

Ilościowa analiza ruchu ciała o masie zredukowanej μ pod wpływem siły centralnej

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Określenie równania toru w układzie biegunowym o początku w centrum siły ze wzoru Bineta

$$-\frac{L^2}{\mu r^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = f(r)$$

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow -\frac{L^2}{\mu r^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{L^2}$$

Podstawienie $u = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu\alpha}{L^2}$

Pełne rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0$ i szczególnego rozwiązania równania pełnego

1) Rozwiązanie równania jednorodnego przewidujemy w postaci $u_{ogrj} = C \exp(\lambda\varphi)$

Po wstawieniu go do równania jednorodnego otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\frac{d^2 u_{ogrj}}{d\varphi^2} + u_{ogrj} = 0 \Rightarrow \lambda^2 C \exp(\lambda\varphi) + C \exp(\lambda\varphi) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Jego pierwiastki są równe $\lambda_1 = i$ oraz $\lambda_2 = -i$

Ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$u_{ogrj} = C_1 \exp(\lambda_1\varphi) + C_2 \exp(\lambda_2\varphi) = C_1 \exp(i\varphi) + C_2 \exp(-i\varphi)$$

C_1, C_2 stałe dowolne zespolone (dwie stałe bo równanie różniczkowe rzędu drugiego)

Można go zapisać bez wykorzystania liczb zespolonych w postaci

$$\begin{aligned} u_{ogrj} &= C_1 \exp(i\varphi) + C_2 \exp(-i\varphi) = C_1 [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] + C_2 [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)] = \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\varphi) + i(C_1 - C_2) \sin(\varphi) = B_1 \cos(\varphi) + B_2 \sin(\varphi) \quad B_1, B_2 \text{ -- stałe dowolne} \end{aligned}$$

Rozwiązanie w postaci

$$u_{ogrj} = B_1 \cos(\varphi) + B_2 \sin(\varphi)$$

jest równoważne rozwiązaniu zapisanemu w postaci

$$u_{ogrj} = A \cos(\varphi - \varphi_0) \text{ gdzie } A, \varphi_0 \text{ - stałe dowolne}$$

$$\text{Dowód } u_{ogrj} = A \cos(\varphi - \varphi_0) = A \cos(\varphi) \cos(\varphi_0) + A \sin(\varphi) \sin(\varphi_0)$$

$$\text{Zgodność gdy } B_1 = A \cos(\varphi_0) \quad B_2 = A \sin(\varphi_0)$$

2) Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania pełnego niejednorodnego

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu\alpha}{L^2}$$

Prawa strona równania nie zależy od φ , można poszukiwać rozwiązania w postaci stałej

$$u_{sz} = C \Rightarrow \frac{d^2 u_{sz}}{d\varphi^2} + u_{sz} = C \quad \frac{d^2 u_{sz}}{d\varphi^2} + u_{sz} = \frac{\mu\alpha}{L^2} \Rightarrow C = \frac{\mu\alpha}{L^2}$$

Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego przyjmuje postać

$$u_{og} = \frac{1}{r} = u_{ogrj} + u_{sz} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2}$$

Uzależnienie stałej A od energii ciała i wartości momentu pędu będących całkami ruchu

Uzależnienie energii potencjalnej od r

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int f(r)dr = -\int -\frac{\alpha}{r^2}dr = -\frac{\alpha}{r} + C \quad f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \text{ Znajdź } V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ gdy } C=0.$$

Uzależnienie energii całkowitej od A

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow V = -\frac{\alpha}{r} = -\alpha u \Rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu} \left\{ \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} + V(r) = \frac{L^2}{2\mu} \left\{ \left[\frac{du}{d\varphi} \right]^2 + u^2 \right\} - \alpha u$$

$$u = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -A \sin(\varphi - \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2\mu} \left\{ [-A \sin(\varphi - \varphi_0)]^2 + \left[A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2} \right]^2 \right\} - \alpha \left[A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2} \right] = \\ &= \frac{L^2}{2\mu} \left\{ A^2 [\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0)] + \frac{2A\mu\alpha}{L^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} \right\} - \alpha \left[A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2} \right] = \\ E &= \frac{L^2 A^2}{2\mu} + A\alpha \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha^2}{2L^2} - A\alpha \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\mu\alpha^2}{L^2} = \frac{L^2 A^2}{2\mu} - \frac{\mu\alpha^2}{2L^2} \end{aligned}$$

E nie zależy od φ bo energia ciała nie zależy od położenia punktu na torze ruchu

$$E = \frac{L^2 A^2}{2\mu} - \frac{\mu\alpha^2}{2L^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\mu}{L^2} \left(E + \frac{\mu\alpha^2}{2L^2} \right)} = \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2 \alpha^2}{L^4}} = \frac{\mu|\alpha|}{L^2} \sqrt{\frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} + 1}$$

(przyjęcie ujemnego znaku A można by skompensować zmieniając o π stałą φ_0)

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{\mu|\alpha|}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} + \frac{\mu\alpha}{L^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\mu|\alpha|}{L^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} + 1 \right]} & \text{gdy } \alpha > 0 \\ \frac{1}{\frac{\mu|\alpha|}{L^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} - 1 \right]} & \text{gdy } \alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha = |\alpha|$ gdy $\alpha > 0$; $\alpha = -|\alpha|$ gdy $\alpha < 0$

Równanie toru dla siły
przyciągającej $\alpha > 0$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu|\alpha|}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)}}$$

Równanie toru dla siły
odpychającej $\alpha < 0$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu|\alpha|}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)}}$$

Określenie równania toru z całki energii i momentu pędu dla siły

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

$$\varphi = \int \frac{\pm \frac{L_z}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}} + const$$

$$f(r) = -\frac{dV}{dr} \quad V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\varphi = \pm \frac{L}{\mu} \int \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}} dr + const$$

$$const = \varphi_0$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{1}{r^2} dr$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{L}{\mu} \int \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}} dr = \mp \frac{L}{\mu} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2\alpha u}{\mu} - \frac{L^2 u^2}{\mu^2}}} du = \mp \frac{L}{\mu} \frac{\mu}{L} \arccos \left[\frac{-\frac{2\alpha}{\mu} + \frac{2L^2}{\mu^2} u}{\sqrt{\frac{4\alpha^2}{\mu^2} + \frac{8EL^2}{\mu^3}}} \right] =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bu - cu^2}} du \stackrel{c>0}{=} -\frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \left[-\frac{b - 2cu}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \right]$$

$$a = \frac{2E}{\mu} \quad b = \frac{2\alpha}{\mu} \quad c = \frac{L^2}{\mu^2} > 0$$

$$= \pm \arccos \left[\frac{\frac{2\alpha}{\mu} \left(\frac{L^2 u}{\mu \alpha} - 1 \right)}{\frac{2|\alpha|}{\mu} \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}}} \right] \stackrel{\alpha>0}{=} \pm \arccos \left[\frac{\frac{L^2 u}{\mu \alpha} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}}} \right]$$

Siła przyciągająca

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \arccos \left[\frac{\frac{L^2}{\mu \alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}}} \right] \quad \frac{L^2}{\mu \alpha r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu \alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Równanie toru dla siły przyciągającej $\alpha > 0$

Można pokazać iż w przypadku gdy $\alpha < 0$ (siła odpychająca) otrzymujemy równanie toru w postaci

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu |\alpha|}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Dyskusja równania toru dla siły

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

siła przyciągająca
 $\alpha > 0$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$L \neq 0$$

Równanie toru jest równaniem krzywej stożkowej

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Centrum siły w ognisku

ε mimośród

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hiperbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parabola
$0 < \varepsilon < 1$	$-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$	elipsa
$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$	okrąg

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \geq 0$$

P parametr

$$P = \frac{L^2}{\mu\alpha} > 0$$

Ruch po torach (orbitach) ograniczonych

Tory ruchu ograniczone (elipsa i okrąg)
odpowiadają energii $E < 0$

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hiperbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parabola
$0 < \varepsilon < 1$	$-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$	elipsa
$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$	okrąg

