

Podstawy mechaniki kwantowej

- a) Równanie Schrödingera zależne od czasu
- b) Probabilistyczna interpretacja funkcji falowej
- c) Zasada nieoznaczoności i probabilistyczny charakter przewidywań mechaniki kwantowej
- d) Paczka falowa
- e) Równanie Schrödingera niezależne od czasu
- f) Warunki które musi spełniać funkcja falowa
- g) Stan stacjonarny

Funkcja falowa dla cząstki swobodnej (na którą klasycznie nie działa siła czyli porusza się ona ze stałą prędkością i pędem)

Związek między własnościami korpuskularnymi cząstki E oraz p a jej własnościami falowymi ω , λ , k :

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$$

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$p\text{-pęd}, k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{-liczba falowa}, \lambda\text{-długość fali}, \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ (} h\text{-stała Plancka)}$$

$$E\text{-energia} \quad \nu\text{-częstość fali} \quad \omega = 2\pi\nu \text{-częstość kołowa}$$

Dla opisu własności falowych takiej cząstki wprowadzamy funkcje falową przyjmującą wartości zespolone (czyli mającą część rzeczywistą i zespoloną) zależną od współrzędnych przestrzennych i czasu

$$\Psi = \Psi(\vec{r}, t) = \text{Re } \Psi(\vec{r}, t) + i \text{Im } \Psi(\vec{r}, t)$$

Załóżmy iż cząstka wykazująca własności falowe porusza się w obszarze stałego potencjału $V=0$ (na cząstkę w ujęciu klasycznym nie działa wówczas żadna siła, a jej energia potencjalna jest równa tożsamościowo zeru). Gdy cząstka ta porusza się w kierunku ustalonym przez zwrot osi Ox i ma energię E to odpowiadająca jej funkcja falowa wyraża się wzorem

$$\Psi = \Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t)$$

A -dowolna stała

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Gdy A jest liczba rzeczywista to część rzeczywista funkcji Ψ równa $\Psi_r = A \cos(kx - \omega t)$ opisuje fale płaską harmoniczną propagującą wzdłuż osi Ox

Równanie spełniane przez funkcję falową opisującą cząstkę swobodną poruszającą się w kierunku równoległym do osi Ox

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (*)$$

Jednym z rozwiązań tego równania jest funkcja $\Psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ gdy spełnione jest równanie $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ co można sprawdzić licząc pochodne

$$i^2 = -1$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega Ae^{i(kx - \omega t)} = -i\omega \Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ikAe^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i^2 k^2 Ae^{i(kx - \omega t)} = -k^2 Ae^{i(kx - \omega t)} = -k^2 \Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi \Rightarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \cdot (-i\omega \Psi) = \hbar \omega \Psi$$

$$i^2 = -1$$

Równanie

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (*)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi$$

jest spełnione gdy

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Ponieważ $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ oraz $E = \hbar \omega$ to relacja $\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ jest równoważna relacji

$E = \frac{p^2}{2m}$ słusznej dla cząstki nierelatywistycznej obdarzonej masą gdy energia potencjalna $V=0$ czyli energia całkowita jest równa energii kinetycznej.

Funkcja $\Psi_r = A \cos(kx - \omega t)$ nie spełnia równania (*) lecz tylko równanie falowe

$\frac{d^2 \Psi_r}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \Psi_r}{dt^2} = 0$ (v - prędkość fali) wówczas gdy $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ co prowadzi do niepoprawnej relacji między energią i pędem (słusznej tylko dla fotonów dla których $v=c$, $E=pc$)

Uzyskanie poprawnej relacji między pędem i energią przy dodatkowym żądaniu by równanie falowe było liniowe wymaga zapostulowania go w postaci równania, którego rozwiązaniem jest funkcja falowa zespolona. Liniowość równania zapewnia iż suma dwóch funkcji będących jego rozwiązaniem jest także jego rozwiązaniem, co pozwala na uzyskanie opisu zjawisk interferencji czy dyfrakcji fal materii.

W przypadku ruchu w przestrzeni trójwymiarowej w potencjale $V=0$ równanie

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

przyjmuje postać

$$\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Operator Laplace'a

W przypadku ruchu w obszarze o $V \neq 0$ w tym w szczególności potencjale zależnym od położenia (w którym klasycznie na cząstkę działa siła) należy równanie uzupełnić o dodatkowy człon

Potencjał, w którym porusza się cząstka, równy jej energii potencjalnej

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Powyższe równanie opisujące cząstkę nierelatywistyczną o niezerowej masie zostało sformułowane przez Erwina Schrödingera w 1926 roku, przy czym w ogólnym przypadku $\Psi(x, t) \neq Ae^{i(kx - \omega t)}$

Interpretacja Borna funkcji falowej

Kwadrat modułu funkcji falowej $\rho = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia cząstki kwantowej w danym miejscu w danej chwili czasu. Wielkość tą po odpowiednim unormowaniu funkcji falowej określa się jako gęstość prawdopodobieństwa przy czym prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w danej chwili t w elemencie objętości dV jest równe $|\Psi|^2 dV$

(widać analogie do fali elektromagnetycznej o amplitudzie natężenia pola elektrycznego E_0 , w przypadku której prawdopodobieństwo znalezienia fotonu w elemencie objętości dV jest proporcjonalne do $E_0^2 dV$)

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w całym obszarze jest równe 1 (pewność).

Wynika z tego warunek normalizacji funkcji falowej

$$\int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

W przestrzeni jednowymiarowej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Fale de Broglie'a są „**falami prawdopodobieństwa**”,

Uwaga:

Znajomość funkcji falowej pozwala ponadto na określenie prawdopodobieństwa uzyskania określonych wyników w pomiarze różnych wielkości fizycznych na cząstce znajdującej się w stanie kwantowym specyfikowanym przez postać funkcji falowej

Wielkość proporcjonalną do gęstości prawdopodobieństwa ρ znalezienia cząstki w określonym punkcie przestrzeni dla fali danej

wzorem $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ określa formuła

$$\rho = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = A^* e^{-i(kx-\omega t)} A e^{i(kx-\omega t)} = A^* A = |A|^2 = \text{const}$$

Funkcji tej nie można unormować w standardowy sposób tak by

$$\int_V \rho dV = \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

Gęstość prawdopodobieństwa jest stała w przestrzeni i w czasie. Nie posiadamy żadnej informacji o położeniu cząstki. Za to posiadamy pełną informację o jej pędzie $p_x = \hbar k$

i energii $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Do opisu cząstki o której położeniu coś wiemy trzeba wykorzystywać funkcję falową dla której pęd nie jest ściśle określony.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga w przestrzeni jednowymiarowej

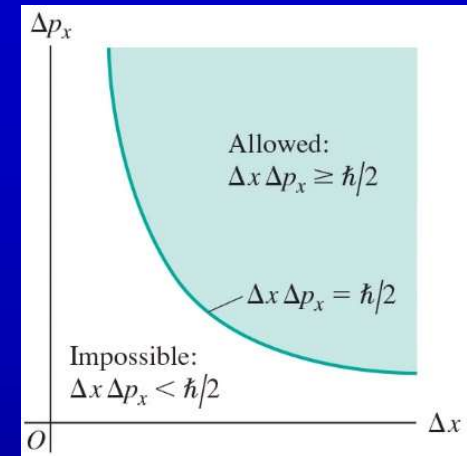
Iloczyn nieoznaczoności (niepewności) pomiaru pędu i pomiaru położenia cząstki nie może być mniejszy od połowy stałej Plancka h dzielonej przez 2π

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

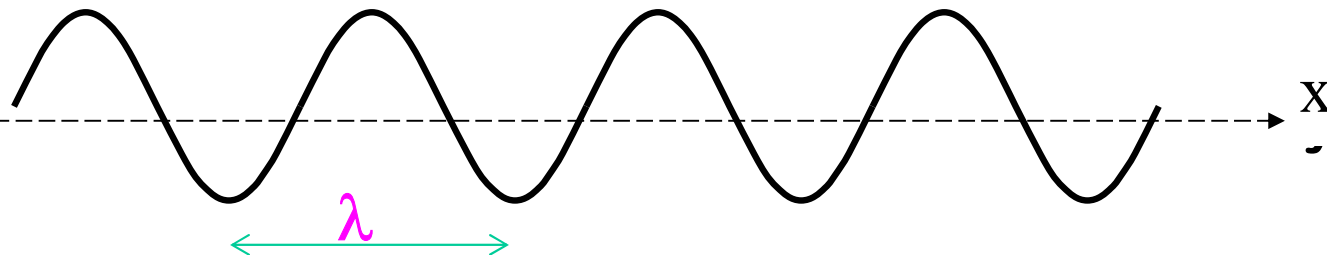
Im znamy dokładniej pęd cząstki tym posiadamy mniejszą informację dotyczącą jej położenia

