

istnienie niezerowego

podwyznacznika

rzędu p macierzy $p \times 3n$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{3n}} \end{bmatrix}$$

Wówczas p spośród $3n$

składowych δx_j można

wyznaczyć z równań

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

Np. jeśli

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

to składowe

$$\delta x_j, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

można wyrazić przez

$$\delta x_j, \quad j = p + 1, p + 2, \dots, 3n$$

Uważamy $\delta x_j, j = 1, 2, \dots, p$ za znane i dobieramy $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, p$ tak, aby zachodziło

$$X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

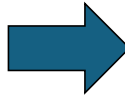
Wówczas z zasady d'Alemberta wynika

$$\sum_{j=p+1}^{3n} \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0$$

$\delta x_j, j = p+1, p+2, \dots, 3n$ są dowolne

W szczególności można je dobrać jako $\delta x_j = \begin{cases} \delta x_i & \text{gdy } j = i \\ 0 & \text{gdy } j \neq i \end{cases}$ kolejno dla $i = p+1, p+2, \dots, 3n$ co prowadzi do ograniczenia powyższej sumy do jednego wyrazu

Stąd uwzględniając dowolność δx_i wynika iż dla każdego j zachodzi

$m_j \ddot{x}_j = X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$ $f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$		$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \text{grad}_i f_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$ $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$
--	---	--

Równania Lagrange'a I rodzaju dla układu n punktów materialnych w których

$X_{Rj} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ **określają składowe siły reakcji (** $\vec{F}_{Ri} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \text{grad}_i f_k$ **siłę reakcji działającą na**

i -ty punkt materialny) mają postać równań ruchu Newtona z uwzględnieniem sił reakcji

Zasada Lagrange'a (zasada prac wirtualnych)

W położeniu równowagi (w którym ciała umieszczone bez prędkości początkowej spoczywają) całkowita praca wykonana przez wszystkie siły na przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami wynosi zero

w przestrzeni konfiguracyjnej

$$\ddot{x}_j = 0, \dot{x}_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} X_j(x, \dot{x} = 0) \delta x_j = 0$$

$$f_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{gdzie} \quad \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

w przestrzeni 3-DIM

$$\ddot{\vec{r}}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i f_k \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} + F_{iz} \vec{k} \quad \begin{array}{l} \text{-wypadkowa siła działająca na } i\text{-ty punkt materialny} \\ \text{(bez uwzględnienia sił reakcji innych niż siła tarcia)} \end{array}$$

Spełnienie dla dowolnego $t \geq 0$ warunku $\ddot{x}_j = 0, j = 1, 2, \dots, 3n$ zapewnia to iż wtedy gdy $\dot{x}_j(t=0) = 0$ to $\dot{x}_j(t > 0) = 0$

Zerowanie się całkowitej pracy sił na przesunięciach wirtualnych jest warunkiem dostatecznym na to by położenie układu spełniające ten warunek było położeniem równowagi wtedy gdy równania więzów oraz siły działające nie zależą od czasu.

W położeniu równowagi równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać

$$0 = X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$
$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

W przypadku sił potencjalnych

$$X_j = -\frac{\partial V(x_1, \dots, x_{3n})}{\partial x_j} \quad j=1, \dots, 3n \qquad \vec{F}_i = -grad_i V \quad i=1, \dots, n$$

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$
$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Warunek na ekstremum lub wartość siodłową funkcji opisującej potencjał V przy warunkach ubocznych $f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$

Dodatki

Dodatek do samodzielnej analizy. Rozwiązanie równania $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$

Rozwiązań powyższego równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach jednorodnego poszukujemy w postaci $z(t) = C \exp(\lambda t)$

Po wstawieniu tej postaci do równania różniczkowego otrzymujemy równanie charakterystyczne: $C\lambda^2 \exp(\lambda t) + \omega^2 C \exp(\lambda t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$

Jego pierwiastki są równe $\lambda_1 = i\omega$ oraz $\lambda_2 = -i\omega$

Ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ to ogólne rozwiązanie można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wykorzystano relacje (α -liczba rzeczywista)

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad \exp(-i\alpha) = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$$