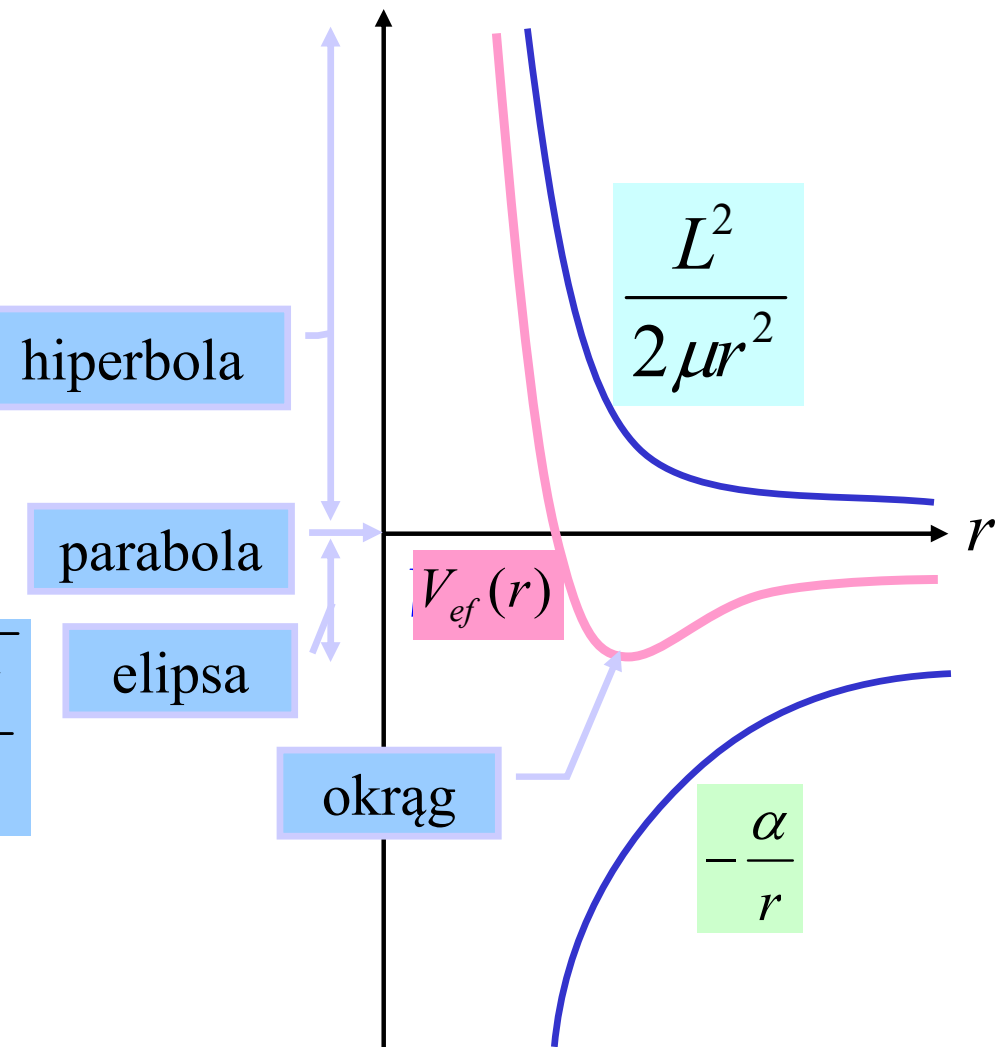
$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

Ruch po okręgu $\varepsilon = 0$

$$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$$

$$r = \text{const} = P = \frac{L^2}{\alpha\mu}$$



Ruch po elipsie $0 < \varepsilon < 1$

Odległości od ogniska do peryhelium i aphelium

$$r_{\min} = \frac{P}{(1 + \varepsilon)} \quad \text{dla} \quad \varphi - \varphi_0 = 0 + 2n\pi \quad r_{\max} = \frac{P}{(1 - \varepsilon)} \quad \text{dla} \quad \varphi - \varphi_0 = \pi + 2n\pi$$

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$P = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

Widać iż przejście $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$ wiąże się ze zmianą kąta φ o 2π -orbita zamknięta

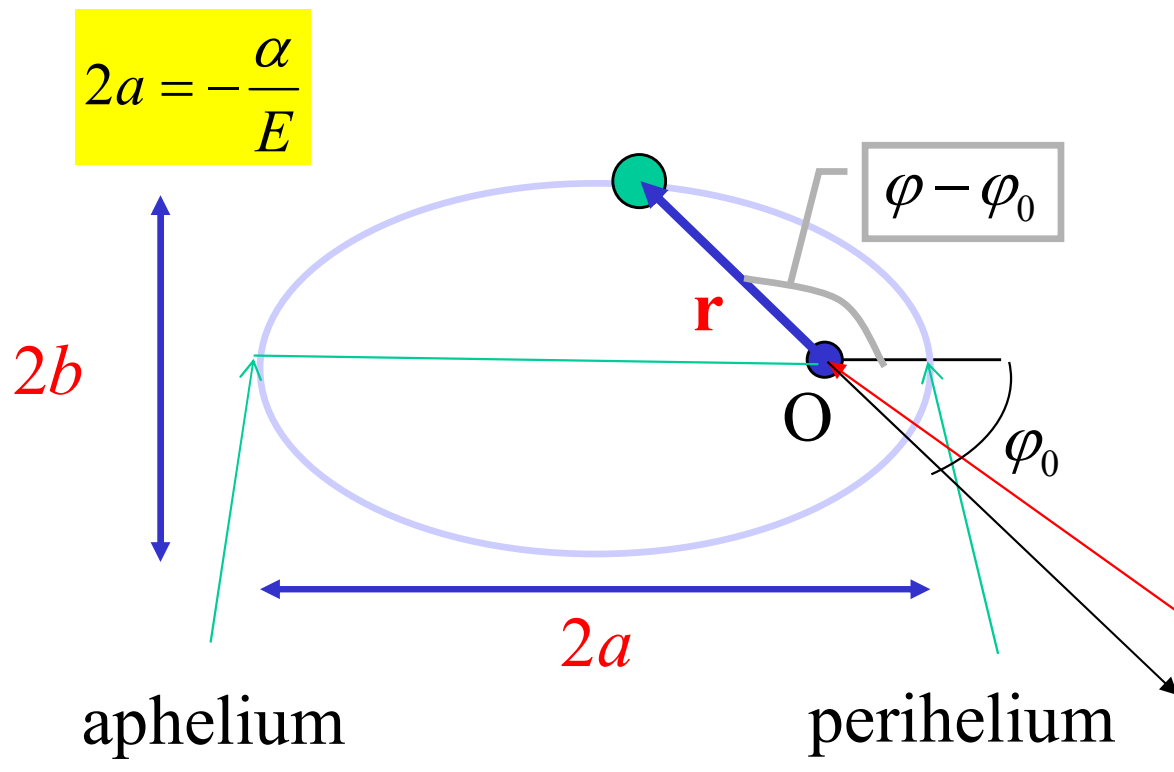
n -liczba całkowita

Długość osi dużej: $2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{P}{1 + \varepsilon} + \frac{P}{1 - \varepsilon} = \frac{2P}{(1 - \varepsilon^2)} = -\frac{\alpha}{E}$

Długość dużej osi jest określona przez całkowitą energię E

Długość osi małej:

$$2b = 2a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{-\frac{2L^2}{\mu E}}$$