Jeżeli znamy dokładnie pęd cząstki $p_x = \hbar k_x$, $\Delta p_x = 0$ to znamy długość odpowiadającej jej zespolonej fali płaskiej harmoniczej $\lambda = h/p_x$, której kwadrat modułu jest stały w całej przestrzeni. Nie możemy wówczas powiedzieć, gdzie choćby w przybliżeniu znajduje się cząstka. Położenie cząstki jest nieokreślone $\Delta x = \infty$. Zasada nieoznaczoności wiąże się z korpuskularno-falową naturą materii i tym że jednocześnie możemy analizować tylko jedną z tych dwóch właściwości materii (komplementarność)



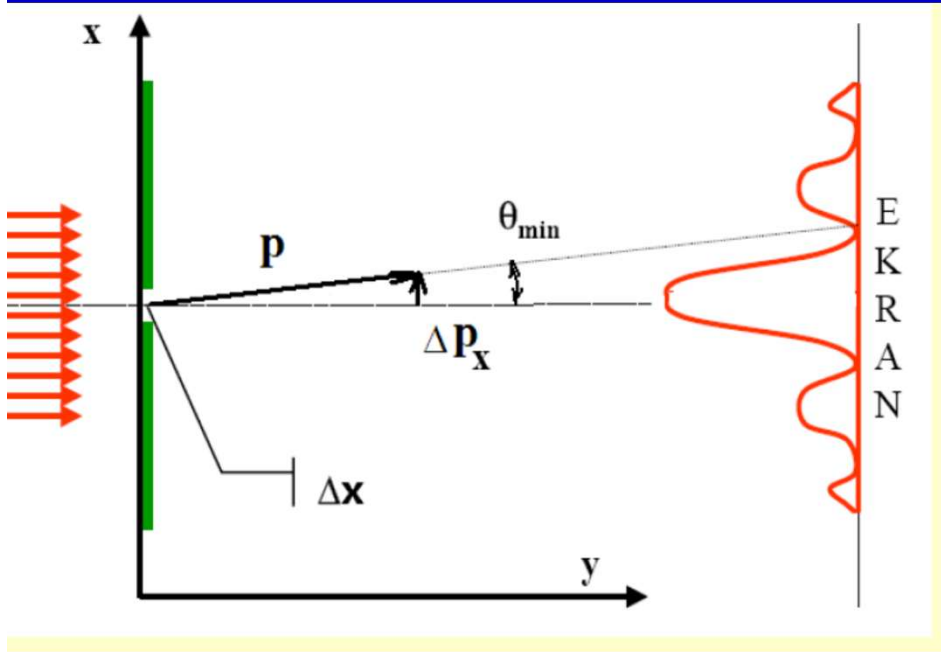
Dla
ustalonego
czasu

$\text{Re } \Psi$



Związek zasady nieoznaczoności z falową naturą cząstek

Cząstka, której odpowiada długość fali λ , padając na szczelinę o szerokości Δx ma pęd skierowany wzdłuż osi y o wartości $p_y = p = h/\lambda$, składowa $p_x = 0$, po przejściu przez szczelinę w wyniku dyfrakcji pojawia się składowa p_x .



Z klasycznej teorii dyfrakcji wynika iż położenie pierwszego minimum dyfrakcyjnego odpowiada kątowi $\theta_{\min}$ określone mu równaniem

$$\Delta x \sin(\theta_{\min}) = \lambda \quad \rightarrow \quad \sin(\theta_{\min}) = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

Δx jest miarą nieoznaczoności x -owej składowej położenia cząstki w momencie przechodzenia cząstki przez szczelinę

Jeżeli cząstka pojawia się na ekranie w punkcie odpowiadającym kątowi to musi mieć składową pędu

$$\theta > \theta_{\min}$$

$$|p_x| > p \sin(\theta_{\min}) = \frac{h}{\lambda} \sin(\theta_{\min}) = \frac{h}{\Delta x}$$

Ponieważ większość cząstek pojawia się na ekranie w punktach dla których to można przyjąć iż nieoznaczoność tej składowej pędu cząstki Δp_x jest co do rzędu wielkości równa

