



OMNIS2

Równania Lagrange'a II rodzaju-część 1

Współrzędne uogólnione

Wyprowadzenie równań Lagrange'a II rodzaju z zasady d'Alemberta. Siły uogólnione

Funkcja Lagrange'a i równania Lagrange'a II rodzaju przy siłach potencjalnych

Pędy uogólnione, współrzędne cykliczne i całki ruchu. Uogólniona energia

Korzyści wynikające ze sformułowania równań ruchu przy wykorzystaniu równań Lagrange'a II rodzaju

- 1) Równania Lagrange'a II rodzaju stwarzają możliwość łatwego sformułowania równań ruchu dla pojedynczego punktu materialnego i układu punktów materialnych przy wykorzystaniu do opisu położenia punktów materialnych tzw. współrzędnych uogólnionych, które można wybrać na wiele sposobów. Umiejętny ich dobór niekiedy decyduje o możliwości łatwego rozwiązania równań ruchu.
Gdy można za te współrzędne przyjąć współrzędne w układzie krzywoliniowym do sformułowania równań ruchu nie jest konieczna znajomość rozkładu wektora przyspieszenia na składowe w układzie krzywoliniowym. Najłatwiej jest sformułować równania ruchu w przypadku gdy wszystkie działające siły są potencjalne.
- 2) W przypadku analizy punktu materialnego lub układu takich punktów na ruch których nałożone są więzy równania ruchu wynikające z równań Lagrange'a II rodzaju rozwiązuje się bez konieczności uwzględnienia warunków wynikających z równań więzów. Ponadto nie zawierają one sił reakcji.

Wstęp-wyбір współrzędnych uogólnionych

Rozważamy ogólny przypadek układu złożonego z n punktów materialnych, na który nałożono p więzów holonomicznych dwustronnych. W przypadku ruchu punktów w przestrzeni trójwymiarowej układ jest reprezentowany w $3n$ przestrzeni konfiguracyjnej przez punkt obraz, którego położenie dane jest wektorem $3n$ -wymiarowym $x = (x_1, x_2, \dots, x_{3n})$ a równania więzów można zapisać w postaci równań $f_k(x, t) = 0$ gdzie $k=1, \dots, p$

Współrzędne uogólnione - zmienne niezależne takie że każdemu zespołowi ich wartości odpowiada jednoznacznie pewne położenie układu zgodne z więzami. Ilość współrzędnych uogólnionych jest równa ilości stopni swobody f (dla ruchu n punktów w przestrzeni 3DIM na który nałożono p więzów $f=3n-p$)

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(q_1, q_2, \dots, q_f, t) = x_j(q, t), \quad j = 1, 2, \dots, 3n \\ q &= (q_1, q_2, \dots, q_f), \quad f = 3n - p \end{aligned}$$

Współrzędne kartezjańskie są jednoznacznie funkcjami współrzędnych uogólnionych

$$f_k(x(q, t), t) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0 \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, p \\ l = 1, 2, \dots, f \end{matrix}$$

Po wstawieniu relacji wiążących współrzędne kartezjańskie z uogólnionymi do równań więzów, równania te muszą stać się tożsamościami czyli być spełnione dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych. Równania więzów nie ograniczają wartości przyjmowanych przez te współrzędne

Przykład -cząstka o masie m poruszająca się po powierzchni kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R

Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Ruch po powierzchni $\Rightarrow$ liczba stopni swobody $f=2$

Za współrzędne uogólnione można przyjąć 2 z 3

współrzędnych w sferycznym układzie

współrzędnych a mianowicie kąt biegunowy θ i

azymutalny φ . Związek współrzędnych w układzie

kartezjańskim ze współrzędnymi uogólnionymi

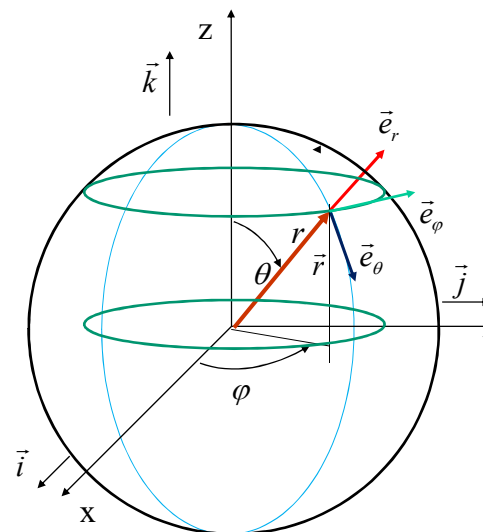
$$x = R \sin \theta \cos \varphi \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Można łatwo pokazać iż równanie więzów jest spełnione tożsamościowo dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych z zakresu ich zmienności i współrzędne te jednoznacznie określają położenie punktu na powierzchni kuli