Ponieważ x może przyjmować tylko wielkości rzeczywiste to

$$z(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

gdzie $A = C_1 + C_2$ $B = i(C_1 - C_2)$ stałe rzeczywiste

Przykład do samodzielnej analizy: Wyznaczenie ruchu ciała (punktu materialnego) o masie m po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach $x+y+z=0$ i $x+2y+5z=0$ pod wpływem siły ciężkości $\vec{F}_c = -mg\vec{k}$ -rozważania oparte na zasadzie d'Alemberta

Równania więzów:

$$f_1(x, y, z) = x + y + z = 0 \quad f_2(x, y, z) = x + 2y + 5z = 0$$

Zasada d'Alemberta :

$$\begin{aligned} (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 &\Rightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-m\ddot{x})\delta x + (-m\ddot{y})\delta y + (-mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Warunki na przesunięcie wirtualne $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ wynikające z istnienia więzów

$$\text{grad } f_1 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0 \Rightarrow \delta x + \delta y + \delta z = 0 \Rightarrow \delta x = -\delta y - \delta z \quad (2)$$

$$\text{grad } f_2 \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0 \Rightarrow \delta x + 2\delta y + 5\delta z = 0 \quad (3)$$

Po uwzględnieniu równania (2) w równaniu (3) mamy

$$\delta x + 2\delta y + 5\delta z = 0 \Rightarrow -\delta y - \delta z + 2\delta y + 5\delta z = 0 \Rightarrow \delta y + 4\delta z = 0 \Rightarrow \delta y = -4\delta z \quad (4)$$

zaś z równania (2) wynika iż $\delta x = -\delta y - \delta z = 4\delta z - \delta z = 3\delta z$

Po uwzględnieniu powyższych warunków w równaniu (1) otrzymujemy

$$(-m\ddot{x})\delta x + (-m\ddot{y})\delta y + (-mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow (-3m\ddot{x} + 4m\ddot{y} - mg - m\ddot{z})\delta z = 0$$

$$(-3m\ddot{x} + 4m\ddot{y} - mg - m\ddot{z})\delta z = 0$$

Ze względu na brak dalszych wynikających z więzów ograniczeń na możliwe wartości δz równanie to musi być spełnione dla dowolnego δz

$$(-3m\ddot{x} + 4m\ddot{y} - mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow -3m\ddot{x} + 4m\ddot{y} - mg - m\ddot{z} = 0$$

δz dowolne

Otrzymaliśmy równanie ruchu, które trzeba rozwiązać uwzględniając równania więzów

$$x + y + z = 0$$

$$x + 2y + 5z = 0$$

Różniczkując powyższe równania dwukrotnie po czasie otrzymujemy równania

$$\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\ddot{y} - \ddot{z} \quad \ddot{x} + 2\ddot{y} + 5\ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -2\ddot{y} - 5\ddot{z}$$

$$\text{Wynika z nich iż } -\ddot{y} - \ddot{z} = -2\ddot{y} - 5\ddot{z} \Rightarrow \ddot{y} = -4\ddot{z}, \ddot{x} = -\ddot{y} - \ddot{z} = 3\ddot{z}$$

$$\text{Uwzględniając je w równaniu ruchu otrzymujemy iż } -26m\ddot{z} - mg = 0 \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{g}{26}$$

$$\text{A zatem } z = -\frac{1}{52}gt^2 + At + B$$

gdzie A, B – stałe zależne od warunków początkowych ruchu

$$z = -\frac{1}{52}gt^2 + At + B$$

Przyjmując iż $z(t=0) = z_0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$ otrzymujemy iż $A = \dot{z}_0, B = z_0$

$$z = -\frac{1}{52}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

$$y = -4z = \frac{4}{52}gt^2 - 4\dot{z}_0 t - 4z_0$$

$$x = 3z = -\frac{3}{52}gt^2 + 3\dot{z}_0 t + 3z_0$$

Przykład do samodzielnej analizy: Wyznaczenie ruchu ciała o masie m po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach $x+y+z=0$ i $x+2y+5z=0$ pod wpływem siły ciężkości $\vec{F}_c = -mg\vec{k}$ -rozważania oparte na równaniach Lagrange'a I rodzaju

Składowe wypadkowej siły (bez uwzględnienia siły reakcji) : $F_x = F_y = 0$
 Równania więzów $F_z = -mg$

$$f_1(x, y, z) = x + y + z = 0 \quad f_2(x, y, z) = x + 2y + 5z = 0$$

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R = \vec{F} + \lambda_1 \cdot \text{grad}f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad}f_2$$

gdzie $\vec{F}_R = \lambda_1 \cdot \text{grad}f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad}f_2$ -siła reakcji