$$\theta \leq |\theta_{\min}|$$

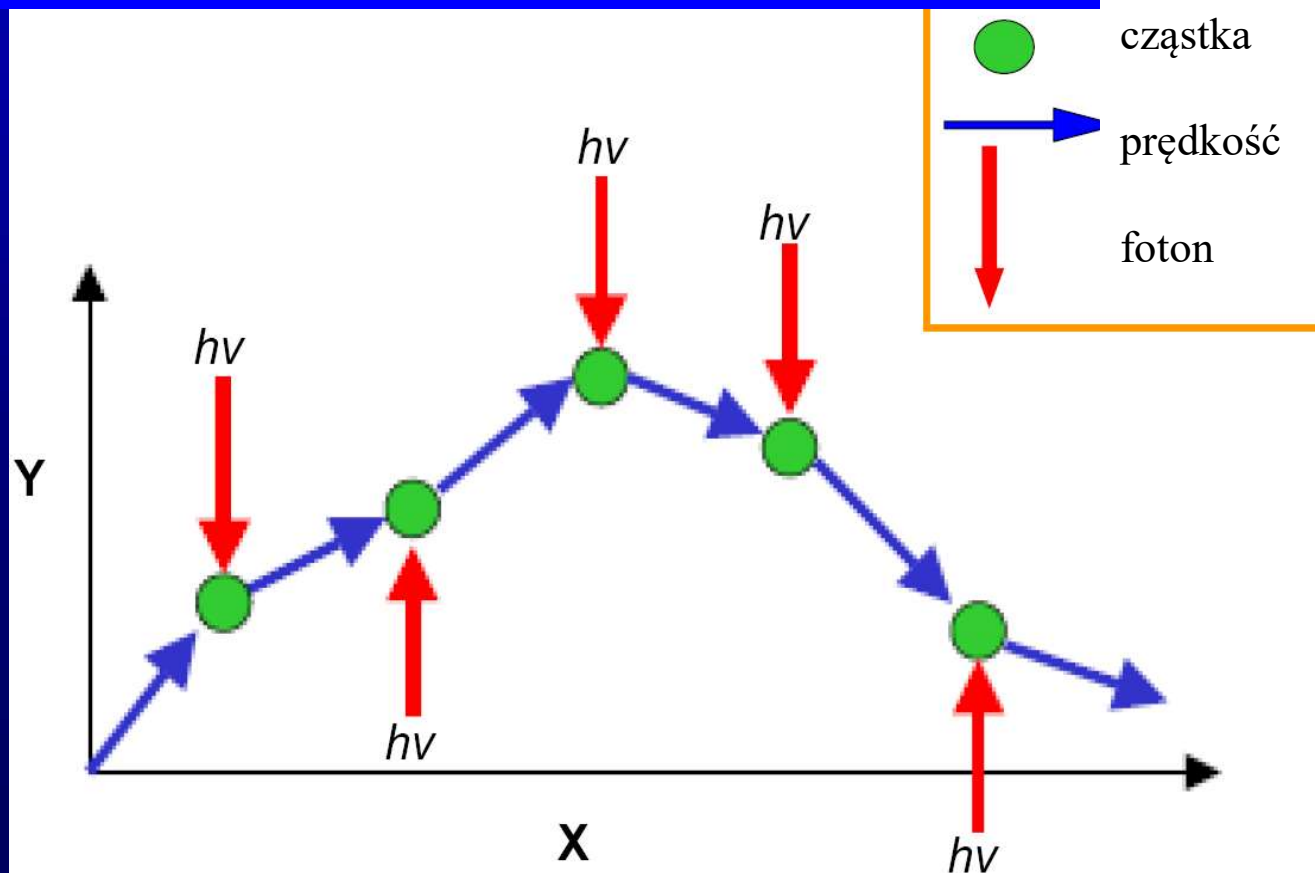
$$\Delta p_x = \frac{h}{\Delta x}$$

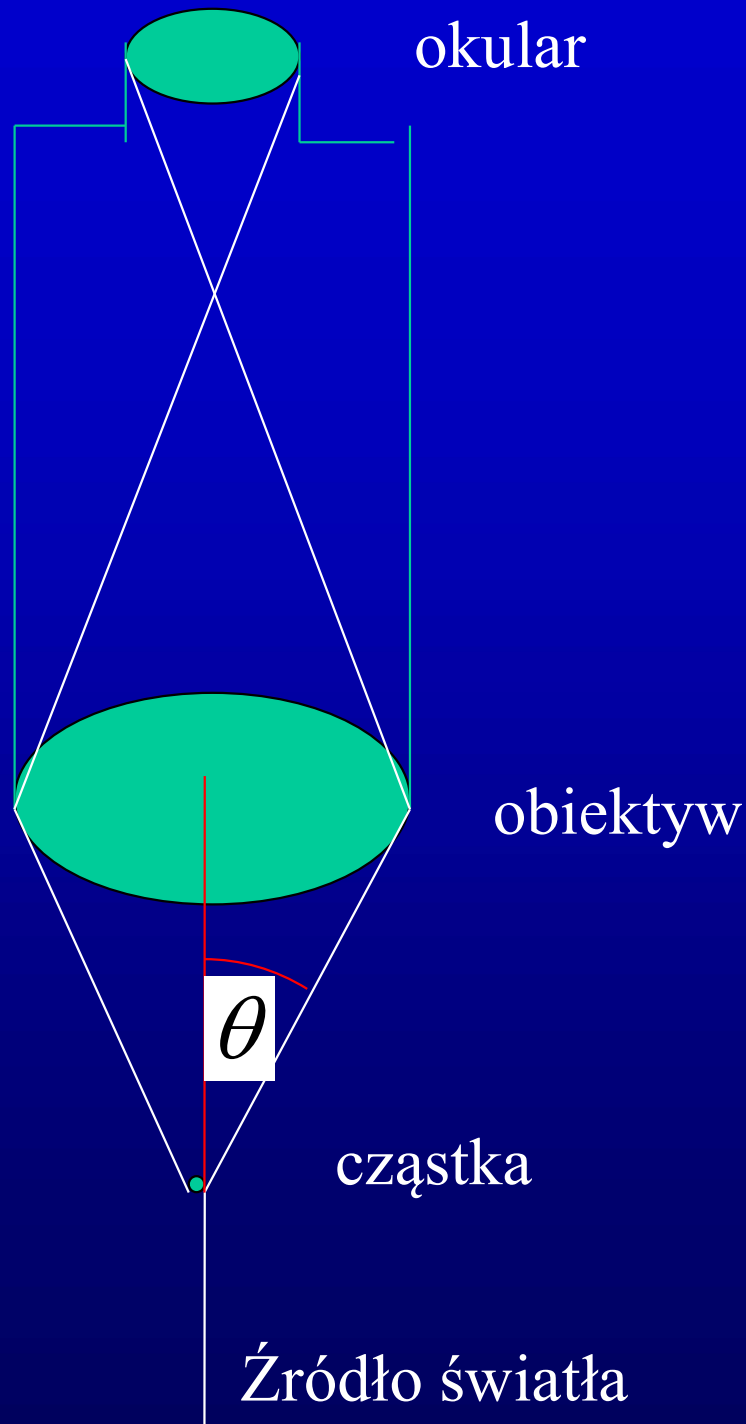
Widać iż iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu spełnia relacje

$$\Delta x \Delta p_x = h > \frac{\hbar}{2}$$

Związek zasady nieoznaczoności z pomiarami

Nie możemy wyznaczyć jednocześnie tej samej składowej położenia i pędu cząstki kwantowej (np. elektronu). Jeśli chcielibyśmy wyznaczyć położenie cząstki to musielibyśmy oświetlić ją, czyli bombardować ją fotonami o energii $h\nu$ i pędzie o wartości $p=h\nu/c=h/\lambda$ (ν - częstość fali elektromagnetycznej, λ -długość fali elektromagnetycznej). Powoduje to jednak oddziaływanie cząstki z fotonem prowadzące do zmiany jej pędu, której nie możemy kontrolować. Im częstość użytego światła jest większa czyli długość fali jest mniejsza tym dokładniej określamy położenie cząstki, za to tracimy w większym stopniu informacje wcześniejszą o jej pędzie. Uniemożliwia to dokładne wyznaczenie toru ruchu cząstki.





Zdolność rozdzielcza mikroskopu
będąca miarą nieoznaczoności
położenia cząstki

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

Nieoznaczoność x-owej
składowej pędu fotonu
docierającego do obiektywu
będącą miarą nieoznaczoności x-
owej składowej pędu cząstki po
jego oddziaływaniu z fotonem

$$\Delta p_x = p \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

A zatem

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{h}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga dla położenia i pędu (w przestrzeni 3-wymiarowej)

Nie można jednocześnie wyznaczyć tych samych składowych położenia i pędu cząstki z dowolną dokładnością.

Iloczyny nieoznaczoności (niepewności wyznaczenia) tych wielkości spełniają zależności

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zasada nieoznaczoności nie nakłada ograniczeń na pomiar różnych składowych wektorów wodzącego i pędu cząstki
Nieoznaczoność pomiaru wielkości A czyli ΔA można związać z odchyleniem standardowym serii złożonej z wielu wyników pomiarów tej wielkości przeprowadzonych na identycznych cząstkach kwantowych

Zasada nieoznaczoności dla energii i czasu

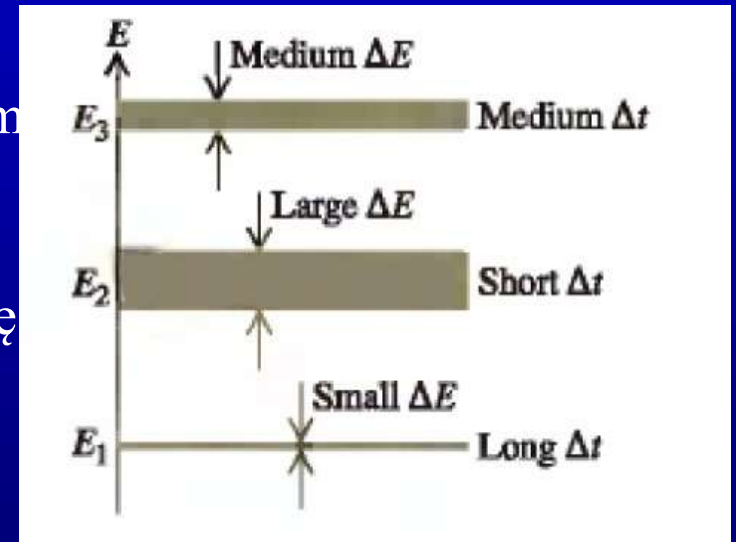
$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Zasada ta wiąże ze sobą np. nieoznaczoność energii cząstki z czasem przez jaki cząstka w tym stanie się znajduje. Wynika z niej ograniczona dokładność pomiaru energii gdy czas trwania pomiaru jest skończony.

Z zasady tej wynika m.in. skończona naturalna szerokość spektralna linii widmowych emitowanego promieniowania. Ponieważ czas przebywania przez atom w stanie wzbudzonym jest skończony, to energia tego stanu, jak i energia fotonu będącego nośnikiem promieniowania emitowanego przez atom znajdujący się w tym stanie oraz sama częstotliwość promieniowania nie jest ściśle określona. Nieoznaczoność energii stanu wzbudzonego jest odwrotnie proporcjonalna do czasu przebywania w stanie wzbudzonym

Opierając się o tą zasadę można oszacować maksymalny czas życia cząstek wirtualnych o minimalnej energii ΔE będących m.in. nośnikami oddziaływań np. bozonów W^+, W^-, Z^0 będących nośnikami oddziaływania słabego



Probabilistyczny charakter przewidywań mechaniki kwantowej

Z zasady nieoznaczoności dla położenia i pędu wynika iż nie można określić wszystkich wielkości potrzebnych do deterministycznego wyznaczenia zachowania się cząstki kwantowej w przyszłości (nawet w przypadku gdyby ewolucja ta podlegała prawom klasycznym gdy do wyznaczenia ruchu ciała niezbędna jest znajomość jej położenia i pędu w chwili początkowej)

Mimo iż równanie Schrödingera pozwala opisać w sposób deterministyczny ewolucje funkcji falowej opisującej stan kwantowy cząstki to znajomość tej funkcji nie pozwala na deterministyczne określenie wyników większości pomiarów wielkości fizycznych charakteryzujących według mechaniki klasycznej stan cząstki.