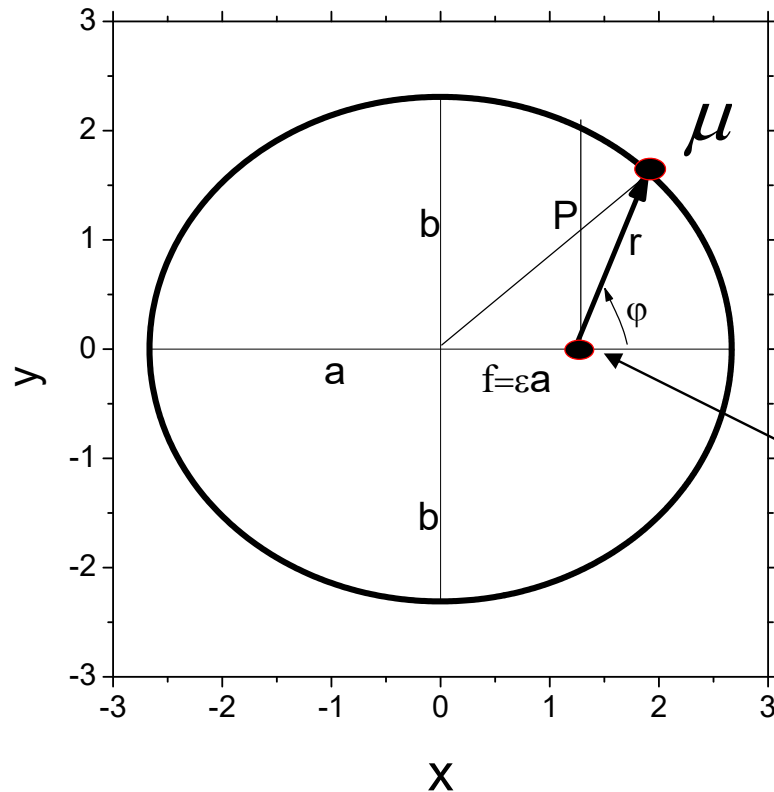


φ_0 określa orientację osi dużej elipsy względem osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych

Ognisko w którym leży centrum siły

Gdy $\varphi_0 = 0$ to duża półoś elipsy pokrywa się z osią Ox i
 $\varphi = 0$ odpowiada perihelium a
 $\varphi = \pi$ aphelium

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$



Wyznaczenie ogniskowej elipsy f
(odległości od ogniska do
przecięcia osi symetrii elipsy)

$$r_{\max} - r_{\min} = (a + f) - (a - f) = 2f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{P}{1 - \varepsilon} - \frac{P}{1 + \varepsilon} \right] = \frac{P\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = a\varepsilon$$

Centrum siły (początek układu
biegunowego) nie leży na przecięciu
osi symetrii elipsy lecz w ognisku

Po przesunięciu początku układu współrzędnych o wektor $\vec{d} = [-f, 0] = [-\varepsilon a, 0]$
o długości równej ogniskowej $f = \varepsilon a$ i umieszczeniu go na przecięciu osi symetrii
elipsy równanie elipsy w układzie kartezjańskim przyjmuje postać $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Związek toru ruchu analizowanych ciał z torem ruchu ciała o masie zredukowanej

Uwzględniając związki wiążące wektory wodzące ciał o masach m_1 i m_2 w układzie środka masy $\vec{r}_1^s$ oraz $\vec{r}_2^s$ odpowiednio z wektorem wodzącym $\vec{r}$ ciała o masie

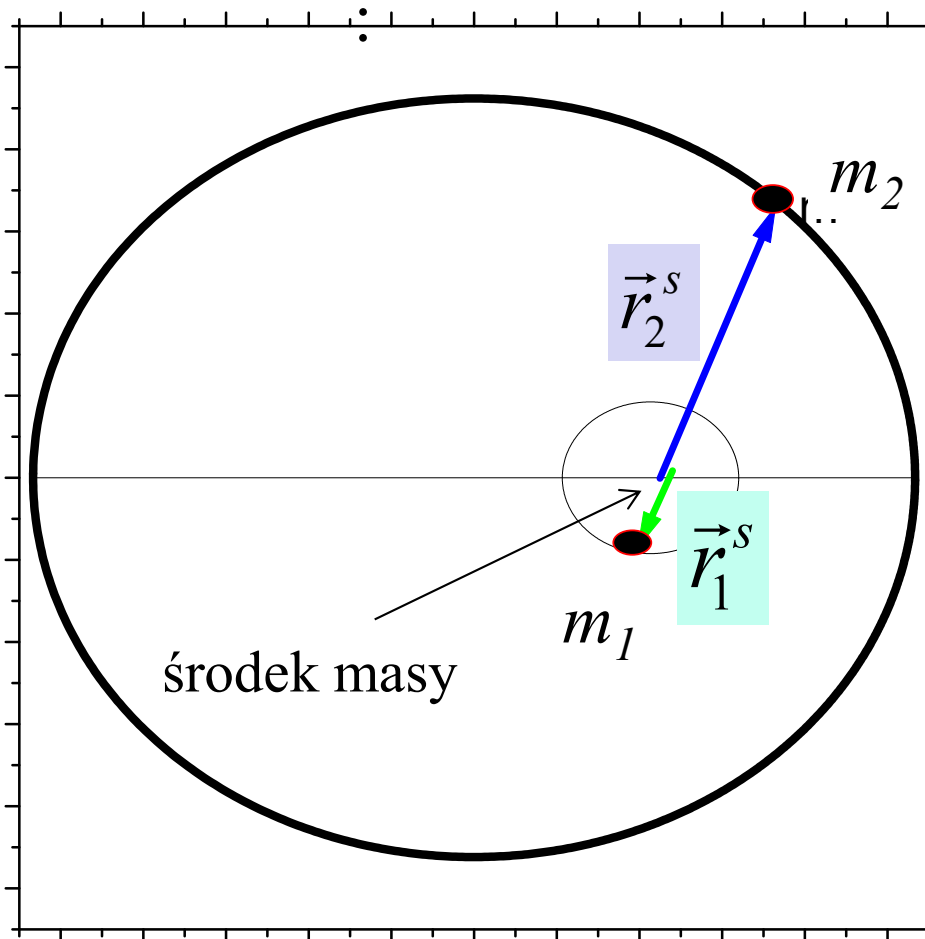
zredukowanej μ :

$$\vec{r}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

widać iż ruch obu ciał zachodzi po elipsach o ogniskach położonych w środku masy

Rysunek
dla

$$m_1 > m_2$$



Długości dużych półosi tych elips a_1 i a_2 można powiązać z długością dużej półosi elipsy będącej torem ruchu ciała o masie zredukowanej

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a$$

Gdy $m_1 \gg m_2$ to $a_1 \approx 0$

$a_2 \approx a$ czyli ciało o masie m_2 porusza się po elipsie w ognisku położonym w miejscu położenia ciała o masie m_1 .

Wyznaczenie zależności $r(t)$ w ruchu po elipsie

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu} \sqrt{-r^2 - \frac{L^2}{2\mu|E|} + \frac{\alpha r}{|E|}}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu} \sqrt{-(r-a)^2 + a^2 \varepsilon^2}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\mu\alpha^2}} \quad \text{-mimośród elipsy}$$

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \quad \text{-długość dużej półosi elipsy}$$

Do określenia położenia ciała na torze można wykorzystać zamiast zmiennej r (lub φ) zmienną u , której związek ze zmienną r dany jest relacją

$$r = a(1 - \varepsilon \cos(u))$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt}$$

Po uwzględnieniu powyższych relacji otrzymujemy równanie

$$a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt} = \pm \frac{1}{a(1 - \varepsilon \cos(u))} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 (-\cos^2(u) + 1)}}$$

$$a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt} = \pm \frac{1}{a(1 - \varepsilon \cos(u))} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu}} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 (-\cos^2(u) + 1)}$$

$$a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt} = \pm \frac{a\varepsilon \sin(u)}{a(1 - \varepsilon \cos(u))} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\mu\alpha^2}} \text{ -mimośród elipsy}$$

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \text{ -długość dużej półosi elipsy}$$

$$dt = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} (1 - \varepsilon \cos(u)) du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int (1 - \varepsilon \cos(u)) du$$