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta - R^2 = \\ &= R^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R^2 \cos^2 \theta - R^2 = R^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - R^2 = R^2 - R^2 \equiv 0 \end{aligned}$$



Przykład –układ złożony z 2 ciał (punktów materialnych) poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej na ruch których nie nałożono żadnych więzów

Liczba stopni swobody $f=n*3-p=2*3-0=6$

Za współrzędne uogólnione można przyjąć składowe wektorów wodzących $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ obu ciał w dowolnym inercjalnym układzie współrzędnych czyli np. wielkości

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \quad \text{gdzie} \quad \vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

ale także składowe $x_M, y_M, z_M, x_\mu, y_\mu, z_\mu$

$$\text{wektorów} \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_\mu \vec{i} + y_\mu \vec{j} + z_\mu \vec{k}$$

$\vec{R}$ -wektor określający położenie środka masy

$$\text{Ponieważ} \quad \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{to zachodzi np.}$$

$$x_1 = x_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_\mu \quad x_2 = x_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_\mu$$

Wybór współrzędnych uogólnionych zarówno dla układu punktów materialnych jak i pojedynczego punktu można dokonać na wiele sposobów . Dla pojedynczego punktu materialnego na który nie nałożono więzów współrzędnymi uogólnionymi mogą być wszystkie współrzędne w dowolnym krzywoliniowym lub kartezjańskim układzie współrzędnych.

Liczba stopni swobody i wybór współrzędnych uogólnionych dla bryły sztywnej

Bryła sztywna jest złożona z nieprzeliczalnej liczby punktów materialnych pozostających w stałej odległości od siebie.

Liczba współrzędnych uogólnionych równa liczbie stopni swobody dla układu złożonego z n brył sztywnych: $f=6n-p$ gdzie n -liczba brył, p -liczba więzów holonomicznych zewnętrznych ograniczających ruch brył sztywnych

Dla pojedynczej bryły swobodnej na ruch której nie narzucono więzów zewnętrznych $f=6$ (położenie pojedynczej bryły określa położenie 3 jej punktów pozostających w stałej odległości od siebie nie leżących na linii prostej).

Współrzędne uogólnione: 3 współrzędne określające położenie środka masy oraz 3 kątów Eulera określające orientacje 3 prostopadłych osi sztywno związanych z bryłą względem osi nieruchomego układu współrzędnych .

Gdy jeden z punktów bryły jest nieruchomy (3 więzy) to liczba współrzędnych maleje do 3 i jako współrzędne uogólnione **nie wybieramy** współrzędnych określających położenie środka masy .

Gdy bryła obraca się wokół nieruchomej osi (dodatkowe 2 więzy) to liczba współrzędnych uogólnionych maleje do 1 i za jedyną współrzędną uogólnioną można wybrać współrzędną wprowadzoną do opisu ruchu po okręgu punktu bryły nie leżącego na osi obrotu

Wyprowadzenie użytecznych relacji

$$\begin{aligned}
 x_j &= x_j(q_1, \dots, q_f, t) = x_j(q, t) \rightarrow \dot{x}_j = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t} \rightarrow \\
 \rightarrow \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial t} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_l} = \\
 &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial t}
 \end{aligned}$$

$\dot{x}_j = \dot{x}_j(q, \dot{q}, t)$
 $q = (q_1, \dots, q_f)$
 $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_j}{\partial q_k}$

$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right)$

$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ -prędkość uogólniona związana ze współrzędną uogólnioną q_k

Wyprowadzenie równań Lagrange'a II rodzaju z zasady d'Alemberta (znajomość wymagana)

$$f_k(x(q,t),t) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0 \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, p \\ l = 1, 2, \dots, f \end{matrix}$$

Po wstawieniu relacji wiążących współrzędne kartezjańskie z uogólnionymi do równań więzów, równania te stają tożsamościami i nie zależą od tych współrzędnych
p-liczba więzów, f-liczba stopni swobody

Składowe wektora przesunięcia wirtualnego układu δx_j zgodnego z więzami występujące w zasadzie d'Alemberta można wyrazić przy pomocy f współrzędnych uogólnionych i f uogólnionych przesunięć wirtualnych zgodnych z więzami δq_l

$$\delta x_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

Z równania $\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0$ zasady d'Alemberta wynika iż

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} \sum_{l=1}^f \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^f \left[\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right] \delta q_l = \\ &= \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial f_k}{\partial q_l} \right] \delta q_l \equiv 0 \Rightarrow \delta q_l \text{ dowolne} \end{aligned}$$

Uogólnione przesunięcia wirtualne zgodne z więzami są dowolne (związek po lewej stronie jest spełniony tożsamościowo, tzn. warunek na zgodność przesunięć z więzami nie ogranicza dowolności δq_l).