Po rozpisaniu na składowe w układzie kartezjańskim

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg + \lambda_1 + 5\lambda_2$$

Eliminując z otrzymanych równań nieoznaczone mnożniki Lagrange'a λ_1, λ_2 otrzymujemy równanie identyczne z tym otrzymanym przy pomocy zasady d'Alemberta

$$m\ddot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = m\ddot{x} - \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -m\ddot{x} + m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} = \lambda_1 + 2\lambda_2 \Rightarrow m\ddot{y} = -\lambda_1 + 2m\ddot{x} \Rightarrow \lambda_1 = 2m\ddot{x} - m\ddot{y}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda_1 + 5\lambda_2 \Rightarrow m\ddot{z} = -mg - 3m\ddot{x} + 4m\ddot{y}$$

które trzeba rozwiązać przy uwzględnieniu równań więzów

$$f_1(x, y, z) = x + y + z = 0 \quad f_2(x, y, z) = x + 2y + 5z = 0$$

w sposób przedstawiony poprzednio przy wykorzystaniu zasady d'Alemberta

$$f_1(x, y, z) = x + y + z = 0$$

$$f_2(x, y, z) = x + 2y + 5z = 0$$

Wyznaczenie siły reakcji $\vec{F}_R = \lambda_1 \cdot \text{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad} f_2$

$$\vec{F}_R = F_{Rx} \vec{i} + F_{Ry} \vec{j} + F_{Rz} \vec{k} \quad \text{gdzie} \quad F_{Rx} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$F_{Ry} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$F_{Rz} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = \lambda_1 + 5\lambda_2$$

Wcześniej pokazano iż

$$x = -\frac{3}{52}gt^2 + 3\dot{z}_0 t + 3z_0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{3}{26}g$$

$$y = \frac{4}{52}gt^2 - 4\dot{z}_0 t - 4z_0 \Rightarrow \ddot{y} = \frac{4}{26}g$$

$$z = -\frac{1}{52}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0 \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{1}{26}g$$

A zatem

$$\lambda_1 = 2m\ddot{x} - m\ddot{y} = -\frac{10}{26}mg$$

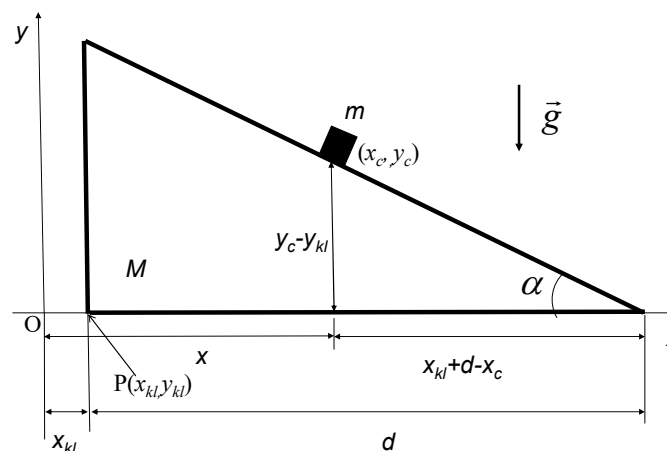
$$\lambda_2 = -m\ddot{x} + m\ddot{y} = \frac{7}{26}mg$$

$$F_{Rx} = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{3}{26}mg \quad F_{Ry} = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \frac{4}{26}mg \quad F_{Rz} = \lambda_1 + 5\lambda_2 = \frac{25}{26}mg$$

Przykład dodatkowy Ciało o masie m może poruszać się bez tarcia po powierzchni klina o kącie nachylenia do poziomu α

Z kolei sam klin, którego masa jest równa M , może poruszać się bez tarcia po powierzchni poziomej. Znaleźć:

- równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch układu
- przyspieszenia z jakimi poruszać się może ciało o masie m oraz klin
- siły reakcji działające na klin i ciało



Ponieważ klin o masie M porusza się wyłącznie ruchem postępowym to do określenia jego położenia można wykorzystać położenie dowolnego jego punktu np. punktu P leżącego w jego lewym narożu, którego wektor wodzący ma postać $\vec{r}_{kl} = [x_{kl}, y_{kl}]$