Po scałkowaniu obustronnym

$$t = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} (u - \varepsilon \sin(u)) + const = \pm \sqrt{\frac{\mu\alpha^3}{\alpha}} (u - \varepsilon \sin(u)) + const$$

Równanie
Keplera

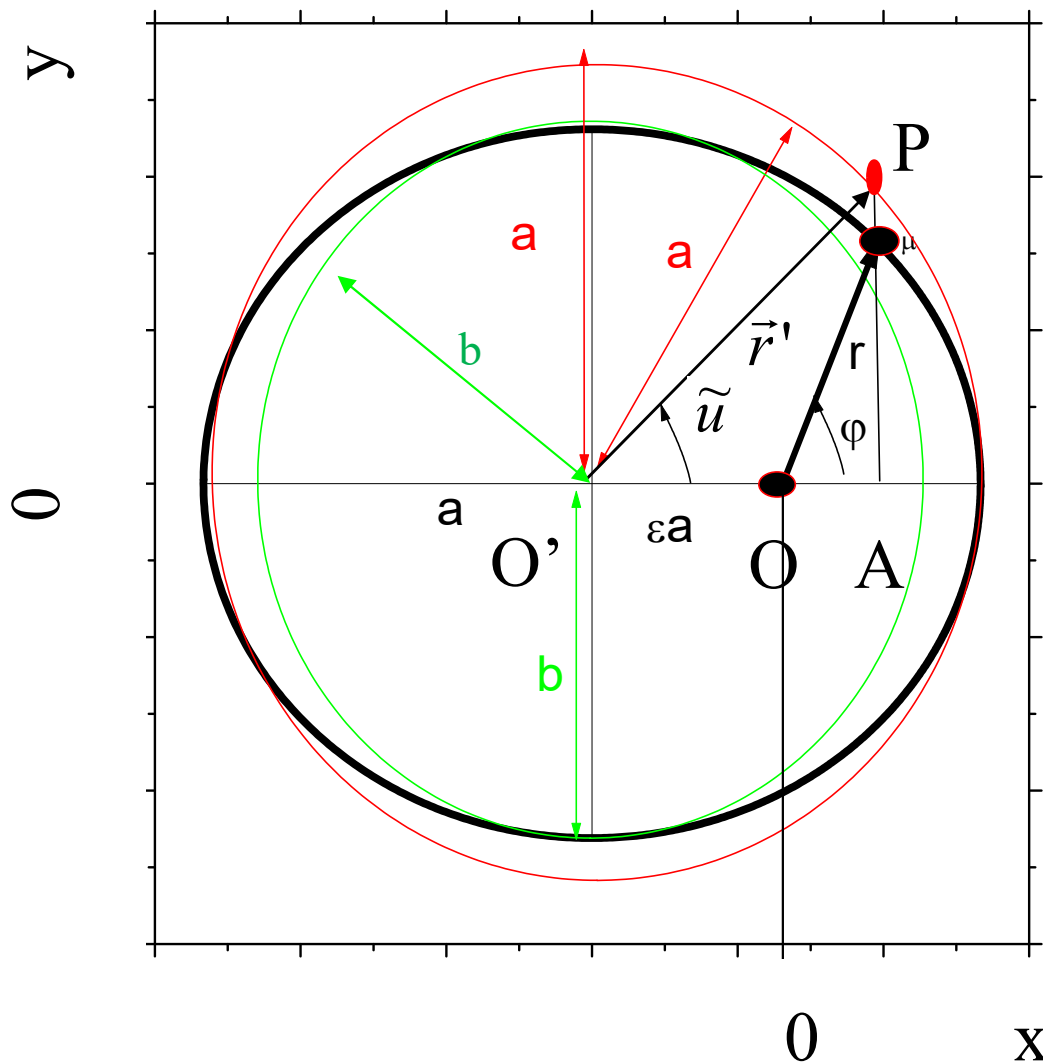
Nie da się relacji powyższej odwrócić tak by wyrazić $u(t)$ przy pomocy funkcji elementarnych. Można pokazać iż obiegowi elipsy odpowiada zmiana u o 2π

Z relacji powyższej wynika iż zmiana ta zachodzi w czasie $T = \sqrt{\frac{\mu\alpha^3}{\alpha}} 2\pi$

Czas ten jest równy okresowi obiegu elipsy

Czym jest u (anomalia mimośrodowa) ?

Współrzędne (x,y) ciała o masie zredukowanej w układzie O można powiązać z u wzorem $x = a \cos u - a\varepsilon, y = b \sin(u)$



Dowód Przyjmujemy $\varphi_0 = 0$

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{P-r}{r\varepsilon} = \frac{\cos(u)-\varepsilon}{1-\varepsilon \cos(u)}$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos(u))$$

$$P = a(1 - \varepsilon^2)$$

$$x = r \cos(\varphi) = \frac{P-r}{\varepsilon} = a \cos u - a\varepsilon$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u = b \sin u$$

Rozważmy punkt P poruszający się po okręgu o promieniu a tak iż jego x -owa współrzędna x_P w każdej chwili czasu jest równa współrzędnej x ciała o masie zredukowanej. Jego współrzędne można powiązać z wielkością $\tilde{u}$ na rysunku

$$x_P = |O'A| - |OO'| = a \cos(\tilde{u}) - \varepsilon a,$$

$$y_P = |AP| = |O'P| \sin(\tilde{u}) = a \sin(\tilde{u})$$

Ponieważ $x_P = x$ to $u = \tilde{u}$ czyli anomalia mimośrodowa u to kąt jaki z dużą osią elipsy tworzy wektor wodzący $\vec{r}'$ punktu P w układzie o początku w punkcie O'

Czasu obiegu elipsy dla ciała o masie zredukowanej

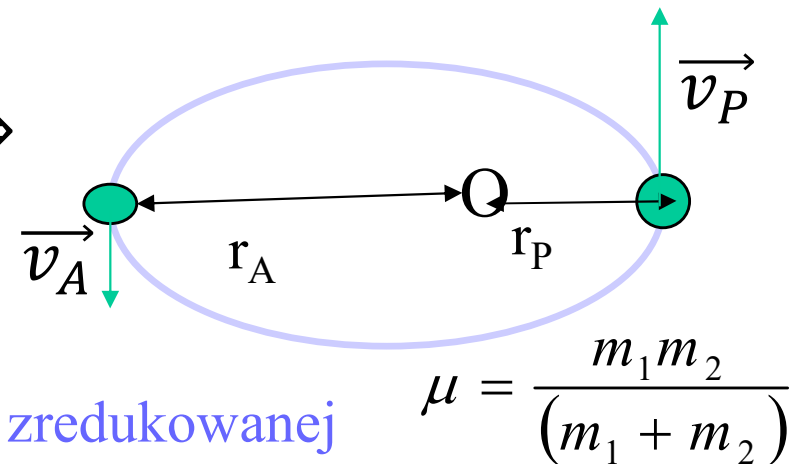
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2}$$

Wzór ten można wyznaczyć także wykorzystując wzory na prędkość polową $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}$ i pole elipsy $A = \pi ab = \pi \sqrt{-\frac{L^2 \alpha^2}{8\mu E^3}}$

$$T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}}$$

Dzięki temu iż prędkość polowa (moment pędu) jest stała to Stałość momentu pędu pozwala także określić stosunek prędkości w peryhelium i aphelium

$$L = \text{const} = \mu r_P v_P = \mu r_A v_A \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2L^2 |E|}{\mu \alpha^2}}$$



Wyznaczony okres obiegu elipsy przez ciało o masie zredukowanej

jest równy okresowi obiegu przez oba ciała elips, po których się one poruszają

W przypadku ruchu pod wpływem siły grawitacyjnej $\alpha = Gm_1 m_2$ czyli

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2} \quad \text{Gdy } m_1 \gg m_2$$