Z innego równania zasady d'Alemberta wynika iż X_i –składowe $2n$ wymiarowego wektora siły

$$0 = \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l =$$

$$= \sum_{l=1}^f \left(\sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} - \sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l$$

Siły uogólnione

$$Q_l \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

Siła działająca na i -te ciało:

$$\vec{F}_i = X_{3i-2} \vec{i} + X_{3i-1} \vec{j} + X_{3i} \vec{k}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \quad \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

$$\sum_{j=1}^{3n} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3n} \left(\frac{d}{dt} \left(m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \right) - \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) =$$

$$T = \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} \text{ energia kinetyczna}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} \right) - \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_l} \right) - \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l}$$

$$x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_{3n}) \quad q = (q_1, \dots, q_f)$$

$$T = T(q, \dot{q}, t) = T(\dot{x}(q, \dot{q}, t))$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_j, \dots, \dot{x}_{3n}) \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$$

$$\sum_{l=1}^f \left(Q_l - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \quad l=1, 2, \dots, f$$

dowolne

Równania Lagrange'a II rodzaju-postać ogólna

Przykład: Siły uogólnione i równania Lagrange'a II rodzaju dla układu złożonego z 2 ciał (punktów materialnych) poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej na ruch których nie nałożono żadnych więzów przy wyborze jako współrzędnych uogólnionych składowych wektorów $\vec{R}$ i $\vec{r}$

Na ciała działają siły wypadkowe $\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}$, $\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}$

Wektor środka masy i wektor określający położenie ciała 2 względem pierwszego

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_\mu\vec{i} + y_\mu\vec{j} + z_\mu\vec{k}$$

przy czym $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ $\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$ $\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$

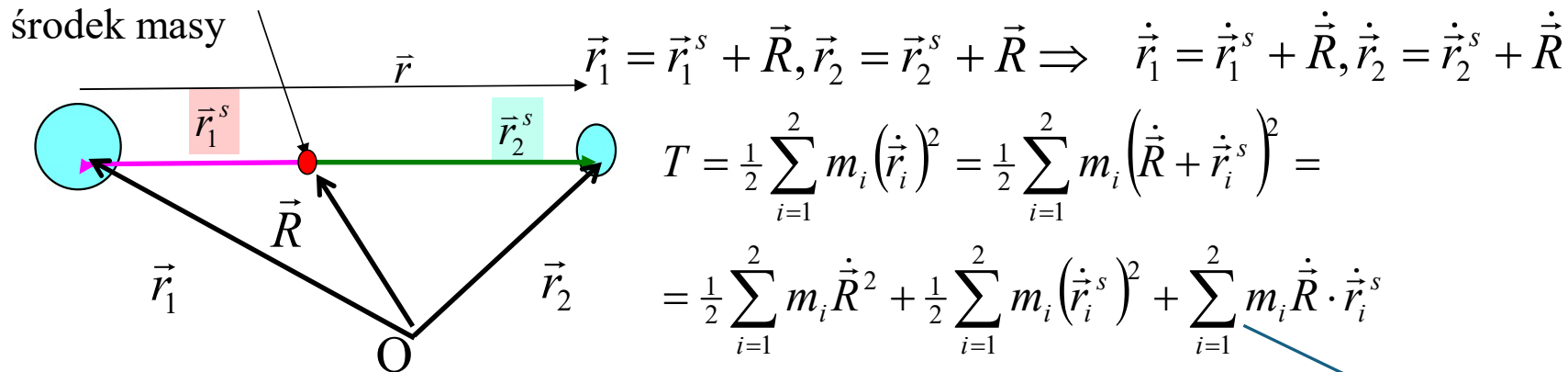
Wybierając za współrzędne uogólnione wielkości $x_M, y_M, z_M, x_\mu, y_\mu, z_\mu$ i uwzględniając relacje

$$\begin{aligned} x_1 &= x_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_\mu & x_2 &= x_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_\mu \\ y_1 &= y_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2} y_\mu & y_2 &= y_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2} y_\mu \\ z_1 &= z_M - \frac{m_2}{m_1 + m_2} z_\mu & z_2 &= z_M + \frac{m_1}{m_1 + m_2} z_\mu \end{aligned}$$

widzimy jaką postać mają siły uogólnione np.