Wektor wodzący ciała o masie m traktowanego jak punkt materialny ma postać

$$\vec{r}_c = [x_c, y_c]$$

Równania więzów

$$f_1 = y_{kl} = 0$$

$$f_2 = y_c - y_{kl} - (x_{kl} + d - x_c) \operatorname{tg}(\alpha) = 0$$

$$\text{gdyż } y_c - y_{kl} = (x_{kl} + d - x_c) \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$f_1 = y_{kl} = 0 \quad f_2 = y_c - y_{kl} - (x_{kl} + d - x_c) \operatorname{tg}(\alpha) = 0$$

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri} = m_i \vec{g} + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \operatorname{grad}_i f_k \quad (n=2, i=1,2)$$

$$M \ddot{\vec{r}}_{kl} = \vec{F}_{kl} + \vec{F}_{Rkl} = M \vec{g} + \lambda_1 \operatorname{grad}_{kl} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad}_{kl} f_2 \quad (i=1, \text{ klin } m_1=M)$$

$$m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}_c + \vec{F}_{Rc} = m \vec{g} + \lambda_1 \operatorname{grad}_c f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad}_c f_2 \quad (i=2, \text{ ciało } m_2=m)$$

Po rozpisaniu na składowe

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_{kl} &= F_{klx} + F_{Rklx} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{kl}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{kl}} = -\lambda_2 \operatorname{tg}(\alpha) \\ M \ddot{y}_{kl} &= F_{kly} + F_{Rkly} = -Mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_{kl}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_{kl}} = -Mg + \lambda_1 - \lambda_2 \\ m \ddot{x}_c &= F_{cx} + F_{Rcx} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_c} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_c} = \lambda_2 \operatorname{tg}(\alpha) \\ m \ddot{y}_c &= F_{cy} + F_{Rcy} = -mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_c} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_c} = -mg + \lambda_2 \end{aligned}$$

$\ddot{x}_{kl} = -\frac{m \ddot{x}_c}{M}$

$$M\ddot{y}_{kl} = -Mg + \lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = M\ddot{y}_{kl} + Mg + \lambda_2$$

$$m\ddot{y}_c = -mg + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = m\ddot{y}_c + mg$$

$$m\ddot{x}_c = \lambda_2 \operatorname{tg}(\alpha) \longrightarrow \ddot{x}_c = (\ddot{y}_c + g) \operatorname{tg}(\alpha)$$

Z równań więzów

$$y_c - y_{kl} - (x_{kl} + d - x_c) \operatorname{tg}(\alpha) = 0 \Rightarrow \ddot{y}_c - \ddot{y}_{kl} - (\ddot{x}_{kl} - \ddot{x}_c) \operatorname{tg}(\alpha) = 0$$

$$y_{kl} = 0 \Rightarrow \ddot{y}_{kl} = 0 \longrightarrow \ddot{y}_c = (\ddot{x}_{kl} - \ddot{x}_c) \operatorname{tg}(\alpha) = -\ddot{x}_c \left(\frac{m}{M} + 1 \right) \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\ddot{x}_{kl} = -\frac{m\ddot{x}_c}{M}$$

$$\ddot{x}_c = (\ddot{y}_c + g) \operatorname{tg}(\alpha) \longrightarrow \ddot{x}_c = -\ddot{x}_c \left(\frac{m}{M} + 1 \right) \operatorname{tg}^2(\alpha) + g \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\ddot{x}_c = \frac{Mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{M + m \sin^2(\alpha)}$$

$$\ddot{x}_{kl} = -\frac{m}{M} \ddot{x}_c = -\frac{mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{M + m \sin^2(\alpha)}$$

$$\ddot{y}_c = -\ddot{x}_c \left(\frac{m+M}{M} \right) \operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{(m+M)g \sin^2(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)} \quad \ddot{y}_{kl} = 0$$

$$\ddot{x}_c = \frac{Mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)}$$

$$\lambda_2 = m(\ddot{y}_c + g) = m \frac{-(m+M)g \sin^2(\alpha) + Mg + mg \sin^2(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)} = \frac{mMg \cos^2(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)}$$