Wyniki pomiarów tych wielkości można dla cząstki kwantowej określić tylko w sposób probabilistyczny.

Ponadto sam pomiar wprowadza pewną "nieprzewidywalność" co do dalszego zachowania się cząstki modyfikując stan kwantowy w którym cząstka się znajduje w sposób zależny od nieprzewidywalnego w sposób deterministyczny wyniku pomiaru.

Wielkość proporcjonalną do gęstości prawdopodobieństwa ρ dla fali danej wzorem

$$\Psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

określa formuła

$$\rho = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = A^* e^{-i(kx - \omega t)} A e^{i(kx - \omega t)} = A^* A = |A|^2 = \text{const}$$

Fali rozważanej nie można unormować tak by $\int_V \rho dV = \int_V |\Psi|^2 dV = 1$

Problem taki pojawia się często wtedy rozważamy ruch cząstki w obszarze nieskończonym i rozwiązujemy go gdy jest to niezbędne np. ograniczając obszar w którym porusza się cząstka i zakładając iż nie modyfikuje to postaci funkcji falowej, lub też wprowadzamy inny sposób normalizacji funkcji falowej.

Dla rozważanej płaskiej fali harmoniczej posiadamy pełną informację o pędzie cząstki i nie posiadamy żadnej informacji o położeniu cząstki. Zwykle posiadamy częściową informację o pędzie i położeniu cząstki. Do opisu takiej cząstki możemy wykorzystać fale będącą superpozycją złożeniem wielu fal płaskich o różnych wartościach energii i pędu - paczkę falową, którą możemy unormować. Analiza zachowania cząstki opisywanej przy pomocy paczki falowej jest jednak z punktu matematycznego trudniejsza niż cząstki opisanej falą płaską.

- Rozpatrzmy fale będącą złożeniem dwóch fal płaskich w chwili czasu $t=0$.

$$\Psi_1(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega_1 t)) \quad \Psi_2(x, t) = A \exp(i(k_2 x - \omega_2 t))$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega_1 t)) + A \exp(i(k_2 x - \omega_2 t)) = \\ &= [A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + iA \sin(k_1 x - \omega_1 t)] + [A \cos(k_2 x - \omega_2 t) + iA \sin(k_2 x - \omega_2 t)] \\ &= 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \cos(kx - \omega t) + i 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \sin(kx - \omega t) \\ &= 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] = \\ &= 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \exp(i(kx - \omega t)) \end{aligned}$$

$$k_1 = k - \Delta k / 2$$

$$k_2 = k + \Delta k / 2$$

$$\omega_2 = \omega + \Delta \omega / 2$$

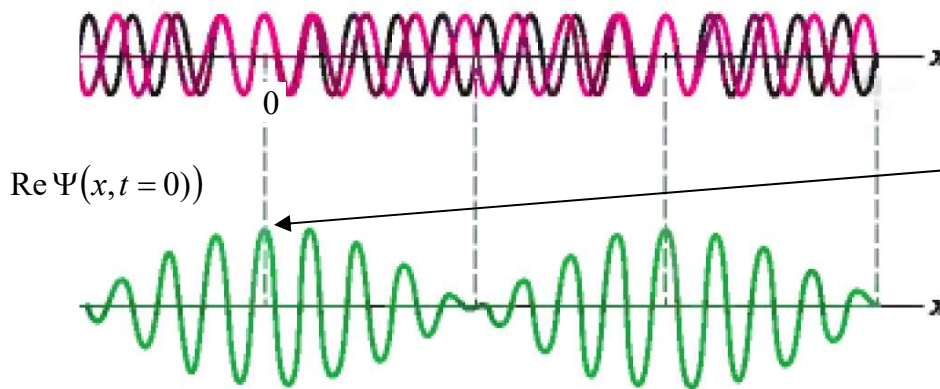
$$\omega_1 = \omega - \Delta \omega / 2$$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

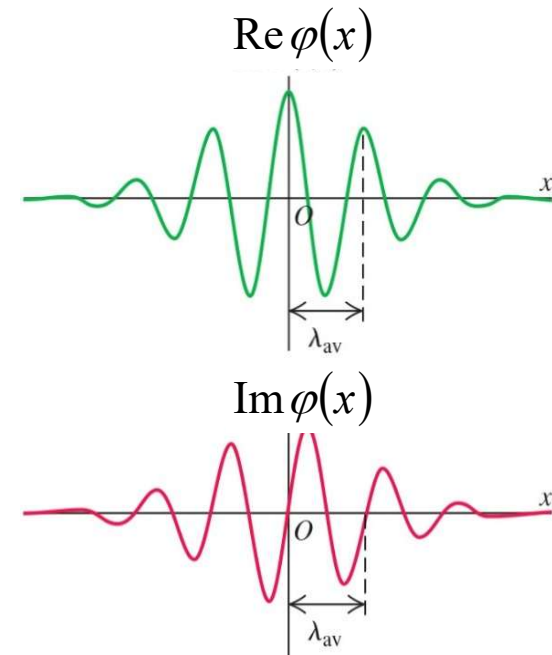
$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$\text{Re } \Psi_{1,2}(x, t = 0)$



Prędkość przemieszczania się położenia maksimum amplitudy $V_{gr} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$

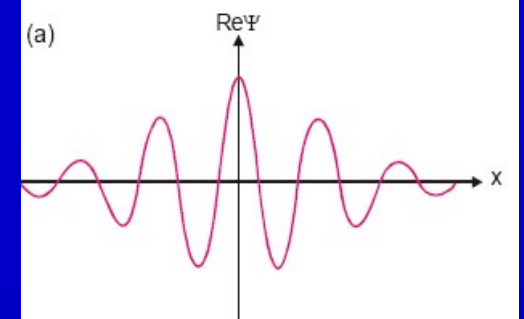
w wyniku odpowiedniego złożenia nieskończonej ilości fal możemy otrzymać obraz pokazany obok przedstawiający funkcję falową zlokalizowaną w przestrzeni będącą paczką falową w przypadku której wzrosła nasza informacja o położeniu a zmalała o pędzie cząstki. Wzrost różnicy wektorów falowych fal tworzących paczkę prowadzi do zmniejszenia jest szerokości



Paczka falowa

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk A(k) \exp(i(kx - \omega t))$$

$$\omega = \omega(k)$$



Paczkę falową stanowi superpozycja fal płaskich, taka iż moduł funkcji falowej posiada wyraźne maksimum. Liczby falowe k tych fa mogą np. pochodzić z pewnego skończonego przedziału wokół wartości k_0 lub też można przyjąć iż $\Delta k = \infty$. $A(k)$ dobieramy tak by gęstość prawdopodobieństwa posiadała wyraźne maksimum. W przypadku cząstki opisanej paczką falową posiadamy większą informację o położeniu cząstki, za to maleje wiedza o pędzie (i energii) cząstki. Wielkości te nie są jednoznacznie określone (przejaw zasady nieoznaczoności)

Gdy cząstka porusza się w obszarze stałego potencjału $V=0$ to zakładamy iż pomiędzy energią i pędem cząstki zachodzi klasyczna relacja $E = \frac{p^2}{2m}$ z której wynika poniższa relacja pomiędzy liczbą falową k i częstością kołową ω

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\frac{p^2}{2m}}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Prędkość fazowa fali o wektorze falowym k_0 jest różna od prędkości cząstki

$$V_f = \frac{\omega}{k_0} = \frac{E}{\hbar k_0} = \frac{\hbar k_0}{2m} = \frac{p}{2m}$$

Prędkość przemieszczania się maksimum modułu funkcji falowej zachodzi z prędkością grupową

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}(k = k_0) = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