$$\begin{aligned} Q_{x_M} &= \sum_{j=1}^6 X_j \frac{\partial x_j}{\partial x_M} = F_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial x_M} + F_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial x_M} + F_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial x_M} + F_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial x_M} + F_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial x_M} + F_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial x_M} = F_{1x} + F_{2x} \\ Q_{x_\mu} &= \sum_{j=1}^6 X_j \frac{\partial x_j}{\partial x_\mu} = F_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial x_\mu} + F_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu} + F_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial x_\mu} + F_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial x_\mu} + F_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial x_\mu} + F_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial x_\mu} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} F_{1x} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} F_{2x} \end{aligned}$$

Określenie energii kinetycznej $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2$ układzie inercyjnym O jako funkcji składowych $x_M, y_M, z_M, x_\mu, y_\mu, z_\mu$ wektorów $\vec{R}$ i $\vec{r}$ i ich pochodnych po czasie $\dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{z}_M, \dot{x}_\mu, \dot{y}_\mu, \dot{z}_\mu$



$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^s)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{\vec{r}}_i^s)^2 + \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^s$$

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{\vec{r}}_i^s)^2 \text{ -energia w układzie środka masy}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\vec{R}}^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}^2 \sum_{i=1}^2 m_i = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^s = \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^s = \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) = \dot{\vec{R}} \cdot (M \dot{\vec{R}} - M \dot{\vec{R}}) = 0$$

$$\dot{\vec{R}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T_s$$

W wykładzie 1 pokazano iż

$$T_s = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \quad \text{gdzie} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

czyli

$$T = \frac{M}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2 + \dot{z}_\mu^2)$$

Zapis równań Lagrange'a II rodzaju

Ponieważ
$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2 + \dot{z}_\mu^2)$$

to zachodzi np.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_M} = \frac{d((m_1 + m_2)\dot{x}_M)}{dt} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_M$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ -masa zredukowana}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_\mu} = \frac{d(\mu \dot{x}_\mu)}{dt} = \mu \ddot{x}_\mu$$

Przykładowe 2 z 6 równań Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_M} = Q_{x_M} \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_M = F_{1x} + F_{2x} \quad \text{jedno z 3 równań opisujących}$$

ruch środka masy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_\mu} = Q_{x_\mu} \Rightarrow \mu \ddot{x}_\mu = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} F_{1x} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} F_{2x} \quad \text{jedno z 3 równań opisujących}$$

ruch względny

Pozostałe 4 analogiczne równania opisują zmiany w czasie y_M, z_M, y_μ, z_μ

Z równań opisujących zmiany w czasie x_M, y_M, z_M wynika iż środek masy układu porusza się jak punkt materialny o masie równej masie układu na który działa siła będąca sumą sił działających na wszystkie ciała

Gdy $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow F_{1x} = -F_{2x} \Rightarrow \mu \ddot{x}_\mu = F_{2x} \quad \ddot{x}_M = 0$

Przykład: Siły uogólnione dla swobodnego punktu materialnego przy wyborze jako współrzędnych uogólnionych współrzędnych w układzie krzywoliniowym

Gdy współrzędnymi uogólnionymi opisującym swobodny punkt materialny o masie m są współrzędne w układzie krzywoliniowym to wówczas $\vec{e}_l = \frac{1}{L_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}$

$$Q_l = \sum_{j=1}^3 X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} = L_l (\vec{F} \cdot \vec{e}_l) \quad L_l - \text{współczynnik Lamé}$$

Np. w układzie cylindrycznym $L_\rho = L_z = 1, L_\varphi = \rho$

$$Q_\rho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\rho = F_\rho \quad Q_\varphi = \rho (\vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi) = \rho F_\varphi = D_z \quad Q_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = F_z$$

Siły Q_ρ, Q_z są rzutami siły wypadkowej na kierunki wyznaczone przez wersory układu cylindrycznego a siła uogólniona Q_φ reprezentuje z-ową składową wypadkowego momentu siły. Można to sprawdzić także następująco

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_\rho &= \sum_{j=1}^3 X_j \frac{\partial x_j}{\partial \rho} = F_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + F_y \frac{\partial y}{\partial \rho} + F_z \frac{\partial z}{\partial \rho} = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\rho \\ Q_\varphi &= \sum_{j=1}^3 X_j \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -F_x \rho \sin \varphi + F_y \rho \cos \varphi = -F_x y + F_y x = D_z \end{aligned}$$

$$Q_z = \sum_{j=1}^3 X_j \frac{\partial x_j}{\partial z} = F_x \frac{\partial x}{\partial z} + F_y \frac{\partial y}{\partial z} + F_z \frac{\partial z}{\partial z} = F_z$$