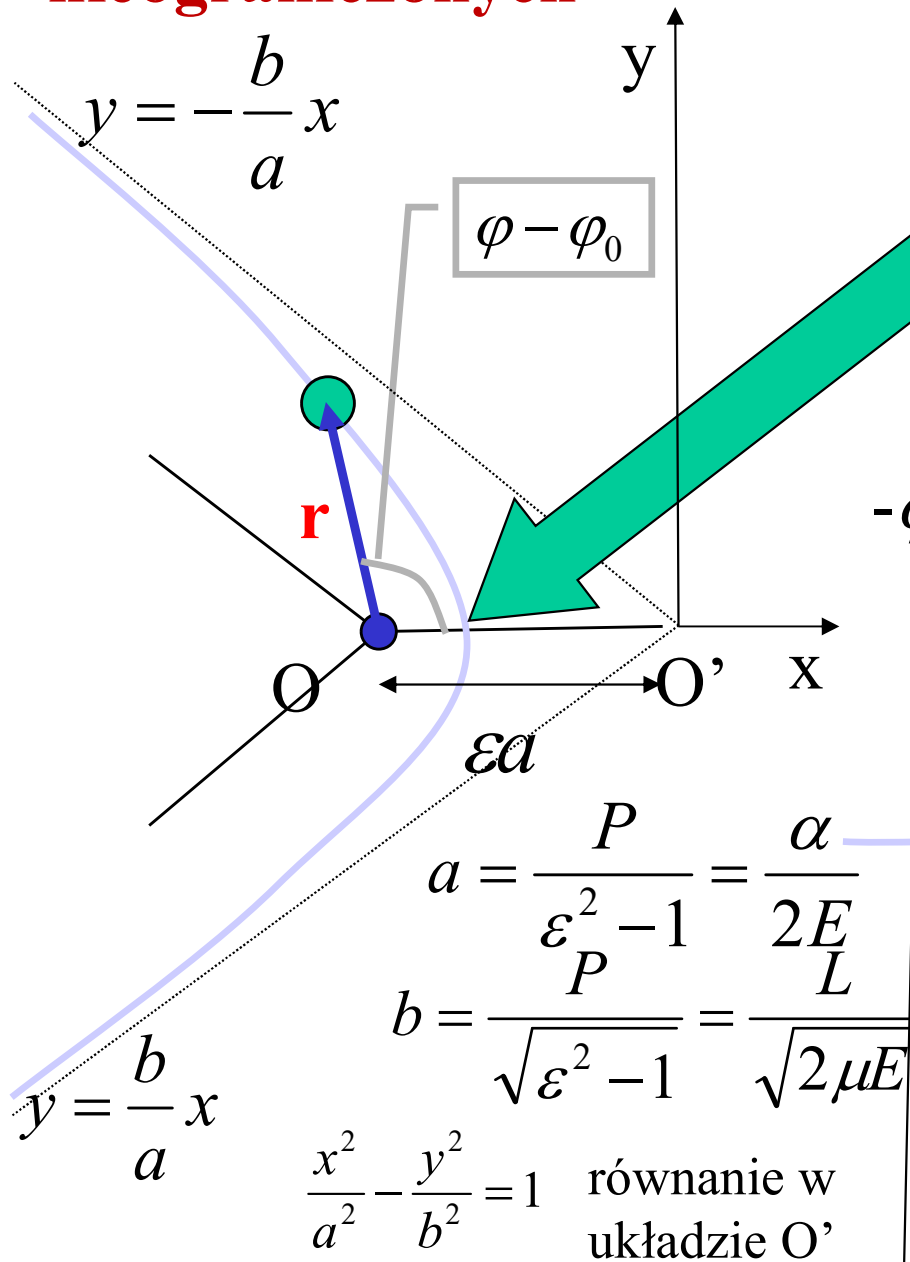
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2} \approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{Gm_1}} a_2^{3/2}$$

Gdy ciałem o masie $m_1 = M$ jest Słońce otrzymujemy **III prawo Keplera** zgodnie z

którym dla wszystkich planet stosunek $\frac{T^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

jest jednakowy

Ruch po torach nieograniczonych



Na rysunku z układem kartezyjskim $\varphi_0 = 0$

• $\varepsilon > 1 \rightarrow$ hiperbola

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}} \Rightarrow \varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$$

$$r_{\min} = \frac{P}{1 + \varepsilon} \text{ dla } \varphi = \varphi_0 \text{ (perihelium)}$$

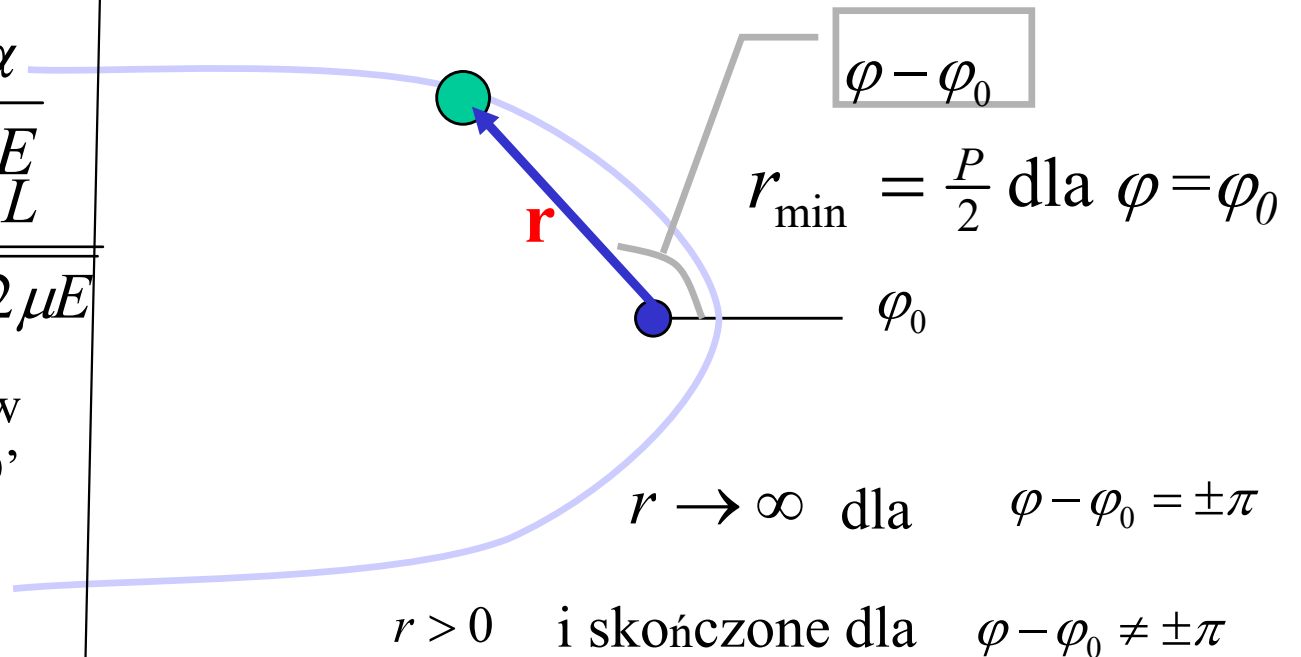
$$r \geq 0 \text{ i skończone} \Rightarrow 1/r > 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi - \varphi_0) > -1/\varepsilon \text{ ogranicza } \varphi$$

$$-\varphi_{gr} < \varphi - \varphi_0 < \varphi_{gr} \quad \varphi_{gr} = \arccos(-1/\varepsilon) \quad \pi/2 < \varphi_{gr} < \pi$$

$$r \rightarrow \infty \text{ dla } \varphi - \varphi_0 = \pm \varphi_{gr}$$

• $\varepsilon = 1 \rightarrow$ parabola $E = 0$



Dyskusja równania toru dla $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ gdy $\alpha < 0$