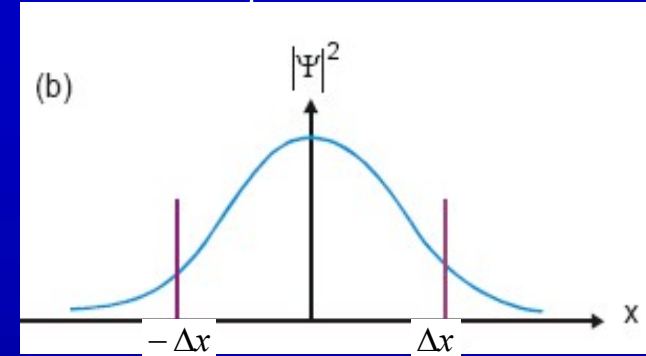
równą klasycznej prędkości

cząstki o pędzie $p = \langle p \rangle = \hbar k_0$

Gaussowska paczka falowa

Dla paczki gaussowskiej gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni i gęstość prawdopodobieństwa dla pomiaru pędu cząstki jest opisana funkcją gaussowską. Warunki te są spełnione gdy unormowaną funkcję falową przyjmiemy się w chwili czasu $t=0$ w postaci

$$\Psi(x, t=0) = \frac{1}{(2\pi(\Delta x)^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2} + ik_0 x\right)$$



Wówczas

$$\rho(x, t=0) = |\Psi(x, t=0)|^2 = \frac{1}{(2\pi(\Delta x)^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right)$$

Funkcję tę unormowano tak by iż gęstość prawdopodobieństwa spełniała warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx = 1$$

Wartości oczekiwane położenia w chwili czasu $t=0$ i pędu takiej cząstki są równe

$$\langle x \rangle = 0$$

oraz

$$\langle p \rangle = \hbar k_0$$

Wartości oczekiwane są średnimi wynikami pomiarów przeprowadzonych na wielu identycznych cząstkach kwantowych. Można pokazać iż nieoznaczoności pomiaru położenia i pędu cząstki opisanej powyższą funkcją są

równe $\Delta x = \Delta x$

oraz

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

odpowiednio czyli

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$$

W celu przedstawienia zapostulowanej funkcji falowej za pomocą wzoru opisującego paczkę falową

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk A(k) \exp(ikx - i\omega t)$$

Gdy ruch cząstki w obszarze stałego potencjału $V=0$ to

$$\omega = \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

trzeba przyjąć iż $\Delta k = \infty$ zaś $A(k)$ wyraża się przez odwrotną transformatę Fouriera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \Psi(x, t=0) dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt[4]{2\pi}} \sqrt{\pi \Delta x} \exp(-(k - k_0)^2 \Delta x^2)$$

$A(k)$ określa stopień wkładu do paczki falowej fal płaskich scharakteryzowanych przez różne wartości pędu $p = \hbar k$ i

energii cząstki $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ z których każda porusza się z inną

prędkością fazową $V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m}$ różną od prędkości

$$V = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$$

poruszania się cząstki klasycznej o pędzie $p = \hbar k$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp(ikx - i\omega t)$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt[4]{2\pi}} \sqrt{\pi \Delta x} \exp(-(k - k_0)^2 \Delta x^2)$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Można pokazać iż gęstość prawdopodobieństwa w chwili $t > 0$ będzie również opisana funkcją gaussowską:

$$\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x(t)} \exp \left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m} \right)^2}{2(\Delta x(t))^2} \right)$$

$$\Delta x(t) = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4}}$$

Położenie maksimum rozkładu gęstości prawdopodobieństwa przesuwa się w kierunku dodatnim osi Ox z prędkością grupową daną wzorem

$$V_g = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{\langle p \rangle}{m} = \frac{d\omega}{dk} (k = k_0)$$

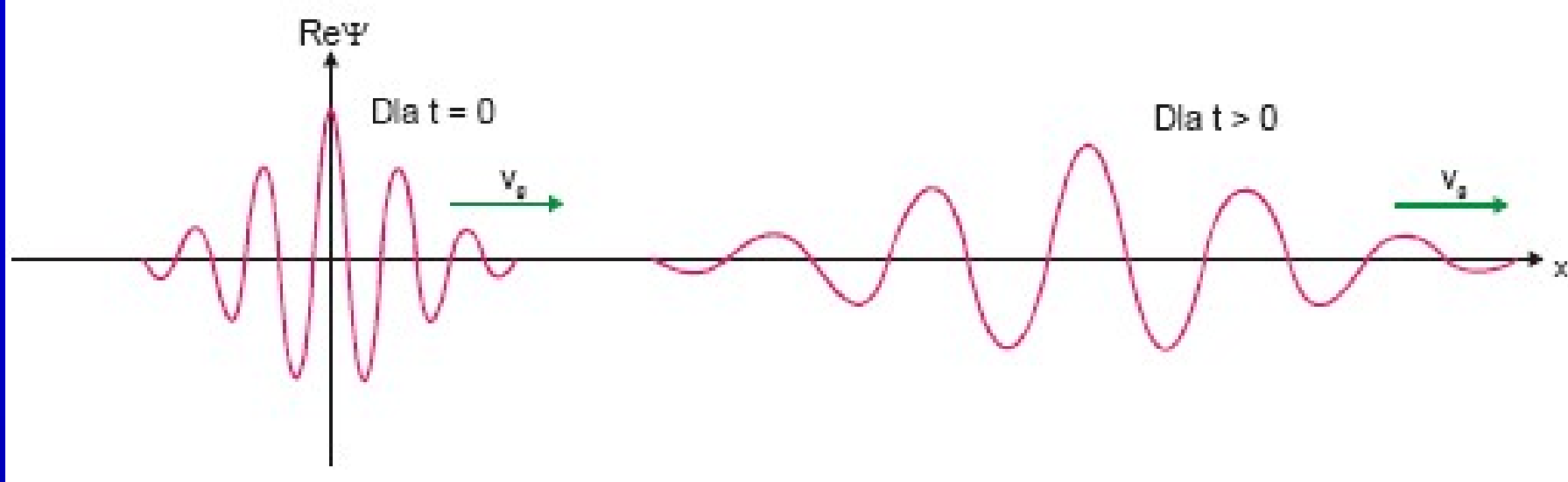
równą klasycznej prędkości

cząstki o pędzie $p = \langle p \rangle = \hbar k_0$

Szerokość krzywej Gaussa

$$\Delta x(t) = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4}}$$

rośnie z upływem czasu (paczka falowa się rozplywa) tym szybciej im bardziej paczka była w chwili początkowej zlokalizowana



$$\Delta x(t) = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4}}$$

Czas po którym szerokość paczki rośnie dwukrotnie czyli

$\Delta x(t) = 2\Delta x$ jest równy

$$t = \frac{2\sqrt{3}m(\Delta x)^2}{\hbar}$$

1) Dla $m=1\text{g}$, $\Delta x = 1\text{mm}$ $t \approx 10^{25}\text{s}$

(szacowany wiek Wszechświata $t \approx 10^{17}\text{s}$)

2) Dla $m=9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$, $\Delta x = 10^{-10}\text{m}$ $t \approx 10^{-16}\text{s}$

W tym przypadku traci sens pojęcie toru cząstki

Obliczenia (dla zainteresowanych)

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \Psi(x, t=0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(2\pi(\Delta x)^2\right)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2} + ik_0 x\right) \exp(-ikx) dx$$

$$A(k) = \frac{1}{\left(2\pi(\Delta x)^2\right)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2} + i(k_0 - k)x\right) dx = \frac{1}{\left(2\pi(\Delta x)^2\right)^{1/4}} \sqrt{\pi} 2\Delta x \exp\left(-(k - k_0)^2 \Delta x^2\right)$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt[4]{2\pi}} \sqrt{\pi \Delta x} \exp\left(-(k - k_0)^2 \Delta x^2\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$a = \frac{1}{4(\Delta x)^2}$$

$$b = i(k_0 - k)$$

Obliczenia (dla zainteresowanych)

$$\Psi(x,t) = \frac{2\sqrt{\pi\Delta x}}{\sqrt[4]{2\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-(k-k_0)^2(\Delta x)^2\right) \exp(ikx) \exp\left(-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}\right).$$

Otrzymana całka ma postać: $\psi(x,t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp(w(k)) dk$

gdzie: $C = \sqrt{\frac{\Delta x}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}$, $w(k) = -(k-k_0)^2 \Delta x^2 + i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)$.