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi) \vec{i} + \sin(\varphi) \vec{j}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Przykład: Określenie energii kinetycznej T we współrzędnych cylindrycznych i zapis równań Lagrange'a II rodzaju

$$x = \rho \cos \varphi \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \cos(\varphi) \dot{\rho} - \rho \sin(\varphi) \dot{\varphi} \quad \dot{x}_j = \dot{x}_j(q, \dot{q})$$

$$y = \rho \sin \varphi \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \sin(\varphi) \dot{\rho} + \rho \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$z = z \Rightarrow \dot{z} = \dot{z}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \left(\begin{aligned} &\dot{\rho}^2 \cos^2(\varphi) - 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \\ &\dot{\rho}^2 \sin^2(\varphi) + 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned} \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + \rho^2 (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$

Do powyższego wzoru można dojść także wychodząc ze wzoru na energię kinetyczną wyrażoną od razu przez składowe prędkości w układzie cylindrycznym

$$v_\rho, v_\varphi, v_z$$

Ponieważ układ cylindryczny jest układem ortogonalnym

$$(\text{czyli zachodzi } \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0)$$

$$\text{to energia kinetyczna } T = \frac{m}{2} (v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)$$

Ponieważ składowe prędkości w układzie cylindrycznym są równe

$$v_\rho = L_\rho \dot{\rho} = \dot{\rho} \quad v_\varphi = L_\varphi \dot{\varphi} = \rho \dot{\varphi} \quad v_z = L_z \dot{z} = \dot{z} \quad \text{to energia kinetyczna}$$

$$T = \frac{m}{2} (v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = T(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z})$$

Obliczenia pomocnicze prowadzące do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{d(m\dot{\rho})}{dt} - m\rho\dot{\varphi}^2 = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = ma_\rho$$

L_z - z-towa składowa momentu pędu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{d(m\rho^2\dot{\varphi})}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = 2m\rho\dot{\varphi}\dot{\rho} + m\rho^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{d(m\dot{z})}{dt} = m\ddot{z} = ma_z$$

Równania

Lagrange'a II rodzaju :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho \Rightarrow ma_\rho = F_\rho$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = D_z$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z \Rightarrow ma_z = F_z$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przy siłach potencjalnych (znajomość dowodu wymagana)

Niech siły działające na układ punktów materialnych mają potencjał $V(x,t)$

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_i V \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad X_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

$$Q_l \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

gdzie $V(q,t) = V(x(q,t),t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_l} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \\ L \equiv T - V \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Funkcja Lagrange'a (Lagrangian)

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

Postać równań Lagrange'a nie zależy od wyboru współrzędnych uogólnionych. Równania te są niezmiennicze względem zamiany tych współrzędnych (tzw. przekształceń punktowych). Można je stosować także do opisu ruchu brył sztywnych przy właściwym wyborze współrzędnych uogólnionych

Funkcja i równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych kartezjańskich

Dla punktu materialnego o masie m , na ruch którego nie nałożono więzów można np. przyjąć za współrzędne uogólnione składowe jego wektora wodzącego w układzie kartezjańskim czyli przyjąć iż $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

Przy założeniu iż siły działające na punkt są potencjalne

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Można określić funkcje Lagrange'a jako

$$L(q, \dot{q}, t) = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - V(x, y, z, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmą postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - F_x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F_x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} - F_y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = F_y$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} - F_z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = F_z$$

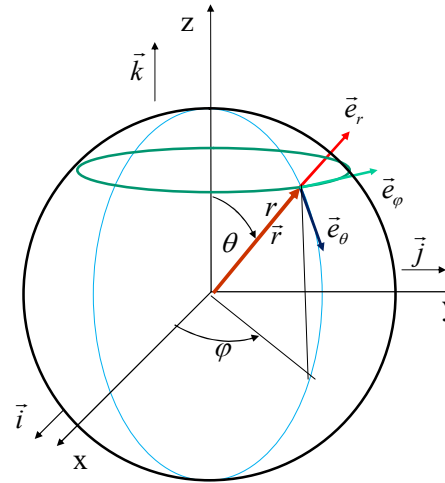
Dygresja: Układ sferyczny

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$



$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r_r & r_\theta & r_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\sin\theta\dot{\varphi} \end{vmatrix} = 0\vec{e}_r - mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta + (2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Składowe gradientu funkcji skalarnej h

$$[\nabla h]_r = \frac{\partial h}{\partial r}$$

$$[\nabla h]_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

$$[\nabla h]_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi}$$

Przykład: Funkcja i równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych sferycznych

Dla punktu materialnego o masie m , na ruch którego nie nałożono więzów można np. przyjąć za współrzędne uogólnione także współrzędne w układzie krzywoliniowym np. sferycznym czyli przyjąć iż $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ przy czym

$$x = x(r, \theta, \varphi) = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = y(r, \theta, \varphi) = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = z(r, \theta) = r \cos(\theta)$$