siła odpychająca

$$r = \frac{P}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

$$L \neq 0$$

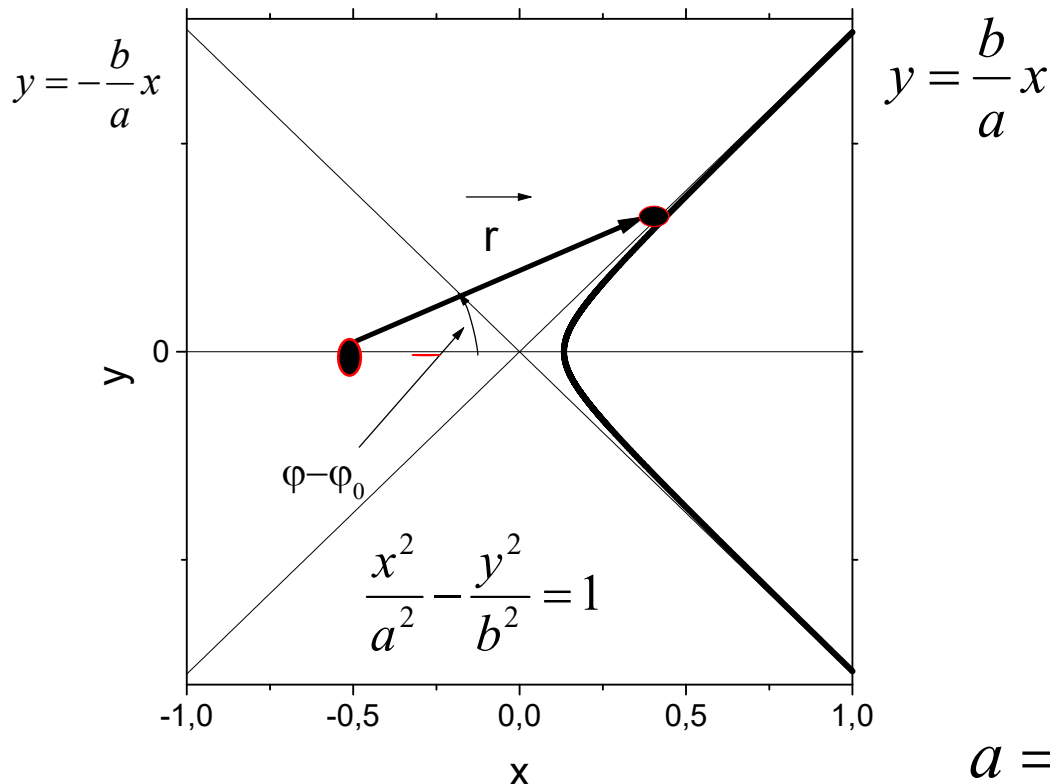
ε mimośród

$$P = \frac{L^2}{\mu|\alpha|}$$

P parametr

Rozwiązanie $r \geq 0$ i skończone istnieje tylko w przypadku gdy $\varepsilon > 1 \Rightarrow E > 0$

Rozwiązaniem jest druga gałąź hiperboli



$$\varphi = \varphi_0 - \text{perihelium} \quad r_{\min} = \frac{P}{-1 + \varepsilon}$$

$$r \geq 0 \text{ i skończone} \Rightarrow 1/r > 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi - \varphi_0) > 1/\varepsilon \text{ ogranicza } \varphi$$

$$-\varphi_{gr} < \varphi - \varphi_0 < \varphi_{gr}$$

$$\varphi_{gr} = \arccos(1/\varepsilon) < \pi/2$$

$$r \rightarrow \infty \text{ gdy } (\varphi - \varphi_0) \rightarrow \pm \varphi_{gr}$$

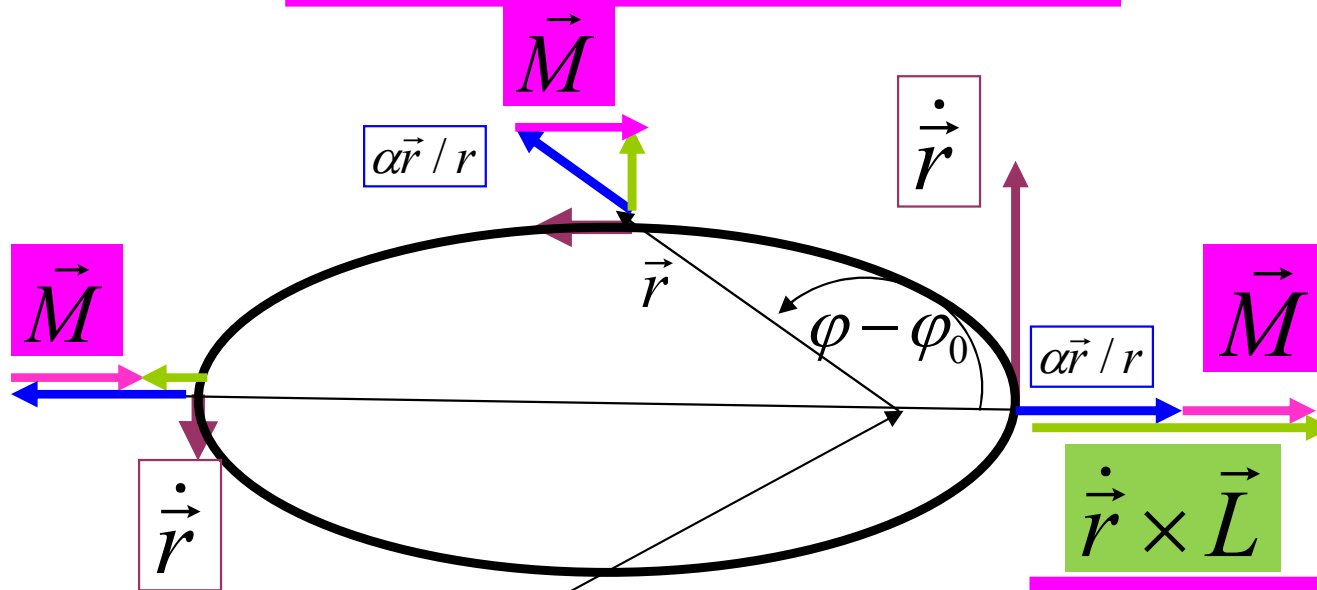
$$a = \frac{P}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{|\alpha|}{2E}$$

$$b = \frac{P}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{L}{\sqrt{2\mu E}}$$

Wektor Rungego-Lentza całką ruchu odbywającego się pod wpływem siły $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ (dowód ćwiczenia)

$$\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} = \text{const}$$

całka ruchu



W przypadku ruchu po elipsie kierunek wektora $\vec{M}$ jest równoległy do dużej półosi elipsy (ogólnie równoległy do prostej przechodzącej przez ognisko i peryhelium)

centrum siły (pocz. ukł. współ.)

Długość wektora

Rungego-Lentza jest równa

$$M = |\vec{M}| = |\alpha| \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = |\alpha|\varepsilon$$

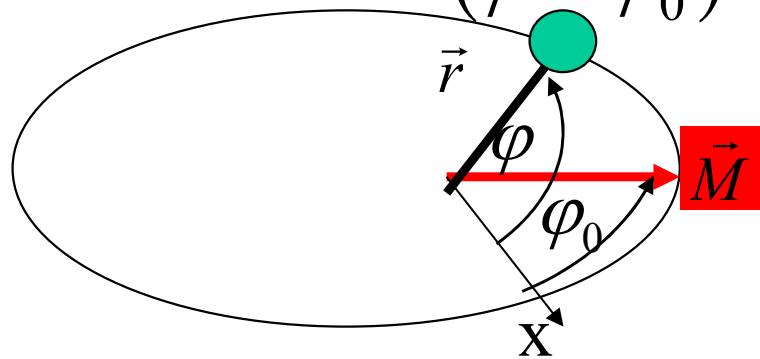
Fakt iż $\vec{M}$ nie zależy od czasu dostarcza 3 całek ruchu, z których tylko jedna jest niezależna od całek ruchu E i $\vec{L}$ (stałość długości i zerowanie się składowej wektora $\vec{M}$ prostopadłej do płaszczyzny ruchu wynika ze stałości E i $\vec{L}$)