$w(k)$ można zapisać w postaci:

$$w(k) = -\left[(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}\right]^2 k^2 + [2k_0(\Delta x)^2 + ix]k - k_0^2(\Delta x)^2 = -ak^2 + bk - k_0^2(\Delta x)^2$$

gdzie $a = (\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}$, $b = 2k_0\Delta x^2 + ix$.

Całka przyjmuje postać: $\Psi(x,t) = C \exp(-k_0^2\Delta x^2) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ak^2 + bk)$

Ponieważ $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$ (a, b -liczby zespolone, $\text{Re } a > 0$),

to po wykonaniu całkowania dostaniemy: $\Psi(x,t) = \frac{C\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}} \exp(-u(x,t))$

gdzie $u(x,t) = k_0^2(\Delta x)^2 - \frac{[2k_0(\Delta x)^2 + ix]^2}{4\left[(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}\right]} = \frac{\left\{4\left[(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}\right]k_0^2(\Delta x)^2 - [2k_0(\Delta x)^2 + ix]^2\right\}\left[(\Delta x)^2 - \frac{i\hbar t}{2m}\right]}{4\left[(\Delta x)^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}\right]}$

:

$$\Psi(x, t) = \frac{C\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}} \exp(-u(x, t))$$

$$\text{gdzie } u(x, t) = \frac{\left\{ 4 \left[(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m} \right] k_0^2 (\Delta x)^2 - \left[2k_0 (\Delta x)^2 + ix \right]^2 \right\} \left[(\Delta x)^2 - \frac{i\hbar t}{2m} \right]}{4 \left[(\Delta x)^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right]} = R + i\varphi$$

$$\text{zaś } R = \frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m} \right)^2}{4(\Delta x)^2 \left[1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4} \right]} \quad \varphi = \frac{\frac{2\hbar t}{m} \left[k_0^2 (\Delta x)^4 - \frac{x^2}{4} \right] - 4k_0 x (\Delta x)^4}{4(\Delta x)^2 \left[1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4} \right]}.$$

$$\text{Czyli } \Psi(x, t) = \frac{C\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}} \exp(-R(x, t) - i\varphi(x, t))$$

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie x jest równa:

$$\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \frac{|C|^2 \pi}{\sqrt{(\Delta x)^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}} \exp(-2R(x, t)) = \frac{\frac{\Delta x}{\pi \sqrt{2\pi}} \pi}{(\Delta x)^2 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4}}} \exp(-2R(x, t))$$

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\Delta x) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4}}} \exp \left(- \frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m} \right)^2}{2(\Delta x)^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4} \right)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x(t)} \exp \left(- \frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m} \right)^2}{2(\Delta x(t))^2} \right)$$

$$\text{gdzie } \Delta x(t) = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)^4}}.$$

Równanie Schrödingera zależne od czasu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Psi = \Psi(\vec{r}, t) \quad \text{-funkcja falowa}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$V = V(\vec{r}, t) \quad \text{-potencjał}$$

Równanie to określa ewolucję w czasie funkcji falowej wprowadzonej dla opisu cząstki nierelatywistycznej o masie m .

Narzuca ona też warunki na wartości tej funkcji w sąsiednich punktach przestrzeni dla ustalonej chwili czasu.

Jeżeli występujący w równaniu Schrödingera potencjał V nie zależy jawnie od czasu, $V = V(\vec{r})$ to rozwiązanie równania Schrödingera można poszukiwać w postaci:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) f(t)$$

Po wstawieniu do równania Schrödingera otrzymujemy :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) f(t) = i\hbar \psi(\vec{r}) \frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

Po podzieleniu równania stronami przez $\psi(\vec{r})f(t)$ otrzymujemy :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} + V(\vec{r}) = i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

Obie strony powyższego równania zależą od innych zmiennych

Dokonałszy rozdzielenia zmiennych. Równanie powyższe jest spełnione wówczas gdy obie jego strony są równe stałej, która jak zobaczymy dalej jest równa energii cząstki.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} + V(\vec{r}) = i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \text{const} = E$$

A zatem

$$i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} = E f(t)$$

$$i\hbar \frac{df(t)}{dt} = E f(t)$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{iE}{\hbar} dt$$

$$\ln f = -\frac{iE}{\hbar} t + \ln(\text{const})$$

Część zależna
od czasu
funkcji falowej

$$f(t) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Porównanie z funkcją falową opisującą cząstkę poruszającą się w obszarze $V=0$ w kierunku wyznaczonym przez zwrot osi OX

$$\Psi = A e^{i(kx - \omega t)} = A e^{i(kx - Et/\hbar)} = A e^{ikx} e^{-iEt/\hbar}$$

uzasadnia oznaczenie $\text{const}=E$

Część zależna od zmiennych przestrzennych funkcji falowej spełnia tzw. **równanie Schrödingera niezależne od czasu**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} + V(\vec{r}) = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

W przestrzeni jednowymiarowej

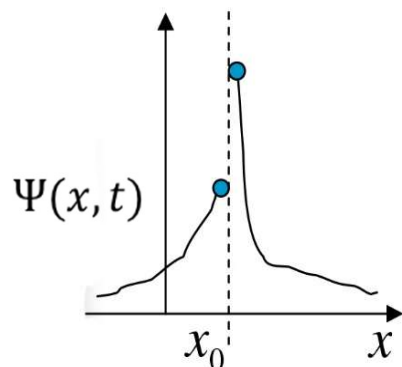
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Dodatkowe warunki nałożone na funkcje falową

Funkcja opisująca cząstkę kwantową musi być **skończona, jednoznaczna i ciągła** w całym obszarze. W przypadku gdy potencjał nie zmienia się o wielkość nieskończoną to również pierwsze pochodne tej funkcji po zmiennych przestrzennych muszą być funkcjami ciągłymi, co wynika z powyższego równania. Warunki te wprowadzają dodatkowe ograniczenia na postać funkcji falowej i mogą prowadzić do ograniczenia możliwych wartości energii cząstki do wartości dyskretnych gdy ruch cząstki jest ograniczony w przestrzeni.

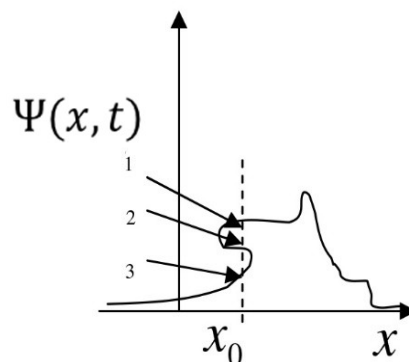
Niedozwolona funkcja falowa

- funkcja nieciągła



Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w okolicy x_0 zależy od kierunku, z którego się zbliżamy - błąd

- funkcja niejednoznaczna



Gęstość prawdopodobieństwa w x_0 nie jest jednoznaczna a powinna być

- funkcja osiągająca wartość nieskończoną dla skończonego przedziału (x_0, x_0+dx)
 Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym przedziale nieskończone $\int_{x_0}^{x_0+dx} |\Psi(x, t)|^2 dx = \infty$

Często do warunków, które musi spełniać funkcja falowa dodajemy warunek unormowania $\int_V |\Psi|^2 dV = 1$

Tym niemniej funkcjami niespełniającymi tego warunku posługujemy się gdy analizujemy sytuacje w której ruch cząstki nie jest w ogóle ograniczony w przestrzeni i/lub chcemy zanalizować sytuacje w której cząstka ta ma niektóre wielkości (np. pęd) ściśle określone (co stanowi idealizacje). Posługujemy się też nimi do przedstawienia unormowanej funkcji falowej jako ich kombinacji w celu określenia prawdopodobieństwa uzyskania konkretnych wartości tych wielkości w pomiarze.