Ponieważ jest to układ ortogonalny i składowe prędkości w tym układzie są równe :

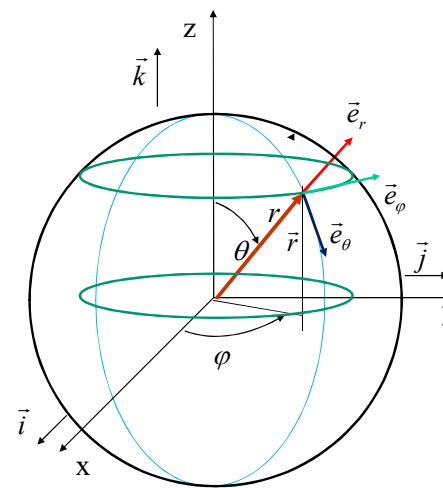
$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r \dot{\theta}$$

$$v_\varphi = r \sin(\theta) \dot{\varphi}$$

to

$$T = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$$



Energię kinetyczną można też określić w następujący sposób

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \sin(\theta) \cos(\varphi) \dot{r} + r \cos(\theta) \cos(\varphi) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \sin(\theta) \sin(\varphi) \dot{r} + r \cos(\theta) \sin(\varphi) \dot{\theta} + r \sin(\theta) \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$z = r \cos \theta \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \dot{\theta} = \cos(\theta) \dot{r} - r \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

Przy założeniu iż siły są potencjalne można określić **funkcje Lagrange'a** jako

$$L(q, \dot{q}, t) = L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) = T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) - V(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta), t) = \\ = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r, \theta, \varphi, t) =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmą postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m\dot{\theta}^2 r - m \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2 r + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow m \left[\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2) \right] = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\Rightarrow ma_r = -[gradV]_r \Rightarrow \boxed{ma_r = F_r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right] = -r \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow rma_\theta = -r[gradV]_\theta \Rightarrow \boxed{rma_\theta = rF_\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}) = -r \sin \theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = -r \sin \theta [gradV]_\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{dL_z}{dt} = r \sin \theta F_\varphi = D_z} \quad D_z - z\text{-owa składowa momentu siły}$$

$$L_z = mxy - myx = mr^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} - z\text{-owa składowa momentu pędu}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta + (2 \sin \theta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta}\dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$$gradV = [gradV]_r \vec{e}_r + [gradV]_\theta \vec{e}_\theta + [gradV]_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Dodatki: Szkic dowodu wzoru $D_z = rF_\varphi \sin \theta$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{r} \times \vec{F} = r\vec{e}_r \times (F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi) = \\ &= rF_r(\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + rF_\theta(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) + rF_\varphi(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = rF_\theta\vec{e}_\varphi - rF_\varphi\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k} & \vec{e}_\theta &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j} & \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, & \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1\end{aligned}$$

$$D_z = \vec{D} \cdot \vec{k} = rF_\theta(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{k}) - rF_\varphi(\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}) = rF_\theta \cdot 0 - rF_\varphi \cdot (-\sin \theta) = rF_\varphi \sin \theta$$

Szkic dowodu wzoru $L_z = mr^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} = mr\vec{e}_r \times (v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi) = \\ &= mr v_r(\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + mr v_\theta(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) + mr v_\varphi(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = mr v_\theta\vec{e}_\varphi - mr v_\varphi\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$L_z = \vec{L} \cdot \vec{k} = mr v_\theta(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{k}) - mr v_\varphi(\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}) = mr v_\theta \cdot 0 - mr v_\varphi \cdot (-\sin \theta) = mr v_\varphi \sin \theta$$

$$v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} \Rightarrow L_z = mr^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}$$

Pędy uogólnione

$$p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \left(\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp_l}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_l} \right)$$

Związek między **pędem uogólnionym** p_l **związanym ze współrzędną** q_l $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$
a składowymi w układzie kartezjańskim wektorów pędu punktów materialnych $p_{m,j} = m_j \dot{x}_j$

$$p_{m,j} = m_j \dot{x}_j = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \left(\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

$L(x, \dot{x}, t)$

$$L(q, \dot{q}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) = T(\dot{x}) - V(x, t)$$

$$p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$

(wektor pędu i -tego punktu w układzie kartezjańskim:

$$\vec{p}_{mi} = m_i \dot{\vec{r}}_i = [m_i \dot{x}_i, m_i \dot{y}_i, m_i \dot{z}_i] = [p_{m,3i-2}, p_{m,3i-1}, p_{m,3i}] \quad), \quad i = 1, \dots, n$$