Znajomość wektora Rungego-Lentza pozwala na określenie w inny sposób równania toru ciała o masie zredukowanej $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{M} \cdot \vec{r} = \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} \right) \cdot \vec{r} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} = \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) \cdot \vec{L} - \alpha r = \frac{L^2}{\mu} - \alpha r$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{r} = Mr \cos(\varphi - \varphi_0) \quad \rightarrow \quad Mr \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{L^2}{\mu} - \alpha r$$



$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu}}{M \cos(\varphi - \varphi_0) + \alpha}$$

$$M = |\alpha| \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = |\alpha| \varepsilon = \alpha \varepsilon \quad \alpha > 0$$

$$P = \frac{L^2}{\mu|\alpha|} \stackrel{\alpha > 0}{=} \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu\alpha}}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} =$$

równanie orbity eliptycznej dla $0 < \varepsilon < 1$
(równanie toru gdy $\alpha > 0$)

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Ruch po wpływie sił o potencjale

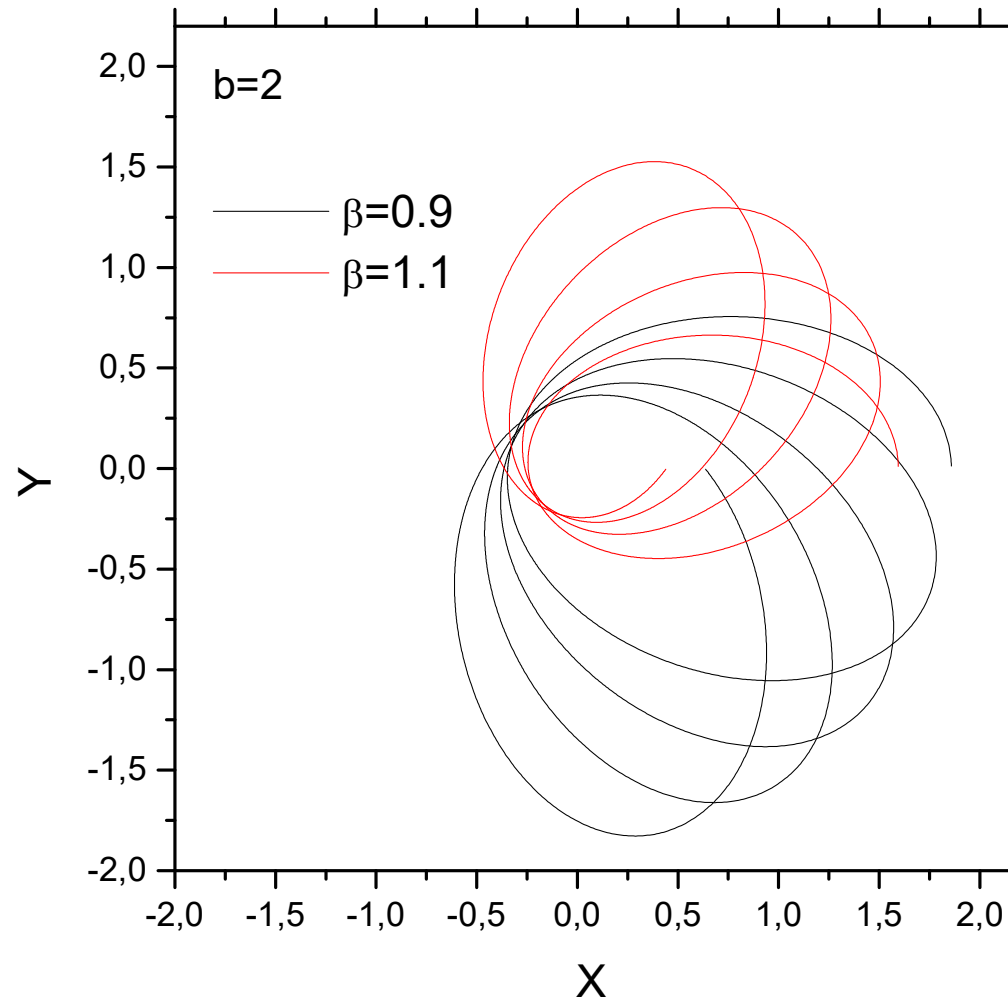
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta} \quad \beta > 1 \quad \text{lub} \quad \beta < 1 \quad |\beta| \approx 1$$

$$\alpha > 0, E < 0$$

$$b = \frac{\alpha}{|E|} \left(\sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \right)^\beta$$

$$X = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \cos(\varphi)$$

$$Y = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \sin(\varphi)$$



Można zauważyć iż dla $\beta \neq 1$ tor ruchu nie jest krzywą zamkniętą

W szczególności gdy $\beta > 1$ mamy $\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(L/r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr > \pi$

zaś gdy $\beta < 1$ mamy $\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(L/r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr < \pi$

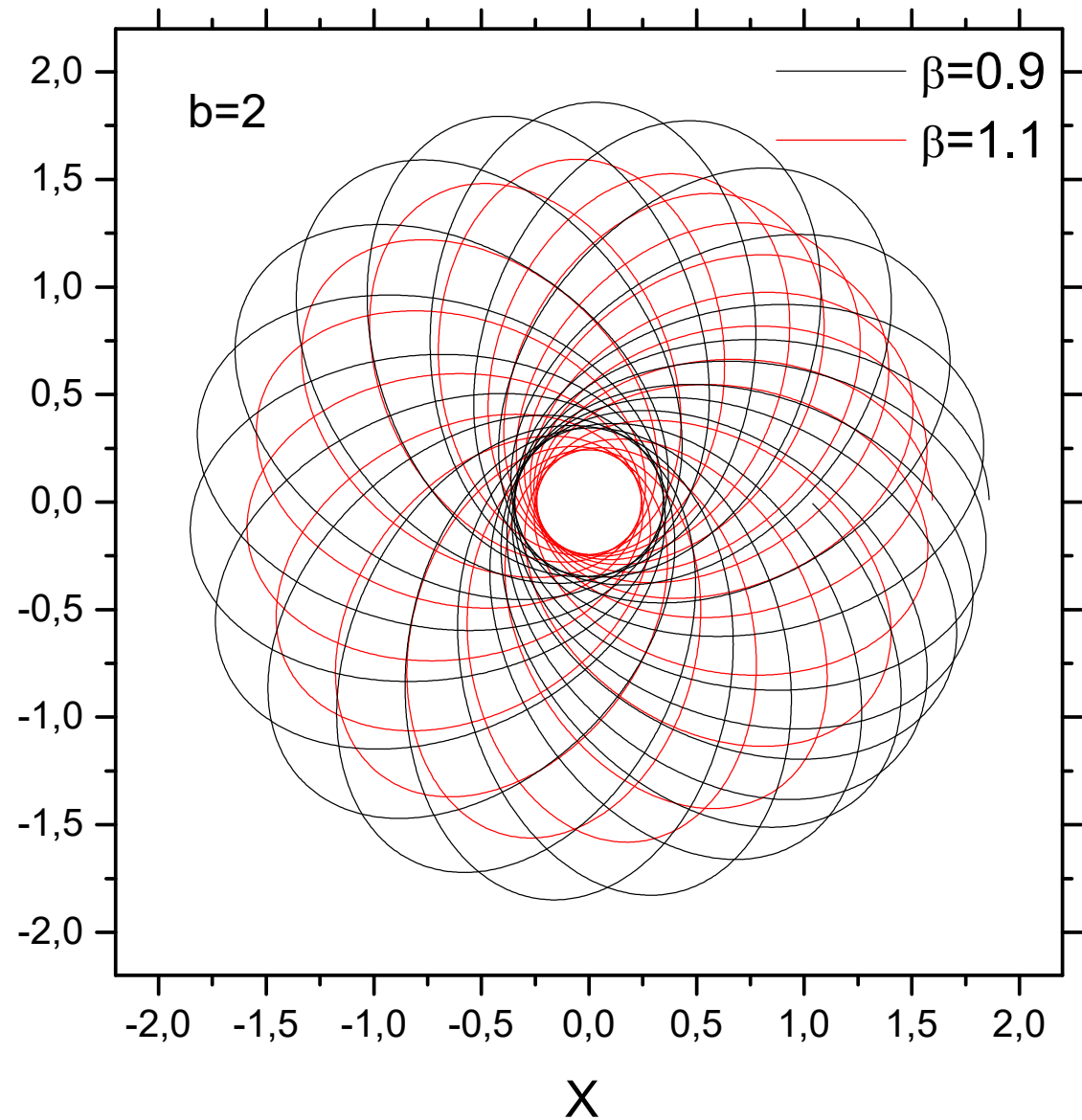
$$\alpha > 0, E < 0$$

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$$

$$b = \frac{\alpha}{|E|} \left(\sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \right)^\beta$$

$$X = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \cos(\varphi)$$

$$Y = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \sin(\varphi)$$



Można zaobserwować występowanie maksymalnej i minimalnej odległości pomiędzy dwoma ciałami

Dodatek . Wskazówki do skonstruowania przykładowego algorytmu do rozwiązywania numerycznego równania różniczkowego

Rozważmy równanie różniczkowe rzędu 1

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Z powyższego równania wynika iż dla $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(t, x) \Rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + f(t, x(t))\Delta t$$

Wzór powyższy może stanowić podstawę do określenia wartości $x(t + \Delta t)$ jeżeli znamy wartość $x(t)$.

Zastosowanie wielokrotne tego wzoru pozwala na określenie wartości funkcji $x(t)$ dla dowolnego t , gdy znamy wartość funkcji $x(t)$ dla wybranego t .

Błąd obliczeń wynikający z faktu iż Δt jest skończony a $f(x, t)$ nie jest funkcją stałą w przedziale $(t, t + \Delta t)$ możemy zmniejszyć wykorzystując wstępnie określoną wartość $x(t + \Delta t)$ do oszacowania średniej wartości funkcji $f(x, t)$ w przedziale $(t, t + \Delta t)$

Metoda predictor-corrector

W metodzie predictor-corrector schemat obliczeń prowadzących do wyznaczenia $x(t+\Delta t)$ jeżeli znamy $x(t)$ jest następujący:

- 1) Określamy pierwsze przybliżenie szukanej funkcji $x(t+\Delta t)$ ze wzoru

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + f(t, x(t))\Delta t$$

- 2) Wykorzystując uzyskany wynik wyznaczamy wartość funkcji $f(t + \Delta t, \tilde{x}(t + \Delta t))$

- 3) Wyznaczamy lepsze oszacowanie $x(t)$ ze wzoru

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= \tilde{x}(t + \Delta t) + \frac{1}{2} \{f(t + \Delta t, \tilde{x}(t + \Delta t)) - f(t, x(t))\} \Delta t = \\ &= x(t) + \frac{1}{2} \{f(t + \Delta t, \tilde{x}(t + \Delta t)) + f(t, x(t))\} \Delta t \end{aligned}$$

Metoda Rungego-Kutty rzędu 4

Schemat postępowania w przypadku stosowania do rozwiązania równania różniczkowego dokładniejszej metody Rungego-Kutty rzędu 4 przedstawiają równania

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

gdzie

$$k_1 = f(t, x) \Delta t$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{1}{2} k_1\right) \Delta t$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{1}{2} k_2\right) \Delta t$$

$$k_4 = f(t + \Delta t, x + k_3) \Delta t$$

Wybór wielkości Δt zależy od rozwiązywanego problemu i przyjętej metody. Przy stosowaniu dowolnej metody trzeba sprawdzać czy zmniejszenie wielkości Δt nie wpływa znacząco na wynik. Można też sprawdzić czy wielkości będące całkami ruchu nie ulegają zmianie w czasie

Zamiana równania różniczkowego 2 rzędu na układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$$

Wprowadzając nową zmienną $u = \dot{x}$ otrzymujemy układ dwóch równań

$$\dot{x} = u \Rightarrow \dot{x} = F_1(u) \quad \text{gdzie} \quad F_1(u) = u$$

$$\dot{u} = f(u, x, t) \Rightarrow \dot{u} = F_2(u, x, t) \quad \text{gdzie} \quad F_2(u, x, t) = f(u, x, t)$$

Na przykład równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\mu \left(\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \right) = f(r) \Rightarrow \ddot{r} = \frac{f(r)}{\mu} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$$

możemy po wprowadzeniu nowej zmiennej $u = \dot{r}$ zastąpić przez poniższy układ równań różniczkowych 1 rzędu

$$\dot{r} = u$$

$$\dot{u} = \frac{f(r)}{\mu} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$$

Wskazówki do skonstruowania przykładowego algorytmu do rozwiązania układu równań:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F_1(x(t), u(t), t)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = F_2(x(t), u(t), t)$$

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x(t) + F_1(x(t), u(t), t)\Delta t$$

$$\tilde{u}(t + \Delta t) = u(t) + F_2(x(t), u(t), t)\Delta t$$

$$x(t + \Delta t) = \tilde{x}(t + \Delta t) + \frac{1}{2} \{F_1(\tilde{x}(t + \Delta t), \tilde{u}(t + \Delta t), t + \Delta t) - F_1(x(t), u(t), t)\} \Delta t$$

$$u(t + \Delta t) = \tilde{u}(t + \Delta t) + \frac{1}{2} \{F_2(\tilde{x}(t + \Delta t), \tilde{u}(t + \Delta t), t + \Delta t) - F_2(x(t), u(t), t)\} \Delta t$$

Układ złożony z większej ilości równań można rozwiązać w sposób analogiczny

Ruch ciała o masie zredukowanej μ odbywający się pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ możemy znaleźć więc w sposób numeryczny rozwiązując układ 3 równań różniczkowych 1 rzędu

$$\dot{r} = u \qquad \dot{u} = \frac{f(r)}{\mu} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \qquad \dot{\varphi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

Wartość u dla chwili początkowej ruchu (z dokładnością do znaku) można uzależnić od stałych w czasie wartości momentu pędu L i energii E oraz wartości r w chwili początkowej ruchu wykorzystując równanie

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow E = \frac{\mu u^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

gdzie potencjał $V(r) = - \int f(r) dr$

Gdy $f(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$ to $\dot{u} = \frac{f(r)}{\mu} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \Rightarrow \dot{u} = \frac{-\alpha}{\mu r^\beta} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$

Równania ruchu

$$\dot{u} = \frac{-\alpha}{\mu r^\beta} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$$

$$\dot{r} = u$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

Można przy rozwiązywaniu tych równań przejść do zmiennych bezwymiarowych

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \tilde{t} = t \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^{\beta+1}} \right)^{1/2}, \quad \tilde{L} = \frac{L}{(\alpha \mu r_0^{3-\beta})^{1/2}}, \quad \tilde{L}_z = \frac{L_z}{(\alpha \mu r_0^{3-\beta})^{1/2}}, \quad \tilde{u} = \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^{\beta-1}} \right)^{-1/2} u$$

gdzie r_0 -dowolnie wybrana jednostka odległości

przy czym $\dot{u} = \frac{du}{dt} = \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^{\beta-1}} \right)^{1/2} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^{\beta-1}} \right)^{1/2} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^\beta} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = r_0 \frac{d\tilde{r}}{dt} = r_0 \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^{\beta-1}} \right)^{1/2} \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \left(\frac{\alpha}{\mu r_0^{\beta+1}} \right)^{1/2} \frac{d\varphi}{d\tilde{t}}$$

Wówczas równania przyjmują postać $\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = \frac{-1}{\tilde{r}^\beta} + \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^3}, \quad \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \tilde{u}, \quad \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{L}_z}{\tilde{r}^2}$

Wprowadzenie tych zmiennych sprowadza się do przyjęcia w wyjściowych równaniach $\alpha=1, \mu=1$