Stan stacjonarny

Pokazaliśmy iż rozwiązanie równania Schrödingera zależnego od czasu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

z potencjałem nie zależnym jawnie od czasu $V = V(\vec{r})$ można zapisać w postaci

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right)$$

gdzie $\psi(\vec{r})$ spełnia równanie niezależne od czasu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

W takim stanie zwanym stanem stacjonarnym energia jest ustalona $E = \text{const}$ oraz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni nie zależy od czasu

$$\rho = |\Psi_n(\vec{r}, t)|^2 = \psi^*(\vec{r}) \exp\left(i \frac{Et}{\hbar}\right) \psi(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right) = |\psi(\vec{r})|^2$$

Ogólne rozwiązanie równania Schrödingera zależnego od czasu gdy potencjał od czasu nie zależy

Rozwiązanie ogólne może być liniową kombinacją (superpozycją) rozwiązań znalezionych poprzednio odpowiadających dozwolonym energiom $E=E_n$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n \psi_n(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{E_n t}{\hbar}\right) = \sum_n \psi_n(\vec{r}) \exp(-i \omega_n t)$$

gdzie $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$

$\psi_n(\vec{r})$ spełnia równanie Schrödingera niezależne od czasu z energią E_n

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_n(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) = E_n \psi_n(\vec{r})$$

Gdy brak jest ograniczenia na dozwolone energie cząstki w ogólnym rozwiązaniu suma po liczbie n indeksującej rozwiązanie równania niezależnego od czasu przechodzi w całkę po energii lub wielkości zależnej jednoznacznie od energii. Z sytuacją taką mamy do czynienia w przypadku paczki falowej gdzie funkcje wyraża się jako całkę po liczbie falowej k .

W przypadku stanu o nieustalonej energii opisanego za pomocą sumy lub całki gęstość znalezienia cząstki w przestrzeni zależy od czasu.

Powstanie mechaniki kwantowej - historia

1900 – Max Planck – promieniowanie ciała doskonale czarnego

1905 – Albert Einstein – efekt fotoelektryczny

1911 – Ernest Rutherford – odkrycie jądra atomowego

1913 – Niels Bohr – model Bohra atomu wodoru

1922 – Arthur Compton – rozpraszanie fotonów na elektronach

1925 – Wolfgang Pauli – zakaz Pauliego

1923–25 – Luis-Victor de Broglie – fale materii

lipiec 1925 – Werner Heisenberg – początki mechaniki macierzowej

sierpień 1925 – Max Born, Jordan – mechanika macierzowa

wrzesień 1925 – Paul Dirac – mechanika macierzowa

grudzień 1925 – Heisenberg, Born, Jordan – całość mechaniki macierzowej

styczeń - czerwiec 1926 – Erwin Schrödinger – mechanika falowa

marzec 1926 – równoważność mechaniki falowej i macierzowej

czerwiec - lipiec 1926 – Born – interpretacja probabilistyczna

1926 – Dirac, Jordan – ogólny formalizm mechaniki kwantowej

marzec 1927 – Heisenberg – zasada nieoznaczoności

1927 – Bohr, Heisenberg – szkoła kopenhaska

1928 – Dirac – relatywistyczna teoria elektronu

Według **interpretacji kopenhaskiej mechaniki kwantowej** nie jest i nigdy nie będzie możliwe

- a) przewidzenie w sposób deterministyczny wyników większości pomiarów wykonanych nad układem kwantowym. Zwykle można tylko określić prawdopodobieństwa uzyskania konkretnych wartości w pomiarze rozważanej wielkości fizycznej
- b) przypisanie niektórym wartościom fizycznym konkretnych wartości poza chwilami czasu w których te wielkości są mierzone
- c) jednoczesne wyznaczenie niektórych wielkości fizycznych np. położenia i pędu

Przeciwnie **konceptje lokalnych ukrytych zmiennych** postulują iż można by przewidzieć wyniki wszystkich pomiarów w dowolnej chwili czasu w sposób deterministyczny gdyby dane były informacje o wartościach tzw. ukrytych zmiennych dla analizowanych układów kwantowych

Niestety nie umiemy określić wartości tych zmiennych i nawet często nie wiemy co to są za zmienne i dlatego nie możemy stosować teorii deterministycznej i musimy stosować teorie statystyczną jaką jest mechanika kwantowa

Eksperymenty potwierdzające łamanie nierówności Bella wskazują iż nie można stworzyć teorii opartej na koncepcji ukrytych zmiennych bez uwzględnienia jednocześnie występowania oddziaływań, które przenosiłyby się z prędkością większą niż światło czyli zmienne te musiałyby być nielocalne (sprzeczność z teorią względności)

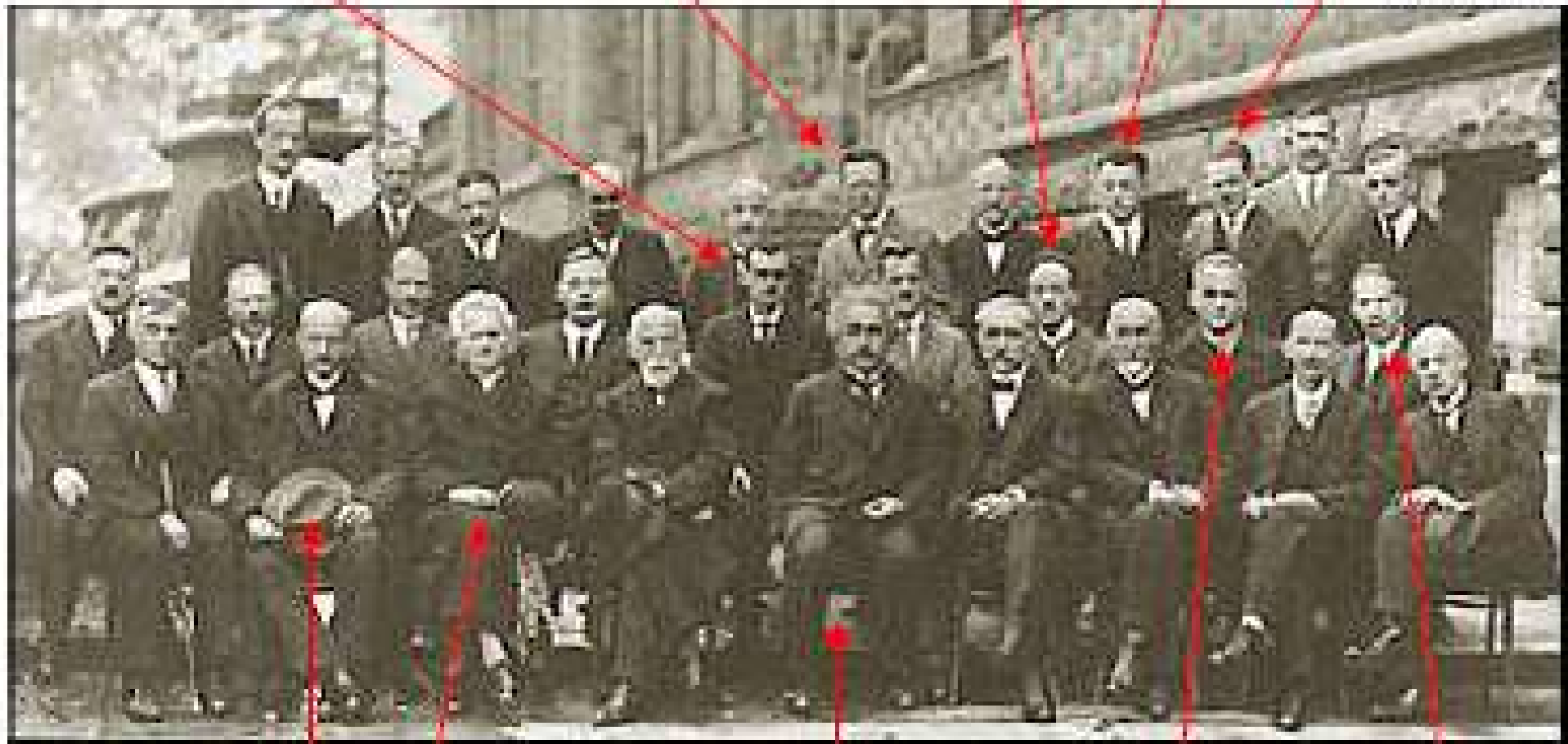
Paul Dirac
(1902-84)

Erwin Schrödinger
(1887-1961)

Louis de Broglie (1900-58)
(1892-1987)

Wolfgang Pauli

Werner Heisenberg
(1901-76)



Max Planck(1858-1947)

Max Born(1882-1970)

Marie Curie(1867-1934)

Albert Einstein(1879-1955)

Niels Bohr
(1885-1962)

Przykładowe pytania opisowe

- 1)
 - a) Sformułować zasadę nieoznaczoności Heisenberga dla położenia i pędu oraz energii i czasu. Podać przykłady wskazujące na zgodność opisu obiektów lub zjawisk kwantowych z zasadą Heisenberga
 - b) Rozważyć cząstkę swobodną o masie m i energii E opisaną poniższą funkcją falową

$$\Psi(x, t) = A \exp(ikx - i\omega t) \text{ gdzie } \omega = \frac{E}{\hbar}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Co można powiedzieć o pędzie tej cząstki? Czemu równa jest nieoznaczoność pomiaru pędu dla tej cząstki? Czy można wyróżnić punkty w przestrzeni w których występuje podwyższona gęstość prawdopodobieństwa znalezienia tej cząstki? Jaka musi być nieoznaczoność położenia tej cząstki ażeby była spełniona zasada nieoznaczoności?