Przykład. Pędy uogólnione gdy współzrzednymi uogólnionymi są współzrzedne w układzie cylindrycznym

$$p_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{3n} p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Gdy współzrzednymi uogólnionymi opisującym układ złożony wyłącznie ze swobodnego punktu materialnego ($i=1$) o pędzie

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

$$\vec{p}_m = m\vec{\dot{r}} = [m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}] = [p_{m1}, p_{m2}, p_{m3}] = [p_x, p_y, p_z]$$

$$y = \rho \sin(\varphi)$$

są współzrzedne w układzie cylindrycznym $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$

$$z = z$$

to

$$p_\rho = \sum_{j=1}^3 p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial \rho} = p_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + p_y \frac{\partial y}{\partial \rho} + p_z \frac{\partial z}{\partial \rho} = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi = \vec{p}_m \cdot \vec{e}_\rho$$

$$p_\varphi = \sum_{j=1}^3 p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} = p_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + p_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + p_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -p_x \rho \sin \varphi + p_y \rho \cos \varphi =$$

z-towa składowa momentu pędu

$$= -p_x y + p_y x = L_z$$

$$p_z = \sum_{j=1}^3 p_{mj} \frac{\partial x_j}{\partial z} = p_x \frac{\partial x}{\partial z} + p_y \frac{\partial y}{\partial z} + p_z \frac{\partial z}{\partial z} = p_z$$

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{p}_m = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

Całki pierwsze równań Lagrange'a II rodzaju

Całka pędu uogólnionego związanego ze współrzędną uogólnioną

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp_r}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \Rightarrow \frac{dp_r}{dt} = 0 \Rightarrow p_r = \text{const}$$

Jeżeli funkcja Lagrange'a nie zależy od jednej ze współrzędnych uogólnionych (taka współrzędna nazywana jest **współrzędną cykliczną**), to pęd uogólniony związany z tą współrzędną jest całką ruchu.

Pęd uogólniony nie musi mieć wymiaru pędu mechanicznego

Całki pierwsze równań Lagrange'a II rodzaju

Całka uogólnionej energii G

$$\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l} \Rightarrow \dot{p}_l \dot{q}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \Rightarrow \dot{p}_l \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^f \left(\dot{p}_l \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = 0$$

$$\sum_{l=1}^f \left(\frac{dp_l}{dt} \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^f \left(\frac{d(p_l \dot{q}_l)}{dt} - p_l \ddot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = 0 \quad p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f \left(\frac{d(p_l \dot{q}_l)}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l \right) - \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l \right) - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l) - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dG}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{gdzie}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{ze wzoru na pochodną zupełną } L \text{ po czasie}$$

$$G(q, \dot{q}, t) = \sum_{l=1}^f p_l(q, \dot{q}, t) \dot{q}_l - L(q, \dot{q}, t)$$

Uogólnioną energię G traktujemy w ogólności jako funkcję współrzędnych uogólnionych, prędkości uogólnionych i czasu.

$$\frac{dG}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dG}{dt} = 0 \Rightarrow G = \text{const}$$

Jeżeli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu, to uogólniona energia jest stałą ruchu

Ogólnie $\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Jaki jest sens funkcji G-uogólnionej energii? (dowód wymagany)

Ciągle zakładamy że siły są potencjalne czyli $L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$

Dodatkowo dobieramy współrzędne uogólnione q_l tak by wzory transformacyjne między współrzędnymi kartezjańskimi układu punktów materialnych a współrzędnymi uogólnionymi $x_j = x_j(q)$ nie zależały explicite (jawnie) od czasu. Taki dobór współrzędnych jest możliwy gdy równania więzów nie zależą explicite od czasu

$$x_j = x_j(q) \rightarrow \dot{x}_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l = \dot{x}_j(q, \dot{q})$$

Energia kinetyczna jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych i nie zależy jawnie od czasu

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^f a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = T(q, \dot{q}) \quad \text{gdzie} \quad a_{kl}(q) = \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

$$\text{Wówczas} \quad \sum_{m=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \sum_{k,m=1}^f a_{km}(q) \dot{q}_k \dot{q}_m = 2T \quad a_{kl}(q) = a_{lk}(q)$$

$$G = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L = \sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - L = \sum_{l=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - T + V = 2T - T + V = T + V$$

Widać iż przy powyższych założeniach uogólniona energia $G = T(q, \dot{q}) + V(q, t)$ ma sens całkowitej energii. Uwzględniając to iż $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ jest ona stałą ruchu

gdy potencjał nie zależy jawnie od czasu $V(q, t) = V(q) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow G = \text{const}$