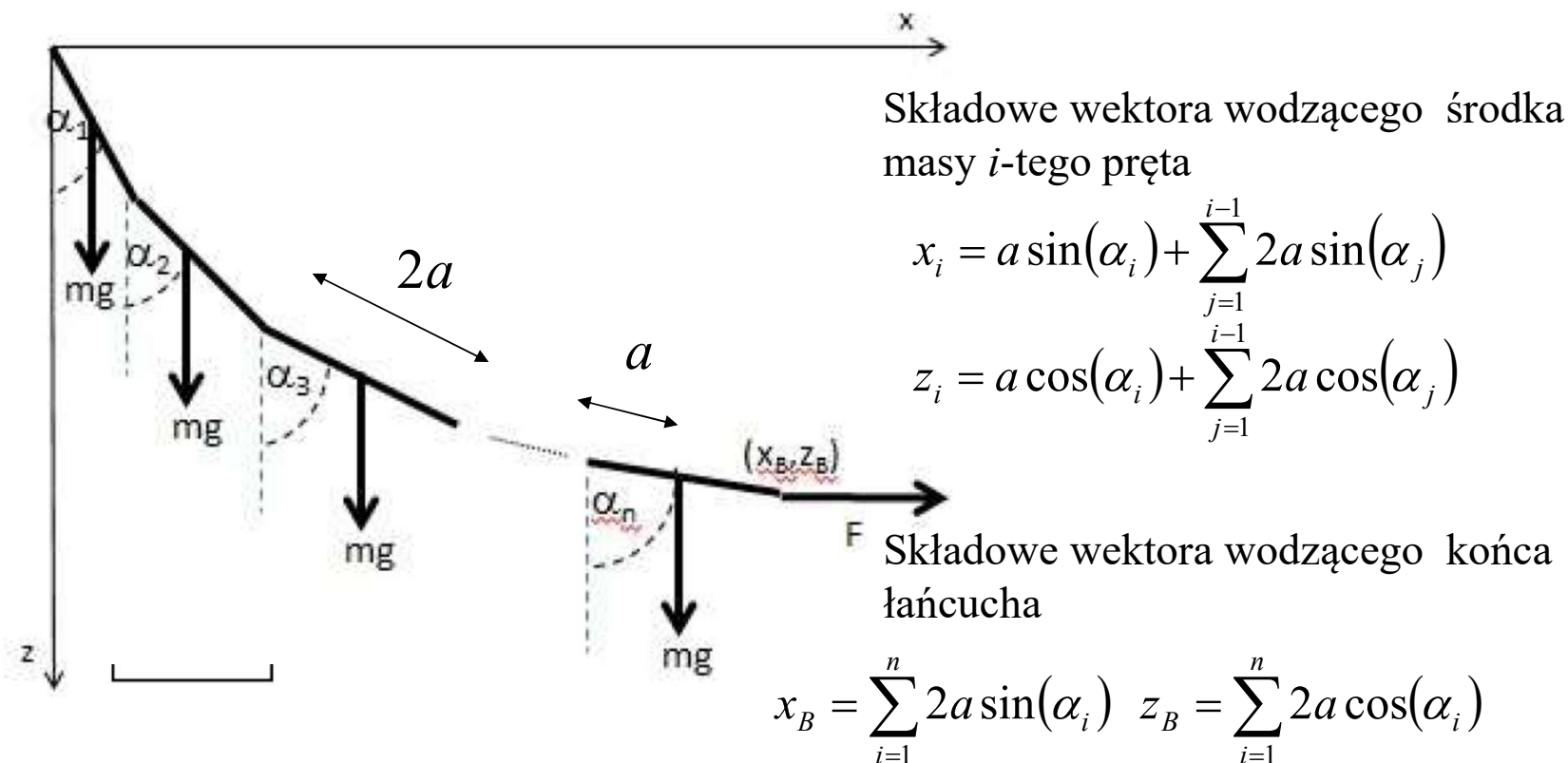
$$\lambda_1 = M\ddot{y}_k + Mg + \lambda_2 = Mg + \frac{mMg \cos^2(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)}$$

Siły reakcji

$$F_{Rklx} = -\lambda_2 \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{-mMg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)} \quad F_{Rkly} = \lambda_1 - \lambda_2 = Mg$$

$$F_{Rcx} = \lambda_2 \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{mMg \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)} \quad F_{Rcy} = \lambda_2 = \frac{mMg \cos^2(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)}$$

Przykład dodatkowy. Znaleźć przy pomocy zasady Lagrange'a położenie równowagi łańcucha złożonego z n prętów o długościach $2a$ i masach m każdy, połączonych przegubowo, którego jeden koniec jest zawieszony, a na drugi działa poziomo siła F . Łańcuch jest umieszczony w polu grawitacyjnym ziemskim.



Powyższe równania przedstawiają w postaci uwikłanej równania więzów nałożonych na składowe wektorów wodzących określających położenie środków mas kolejnych prętów łańcucha i jego końca (poprzez uzależnienie położenia środka masy i -tego pręta ($i=2,3,\dots,n$) i końca n -tego pręta z kątami jakie pręty $1,\dots,i$ tworzą z osią OZ).

Z zasady Lagrange'a wynika iż musi być spełnione równanie

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i g \delta z_i + F \delta x_B = 0 \quad (*)$$

Ostatni wyraz wynika z faktu iż elementy łańcucha nie są punktami materialnymi i siła pozioma F jest przyłożona do końca ostatniego elementu łańcucha a nie do środka jego masy. Przy zapisie pozostałych wyrazów przyjęto iż można przyjąć iż siłę ciężkości działającą na i -ty pręt przykładamy do środka masy i określa ją wzór $\vec{F}_i = m_i g \vec{k}$

Na skutek istnienia więzów przesunięcia wirtualne $\delta z_i, \delta x_B$ nie są dowolne. Więzy nie wprowadzają ograniczeń na przesunięcia wirtualne $\delta \alpha_i$ związane ze zmianami kątów α_i jakie poszczególne ogniwa łańcucha tworzą z osią OZ, gdyż kąty te mogą być dowolne.

Można uzależnić przesunięcia wirtualne $\delta z_i, \delta x_B$ od przesunięć wirtualnych $\delta \alpha_i$

$$x_B = \sum_{i=1}^n 2a \sin(\alpha_i) \Rightarrow \delta x_B = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_B}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n 2a \cos(\alpha_i) \delta \alpha_i$$

$$z_i = a \cos(\alpha_i) + \sum_{j=1}^{i-1} 2a \cos(\alpha_j) \Rightarrow \delta z_i = -a \sin(\alpha_i) \delta \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} 2a \sin(\alpha_j) \delta \alpha_j$$

Uwzględnienie powyższych relacji w równaniu (*) prowadzi do równania

$$\sum_{i=1}^n m_i g \left[-a \sin(\alpha_i) \delta \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} 2a \sin(\alpha_j) \delta \alpha_j \right] + F \sum_{i=1}^n 2a \cos(\alpha_i) \delta \alpha_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i g \left[-a \sin(\alpha_i) \delta\alpha_i - 2 \sum_{j=1}^{i-1} a \sin(\alpha_j) \delta\alpha_j \right] + F \sum_{i=1}^n 2a \cos(\alpha_i) \delta\alpha_i = 0$$

Można je uwzględniając fakt iż $m_i = m$ ($i=1, \dots, n$) przepisać w postaci

$$\sum_{i=1}^n [-mga(2n-2i+1)\sin(\alpha_i) + F2a\cos(\alpha_i)]\delta\alpha_i = 0$$

Z dowolności przesunięć wirtualnych $\delta\alpha_i$ wynika iż muszą być spełnione równania

$$-mga(2n-2i+1)\sin(\alpha_i) + F2a\cos(\alpha_i) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (*)$$

skąd wynika wzór pozwalający określić kąty jakie każde z ogniwo łańcucha tworzy z osią OZ

$$\operatorname{tg}(\alpha_i) = \frac{2F}{mg(2n-2i+1)}$$

Znalezienie współrzędnych w ilości równej liczbie stopni swobody układu, dla których więzy nie wprowadzają ograniczenia na wartości przyjmowane przez te współrzędne jest krokiem prowadzącym do sformułowania równań ruchu w postaci równań Lagrange'a II rodzaju, z których wynika m.in. w omawianym szczególnym przykładzie (gdy szukając położenia równowagi zakładamy iż pręty spoczywają czyli dla dowolnego i mamy $\dot{\alpha}_i = 0, \ddot{\alpha}_i = 0$) układ równań (*)