- 2) Czym jest paczka falowa? Z jaką wielkością opisującą paczkę falową można powiązać prędkość poruszania się w obszarze stałego potencjału cząstki opisywanej taką paczką? Dlaczego paczka taka z upływem czasu się rozpływa w trakcie jej propagacji i jakie może mieć to implikacje przy opisywaniu ruchu cząstki przy wykorzystaniu paczki falowej? Jaki wpływ na szybkość rozpływania się paczki gausowskiej ma jej szerokość?
- 3) Sformułować w ogólnej postaci równanie Schrödingera zależne i niezależne od czasu. Wyjaśnić znaczenie wszystkich symboli pojawiających się w tych równaniach.
- 4) Jaki stan kwantowy nazywamy stacjonarnym? Co można powiedzieć o gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w określonym punkcie przestrzeni w tym stanie? Jaka wielkość opisująca stan cząstki jest zawsze jednoznacznie określona w tym stanie.

Przykładowe pytania testowe

1) Które z poniższych równań jest równaniem Schrödingera zależnym od czasu

a) $i\hbar \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \Psi$

b) $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \Psi$

c) $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\nabla + V] \Psi$

d) $i\hbar \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla + V \right] \Psi ?$

(gdzie $\Delta = \nabla^2$).

2) Wiemy iż cząstka poruszająca się w przestrzeni jednowymiarowej opisana jest zespoloną funkcją falową $\Psi(x, t)$. Jak można określić dla chwili czasu t gęstość prawdopodobieństwa znalezienia tej cząstki w punkcie o współrzędnej x ?

a) $\rho = \Psi^2$

b) $\rho = \Psi^* \Psi$

c) $\rho = |\Psi|^2$

d) $\rho = |\Psi|$

e) $\rho = |\Psi|^2 x$

(Ψ^* oznacza funkcję sprzężoną w sposób zespolony do funkcji Ψ)

Zaznaczyć wszystkie poprawne odpowiedzi.

Jaki warunek musi spełniać funkcja falowa aby opisywana wzorem $\rho = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ wielkość naprawdę reprezentowała gęstość prawdopodobieństwa

a) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi| dx = 1$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1$

c) $|\Psi| < 1$

d) funkcja falowa musi przyjmować wartości rzeczywiste

Zaznaczyć właściwą odpowiedź.

3) Rozważamy funkcję falową opisującą cząstkę kwantową poruszającą się w obszarze potencjału przyjmującego we wszystkich punktach przestrzeni skończone wartości. Które z podanych niżej twierdzeń dotyczących własności tej funkcji są twierdzeniami prawdziwymi?

a) Wartości tej funkcji muszą być liczbami rzeczywistymi.

b) Funkcja ta nie może osiągać wartości nieskończonych.

c) Funkcja ta musi być funkcją ciągłą swoich argumentów przestrzennych.

d) Funkcja ta musi być funkcją jednoznaczną.

e) Funkcja ta w żadnym punkcie przestrzeni nie może przyjmować wartości równej zero.

f) Pierwsza pochodna tej funkcji po każdej ze zmiennych przestrzennych musi być funkcją ciągłą.

- 4) Rozważyć cząstkę swobodną o masie m i energii E poruszającą się w przestrzeni jednowymiarowej opisaną poniższą funkcją falową

$$\Psi(x,t) = A \exp(ikx - i\omega t) \text{ gdzie } \omega = \frac{E}{\hbar}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Które z poniższych stwierdzeń są stwierdzeniami prawdziwymi?

- a) W stanie określonym tą funkcją falową dokładnie określony jest pęd cząstki równy $p = \hbar k$.
- b) W stanie określonym tą funkcją falową dokładnie określone jest położenie cząstki równe $x=0$.
- c) W stanie określonym tą funkcją falową nieoznaczoność pędu cząstki jest równa $\Delta p = 0$.
- d) W stanie określonym tą funkcją falową nieoznaczoność pędu cząstki jest równa $\Delta p = \hbar k$.
- e) W stanie określonym tą funkcją falową nieoznaczoność pędu cząstki jest równa $\Delta p = \infty$.
- f) W stanie określonym tą funkcją falową nieoznaczoność położenia cząstki jest równa $\Delta x = 0$.

Zaznaczyć wszystkie prawdziwe stwierdzenia

- 5) Zasada nieoznaczoności Heisenberga wprowadza ograniczenie na możliwość jednoczesnego dokładnego pomiaru
- a) tych samych składowych wektorów wodzącego i pędu cząstki
 - b) różnych składowych wektorów wodzącego i pędu cząstki
 - c) różnych składowych wektora wodzącego cząstki
 - d) różnych składowych wektora pędu cząstki
 - e) energii cząstki podczas pomiaru trwającego skończony czas
 - f) energii cząstki istniejącej przez skończony okres czasu

Zaznaczyć wszystkie poprawne stwierdzenia.

Czy można wyznaczyć dokładnie tor cząstki kwantowej?

6) Które z poniższych twierdzeń dotyczących paczki falowej są prawdziwe?

- a) Cząstka opisana paczką falową ma ściśle określone położenie.
- b) Cząstka opisana paczką falową ma ściśle określony pęd.
- c) Nie można jednocześnie określić dokładnie pędu i położenia cząstki opisanego paczką falową.
- d) W czasie ewolucji paczki falowej opisującej cząstkę swobodną maleje dokładność z jaką możemy przewidzieć wynik pomiaru położenia tej cząstki.
- e) Paczka falowa porusza się z prędkością grupowa równą prędkości klasycznej cząstki, z którą można związać tą paczkę.
- f) Paczka falowa porusza się z prędkością fazową równą prędkości klasycznej cząstki, z którą można związać tą paczkę.
- g) Cząstka opisana paczką falową znajduje się w stanie stacjonarnym

- 7) Znamy rozwiązania równania Schrödingera niezależnego od czasu
- $$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_n(\vec{r})+V(\vec{r})\psi_n(\vec{r})=E_n\psi_n(\vec{r})$$

Które z poniższych stwierdzeń dotyczących właściwości stanu stacjonarnego w jakim znajduje się cząstka kwantowa są stwierdzeniami prawdziwymi?

- a) w stanie stacjonarnym funkcja falowa opisująca cząstkę kwantową nie zależy od czasu
- b) w stanie stacjonarnym gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni nie zależy od czasu
- c) w stanie stacjonarnym znana jest energia cząstki
- d) w stanie stacjonarnym znany jest położenie cząstki
- e) w stanie stacjonarnym funkcja falowa opisująca cząstkę stanowi superpozycję co najmniej dwóch funkcji będących rozwiązaniem równania Schrödingera niezależnego od czasu o różnych energiach
- f) w stanie stacjonarnym funkcję falową opisującą cząstkę kwantową można wyrazić wzorem $\psi(\vec{r},t)=\psi_n(\vec{r})\exp\left(-\frac{iE_nt}{\hbar}\right)$
- g) w stanie stacjonarnym funkcję falową opisującą cząstkę kwantową można wyrazić wzorem $\psi(\vec{r},t)=\psi_n(\vec{r})\exp\left(-\frac{E_nt}{\hbar}\right)$
- h) w stanie stacjonarnym funkcję falową opisującą cząstkę kwantową można wyrazić wzorem $\psi(\vec{r},t)=\sum_n c_n(t)\psi_n(\vec{r})\exp\left(-\frac{iE_nt}{\hbar}\right)$ w którym co najmniej dwa współczynniki c_n są różne od zera