Dowód relacji

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^f a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$$x_j = x_j(q)$$

$$\dot{x}_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \left(\sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \cdot \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f \left(\sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

$$a_{kl}(q) = \sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$$

Dowód relacji

$$\sum_{m=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = 2T$$

$$a_{mk}(q) = a_{km}(q)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^f a_{ml}(q) \dot{q}_l + \sum_{k=1}^f a_{km}(q) \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^f a_{mk}(q) \dot{q}_k + \sum_{k=1}^f a_{km}(q) \dot{q}_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^f a_{km}(q) \dot{q}_k$$

$$\sum_{m=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \sum_{k,m=1}^f a_{km}(q) \dot{q}_k \dot{q}_m = \sum_{k,l=1}^f a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = 2T$$

Wskazówki przy wyborze współrzędnych uogólnionych

- 1) Często korzystny jest taki wybór współrzędnych by jak największa ich ilość była współrzędnymi cyklicznymi czyli pędy z nimi związane były całkami ruchu.
- 2) Gdy wiemy iż ruch zachodzi w płaszczyźnie to za współrzędne uogólnione przyjmujemy współrzędne służące do opisu położenia ciała na tej płaszczyźnie.
- 3) Jeżeli jest taka możliwość to korzystne jest wybrać współrzędne tak by każde z równań Lagrange'a II rodzaju było równaniem różniczkowym zawierającym wyrazy zależne tylko od jednej współrzędnej uogólnionej oraz jej pierwszych i drugich pochodnych po czasie. Jest to możliwe do osiągnięcia gdy zachodzi separacja zmiennych w funkcji Lagrange'a, czyli funkcja ta jest sumą wyrazów, z których każdy może zależeć wyłącznie od jednej współrzędnej i/lub prędkości uogólnionej.
$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \sum_{i=1}^f L_i(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Wówczas układ równań Lagrange'a II rodzaju, będący układem sprzężonych ze sobą f równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 2, staje się układem f niezależnych od siebie równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego.

Np. gdy wiemy iż **ruch jest płaski, czyli zachodzi np. pod wpływem siły centralnej**

$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ to za współrzędne uogólnione wybieramy współrzędne służące do opisu położenia ciała w tej płaszczyźnie.

Mogą być nimi współrzędne r, φ w układzie biegunowym wprowadzone w płaszczyźnie ruchu, przy czym w ruchu pod wpływem siły $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ współrzędna φ jest współrzędną cykliczną gdyż

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \quad \text{gdzie} \quad f(r) = -\frac{dV}{dr}$$

czyli
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{const}$$

Analizując ruch pod wpływem siły $f(r) = -kr$ a więc **oscylatora izotropowego**

innym dogodnym wyborem jest wybór współrzędnych x, y w układzie

kartezjańskim wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu, gdyż w takim przypadku

$$\vec{F} = -kx\vec{i} - ky\vec{j} \quad \text{czyli potencjał spełniający relacje} \quad \vec{F} = -\text{grad}V \quad \text{ma postać} \quad V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

i zachodzi separacja zmiennych w funkcji Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \right) + \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{k}{2}y^2 \right)$$

a równania Lagrange'a przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0$$

Dla układu złożonego ze swobodnych punktów materialnych na które nie działają siły zewnętrzne wśród współrzędnych uogólnionych dobrze jest wybrać 3 współrzędne jako współrzędne kartezjańskie określające położenie środka masy

$$x_M = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \quad y_M = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \quad z_M = \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \quad M = \sum_i m_i$$

Energia kinetyczna takiego układu jest równa $T = \frac{M}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2) + T^{(s)}$

gdzie $T^{(s)}$ –energia kinetyczna w układzie środka masy,
zaś funkcja Lagrange’a

$$L = T - V = \frac{M}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2) + T^{(s)} - V$$

W opisywanym układzie zarówno $T^{(s)}$ jak i potencjał V nie zależy od współrzędnych x_M, y_M, z_M (są one współrzędnymi cyklicznymi)

A zatem pędy uogólnione związane ze współrzędnymi x_M, y_M, z_M

$$p_{xM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = M\dot{x}_M \quad p_{yM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_M} = M\dot{y}_M \quad p_{zM} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_M} = M\dot{z}_M$$

są stałymi ruchu gdyż $\dot{p}_{xM} = \frac{\partial L}{\partial x_M} = \frac{\partial T}{\partial x_M} - \frac{\partial V}{\partial x_M} = 0 \quad \dot{p}_{yM} = \frac{\partial L}{\partial y_M} = 0 \quad \dot{p}_{zM} = \frac{\partial L}{\partial z_M} = 0$
(środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnym)