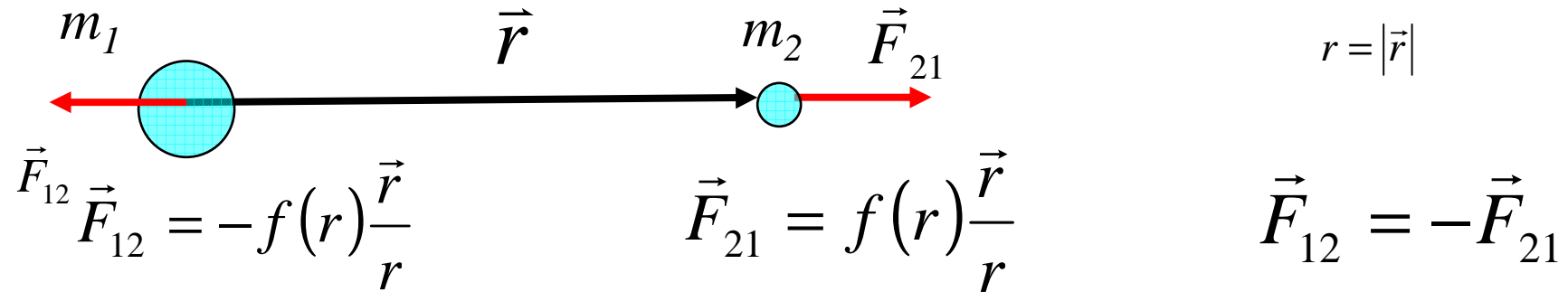


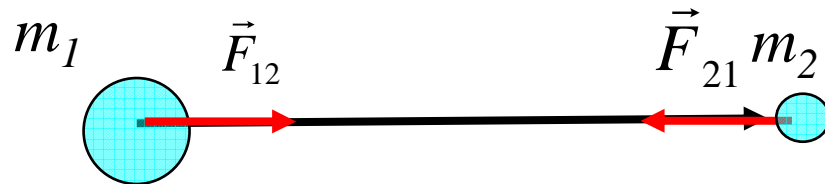
Zagadnienie dwóch ciał oddziałujących siłą centralną
Opis ruchu ciał oddziałujących siłą o wartości
odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu ich odległości

Siła centralna



Dla oddziaływania grawitacyjnego
(siła przyciągająca)

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} < 0 \qquad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$



Dla oddziaływania elektrostatycznego w próżni

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \qquad \epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$$

(siła odpychająca dla ładunków q_1 i q_2 o jednakowym znaku)

Dla oddziaływania grawitacyjnego lub elektrostatycznego $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = |f(r)| \propto \frac{1}{r^2}$

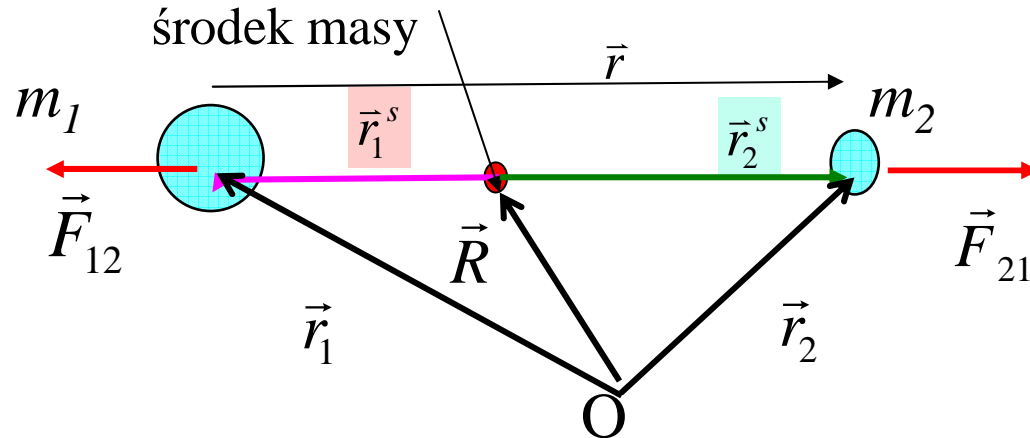
$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \quad \alpha \text{ -stała} \quad \alpha = Gm_1m_2 \quad \text{dla oddziaływania grawitacyjnego}$$

Równania ruchu i układ środka masy w zagadnieniu dwóch ciał

$$\vec{F}_{12} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{F}_{21} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Położenie środka masy układu określa wektor

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1^s + \vec{R}, \vec{r}_2 = \vec{r}_2^s + \vec{R}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s$$

Z II zasady dynamiki Newtona zapisanej w układzie inercyjnym O wynikają równania

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

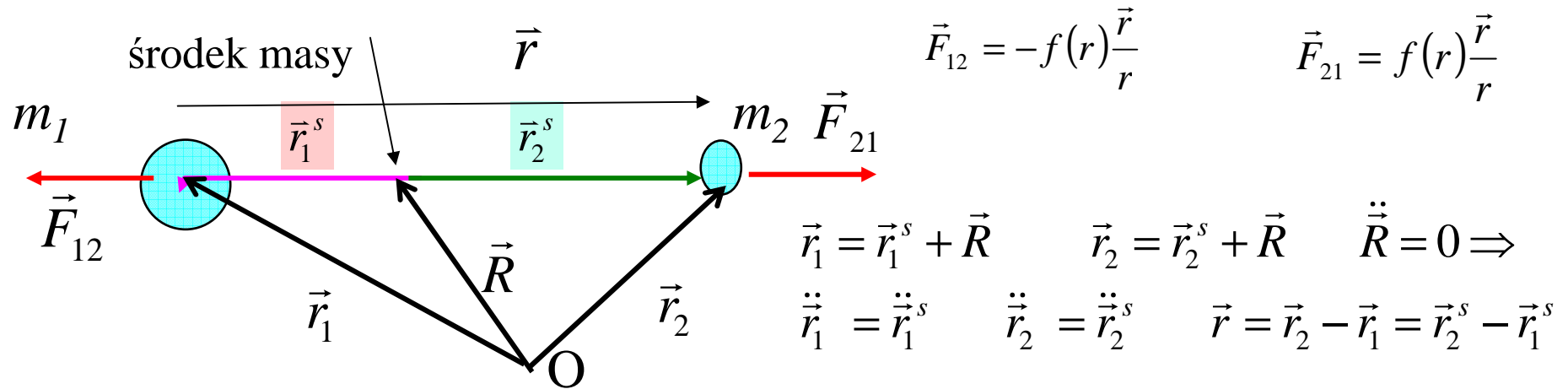
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Przyspieszenie środka masy jest równe zero czyli środek masy można przyjąć za początek układu inercyjnego. Wynika to z faktu iż siła wypadkowa działająca na układ ciał jest równa zero

Równanie ruchu względnego w zagadnieniu dwóch ciał



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{1}{m_1} f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2} f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Odejmując równania otrzymane stronami

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2^s - \ddot{\vec{r}}_1^s = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \rightarrow \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{\mu} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

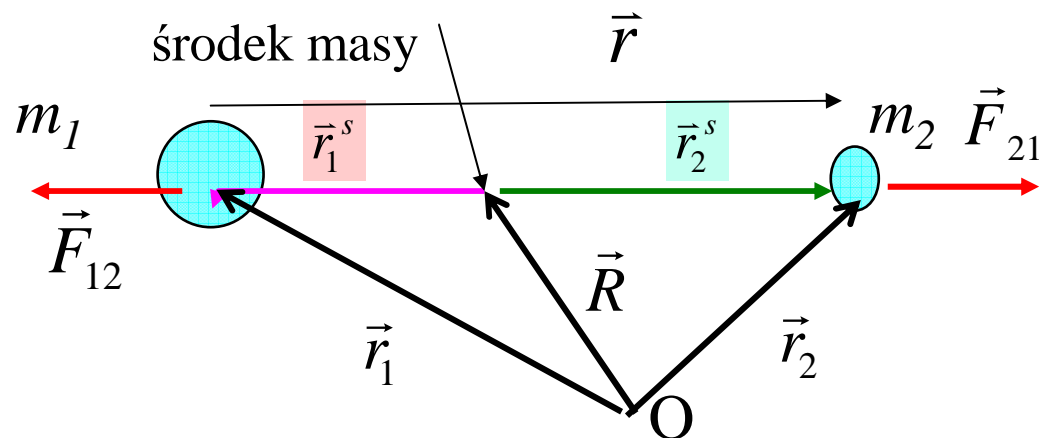
Równanie ruchu
względnego

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

-masa zredukowana

Ruch w polu siły centralnej a zagadnienie dwóch ciał



Równanie ruchu
względnego

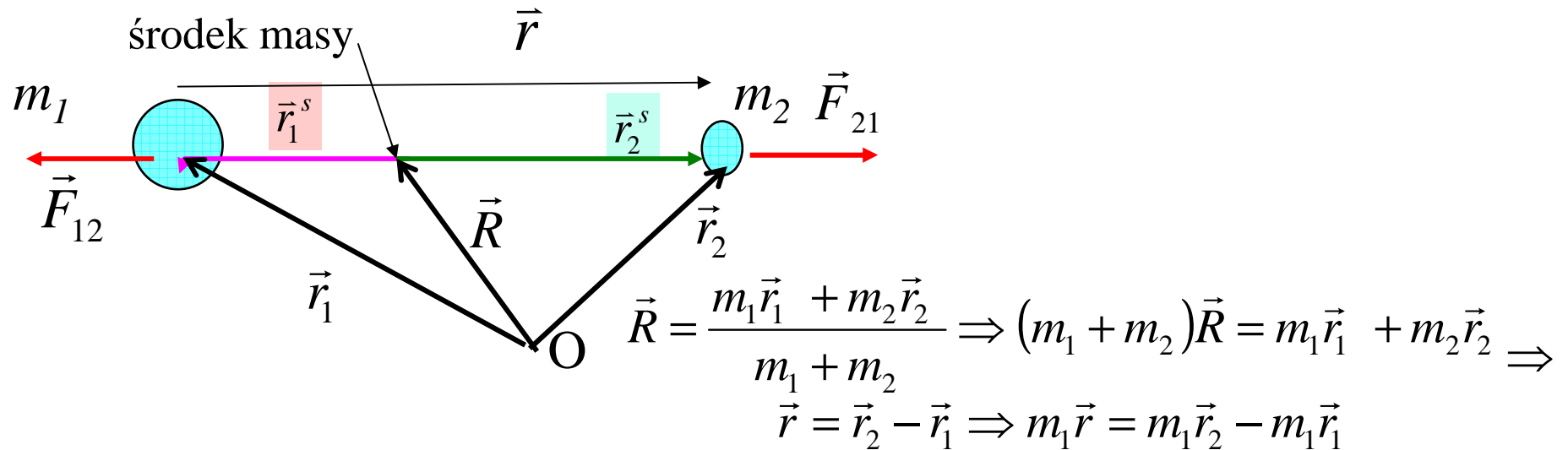
$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

-masa zredukowana

- 1) Równanie powyższe opisuje ruch ciała 2 w układzie o początku w miejscu położenia ciała 1. Układ ten nie jest układem inercyjnym, gdyż przyspieszenie ciała 1 jest w ogólności różne od zera.
- 2) Równanie to ma taką postać jak równanie opisujące ruch hipotetycznego ciała o masie zredukowanej μ w układzie inercyjnym pod wpływem siły centralnej skierowanej stale w kierunku początku układu współrzędnych (centrum siły) (gdy $f(r) < 0$) lub kierunku przeciwnym (gdy $f(r) > 0$)
- 3) Znajomość ruchu ciała o masie zredukowanej pozwala na określenie zależności od czasu wektorów \vec{r}_1^s oraz \vec{r}_2^s określających położenie obu ciał w układzie o początku w środku masy

Ruch w polu siły centralnej a zagadnienie dwóch ciał



Dodając równania otrzymane stronami

$$(m_1 + m_2) \vec{R} + m_1 \vec{r} = (m_1 + m_2) \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r} = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

W układzie o początku w środku masy

$$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{r}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Gdy $m_1 \gg m_2$ to $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2$ oraz $\vec{r}_2^s \approx \vec{r}$ $\vec{r}_1^s \approx \vec{0}$

$m_2 \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ Równanie opisuje ruch ciała 2 pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku nieruchomego centrum siły położonego w miejscu położenia ciała 1 lub w kierunku przeciwnym

Moment pędu w zagadnieniu dwóch ciał

Moment pędu w układzie o początku w środku masy

$$\vec{L}^s = \vec{r}_1^s \times m_1 \dot{\vec{r}}_1^s + \vec{r}_2^s \times m_2 \dot{\vec{r}}_2^s = \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times m_1 \dot{\vec{r}}_1^s + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \times m_2 \dot{\vec{r}}_2^s =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}}_2^s - \dot{\vec{r}}_1^s) = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{L}^s = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$$

$\dot{\vec{r}}$ - prędkość hipotetycznego ciała o masie zredukowanej (prędkość w ruchu względnym)

Moment ten jest stałą ruchu

$$\dot{\vec{L}}^s = 0$$

(analogiczny dowód na ćwiczeniach)

$$\vec{L}^s = const$$

gdyż

Wniosek ten byłby słuszny również wtedy gdyby $f(r) \rightarrow f(\vec{r}) = f(x, y, z)$

Niezależność od czasu momentu pędu wiąże się z tym iż siły wewnętrzne działające w układzie są siłami centralnymi oraz brak jest sił zewnętrznych wywieranych na ciała w układzie przez ciała spoza układu

Te same przyczyny tłumaczą to iż moment pędu w układzie inercyjnym w którym środek masy leży w punkcie określonym przez wektor \vec{R} jest też całką ruchu. Moment ten dany jest wzorem

$$\vec{L} = \vec{L}^s + \vec{R} \times \vec{p}_u = \vec{L}^s + \vec{R} \times (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{L}^s + \vec{R} \times (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}$$

Moment pędu w zagadnieniu dwóch ciał

$$\vec{L}^s = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \text{Wektory } \vec{r}, \dot{\vec{r}} \text{ leżą w stałej płaszczyźnie prostopadłej do } \vec{L}^s$$

$$\vec{r}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \quad \vec{r}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \quad \longrightarrow$$

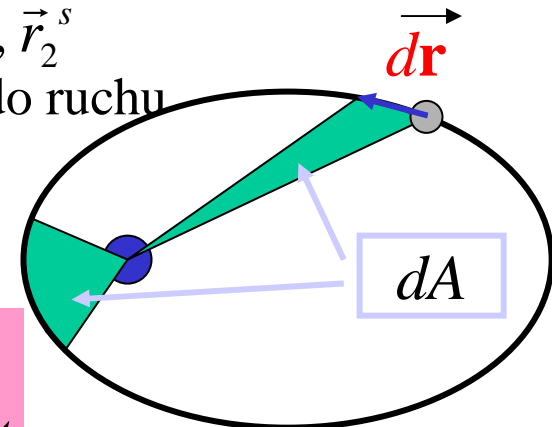
Ruch względny obu ciał jest ruchem płaskim odbywającym się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wektora wypadkowego momentu pędu układu złożonego z tych ciał określonego w układzie środka masy.

W układzie biegunowym o początku w środku masy z osią Oz prostopadłą do płaszczyzny w której odbywa się ruch względny obu ciał (jak też ruch hipotetycznego ciała o masie zredukowanej μ) moment pędu układu ciał wyraża się wzorem

$$\vec{L}^s = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \mu r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z = L_z^s \vec{e}_z \Rightarrow L_z^s = \mu r^2 \dot{\phi}$$

Ze stałości momentu pędu wynika stałość prędkości polowej określającej szybkość z jaką wektor \vec{r} jak i wektory \vec{r}_1^s, \vec{r}_2^s zakreślają pole w trakcie ruchu. Prawo to w odniesieniu do ruchu planet nosi nazwę II Prawa Keplera

II prawo Keplera



Prędkość polowa \longrightarrow

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt} = \frac{\frac{1}{2} r r d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{L_z^s}{2\mu} = \text{const}$$

Energia w zagadnieniu dwóch ciał

Energia kinetyczna w układzie środka masy

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{r}}_1^s)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{r}}_2^s)^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (m_2 + m_1) \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
 $\vec{r} = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s$

Energia potencjalna (potencjał V)

W układzie biegunowym w płaszczyźnie ruchu $\vec{r} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = f(r) \vec{e}_r \Rightarrow F_r = f(r), F_\varphi = 0$$

$$\vec{F} = -\text{grad} \vec{V} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \Rightarrow F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, F_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

A zatem

Potencjał zależy tylko od współrzędnej radialnej $V=V(r)$ i jego wartość można określić z dokładnością do stałej z równania

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int f(r) dr$$

Można pokazać iż $\vec{F}_1 = -\text{grad}_1 V = \text{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}_{12}$ $\vec{r} = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s$

$$\vec{F}_2 = -\text{grad}_2 V = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}_{21}$$

Wprowadzenie potencjału nie było by możliwe gdyby $f(r) \rightarrow f(\vec{r}) = f(r, \varphi)$

Energia całkowita w układzie środka masy

$$E = T + V = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

V-potencjał

Energia ta jest stałą ruchu bo $\frac{dE}{dt} = 0$

Wynika to z faktu iż wszystkie siły działające w układzie są potencjalne, a potencjał nie zależy jawnie od czasu

Energie tą można zapisać w postaci

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}(r) \quad \text{gdzie} \quad V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

analogicznej do przypadku energii ciała o masie μ poruszającej w przestrzeni jednowymiarowej w efektywnym potencjale V_{ef} gdyż

W układzie biegunowym w płaszczyźnie ruchu względne składowe prędkości ciała o masie μ

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \dot{r}$$

$$v_\phi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\phi = r\dot{\phi}$$

W tym układzie moment pędu

$$L_z^s \stackrel{\text{ozn.}}{=} L_z = \mu r^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2} (v_r^2 + v_\phi^2) + V(r) \stackrel{\leftarrow}{=} \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) \stackrel{\leftarrow}{=} \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

Jakościowa analiza ruchu względnego w oparciu o całki energii E i momentu pędu L w ruchu względnym

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r)$$

gdzie potencjał efektywny

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$L = |\vec{L}| = |L_z|$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = E - V_{ef}(r) \geq 0$$

Warunek na dozwolone wartości r o postaci zależnej od postaci potencjału efektywnego

$$\dot{r} = 0 \leftrightarrow E - V_{ef}(r) = 0$$

Równanie określa granice obszarów, w których może odbywać się ruch

W punktach w których $\dot{r} = 0$ ciało o masie zredukowanej μ jak też ciała o masach m_1 i m_2 w ogólności nie spoczywają gdyż w przypadku gdy $L \neq 0$ to składowa transwersalna prędkości

$$v_\phi = r\dot{\phi} = r \frac{L_z}{\mu r^2}$$

w tych punktach w ogólności nie zeruje się

Przykład: Analiza potencjału efektywnego dla siły przyciągającej

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0) \quad \text{gdy } L \neq 0$$

(siła grawitacyjna lub elektrostatyczna między ładunkami o przeciwnych znakach)

Wyznaczenie potencjału:

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \quad \longrightarrow \quad V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Wyznaczenie potencjału efektywnego:

$$V_{ef}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Cechy analizowanego potencjału efektywnego

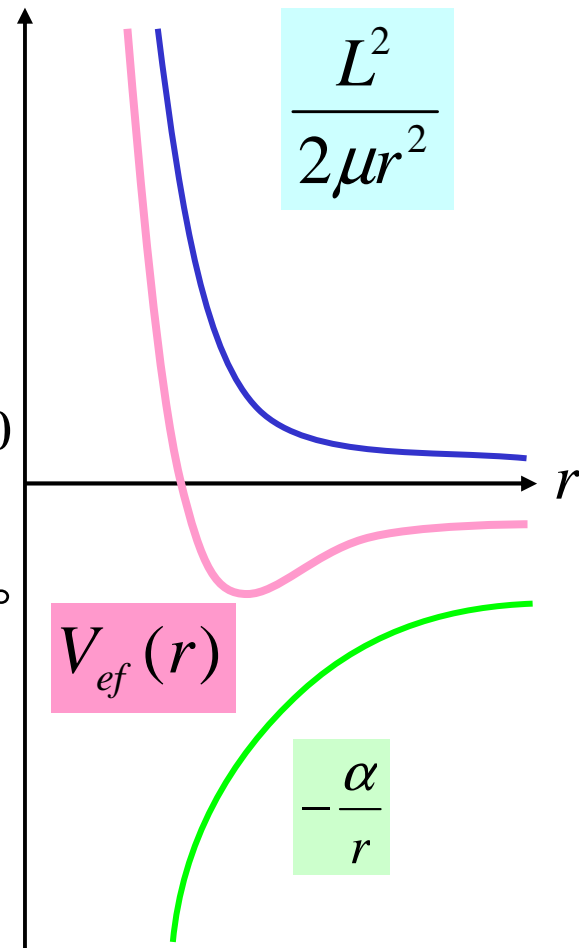
człon $-\frac{\alpha}{r}$ dominuje dla dużych r $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r) = 0$

człon $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ dominuje dla małych r $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \infty$

pośrodku jama potencjału

Podobny charakter ma potencjał efektywny dla siły przyciągającej $f(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta} \quad (\alpha > 0)$

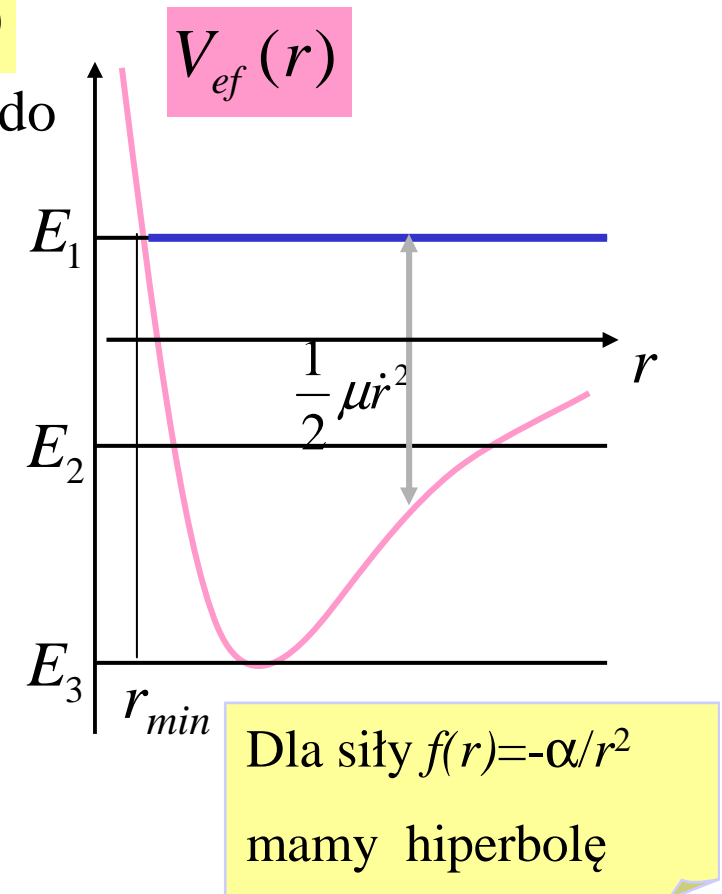
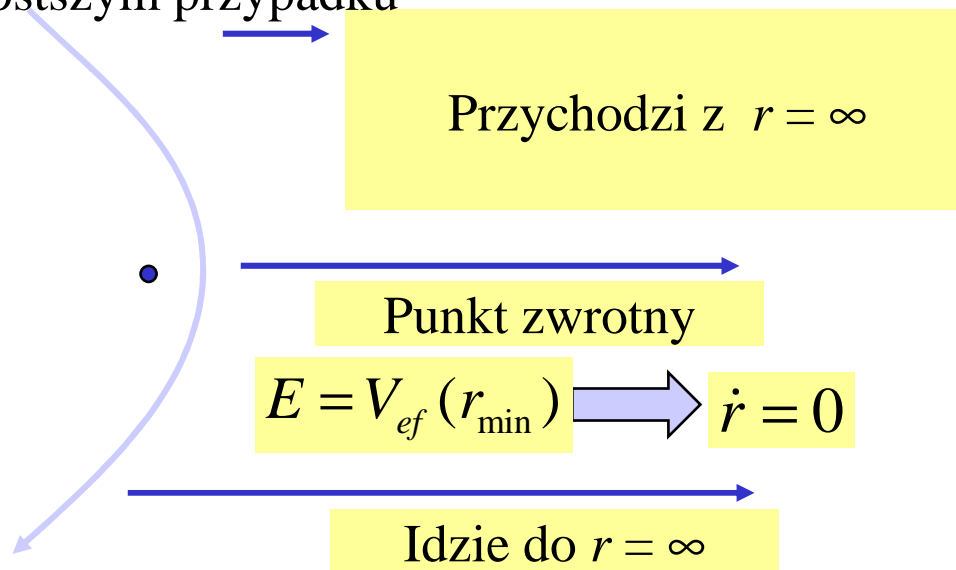
gdy $1 < \beta < 3$ gdy (potencjał $V(r) = -\frac{1}{(\beta-1)} \frac{\alpha}{r^{\beta-1}}$)



Zależność charakteru ruchu względnego od energii w układzie środka masy E dla siły przyciągającej z „jamą potencjału”

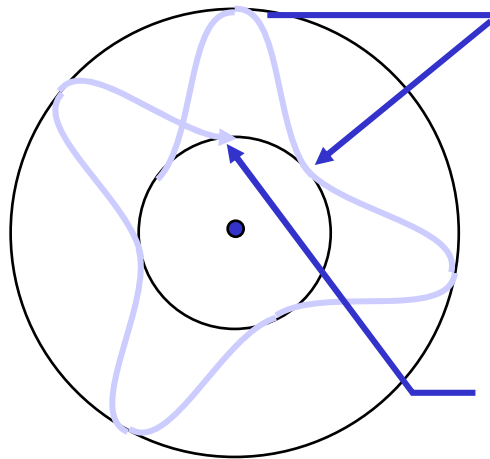
1) Gdy $E = E_1 > \lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r)$ to ruch ciała o masie zredukowanej nieograniczony $r \geq r_{min}$ gdzie $E_1 = V_{ef}(r_{min})$

Ciało o masie zredukowanej μ może oddalić się do nieskończoności (odległość między ciałami o masach m_1 i m_2 może stać się nieskończona)
W najprostszym przypadku



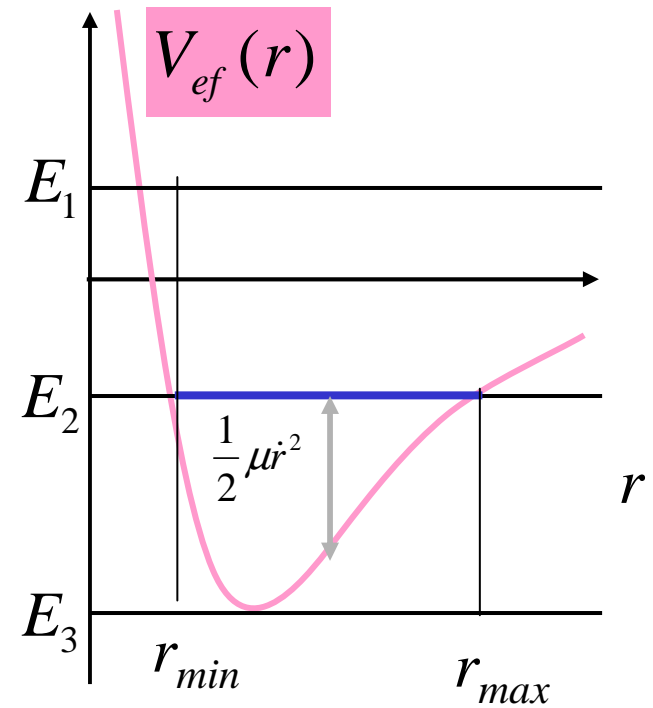
Dla przypadku niektórych sił w pewnych warunkach ciało o masie μ przed oddaleniem się do ∞ może kilka razy okrążyć centrum siły np. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$ gdy $\frac{15L^2}{16\mu} < \alpha < \frac{L^2}{\mu}$
(dla siły tej nie ma jamy potencjału ale również gdy $\alpha < \frac{L^2}{\mu}$ to $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \infty$)

2) Gdy $E = E_2 = V_{ef}(r_{min}) = V_{ef}(r_{max}) < \lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r)$
 ruch ciała o masie zredukowanej μ
 zachodzi pomiędzy dwoma okręgami
 o promieniach r_{min} i r_{max}



Ruch pomiędzy
 okręgami o dwóch
 promieniach

Orbita może być otwarta



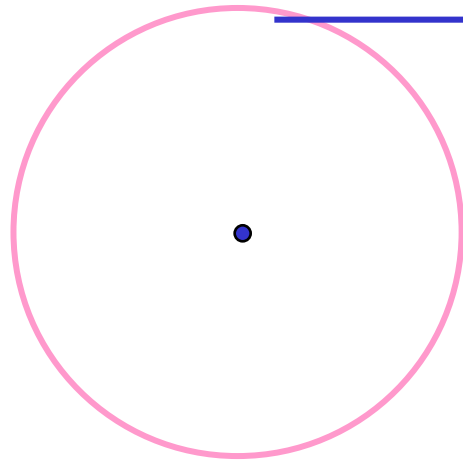
$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(L_z / r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr$$

Orbita jest zamknięta gdy $2\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m}$ n, m -liczby całkowite czyli dla konkretnych E i L
 Siła $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ odpowiada **zawsze** (niezależnie od konkretnych wartości E i L) orbita zamknięta i w tym przypadku mamy zawsze $\Delta\varphi = \pi$ (torem elipsa o ognisku w centrum siły)

Dygresja . Dla sił centralnych ruch okresowy występuje także dla dowolnych warunków początkowych ruchu tylko w powyższym przypadku oraz wówczas gdy $f(r) = -kr$ ($V(r) = kr^2/2$) gdy mamy $\Delta\varphi = \pi/2$ (torem jest elipsa z centrum siły na przecięciu osi symetrii elipsy). W tym przypadku $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r) = \infty$

3) Gdy $E = E_3 = V_{ef}(r_0) < V_{ef}(r \neq r_0)$

to ruch ciała o masie zredukowanej μ zachodzi po okręgu o promieniu r_0 (odległość między ciałami o masach m_1 i m_2 pozostaje stała i równa r_0)

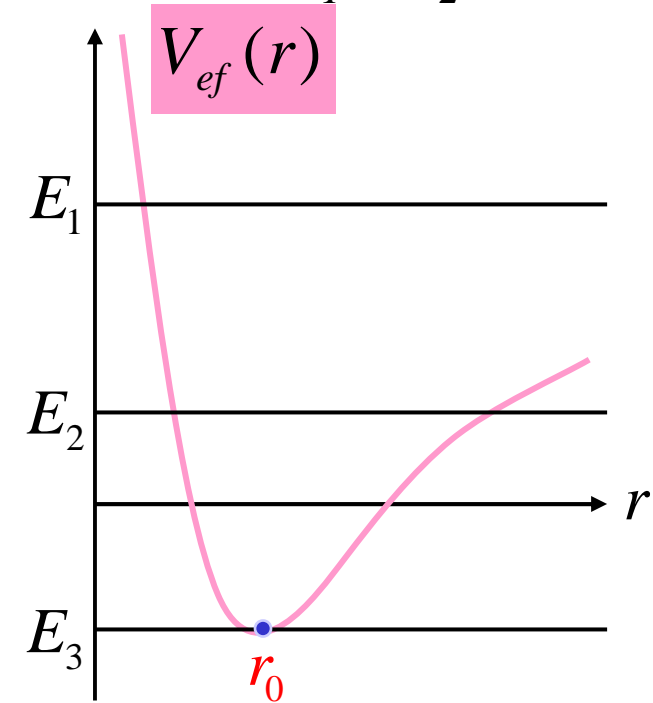


Ruch po okręgu

$$E = V_{ef}(r_0)$$

$$\dot{r} = 0$$

$$r = \text{const} = r_0$$



Zależność charakteru ruchu względnego od energii w układzie środka masy E dla siły przyciągającej typu $f(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$ z $\beta > 3$

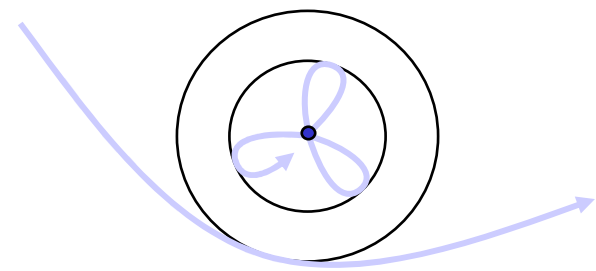
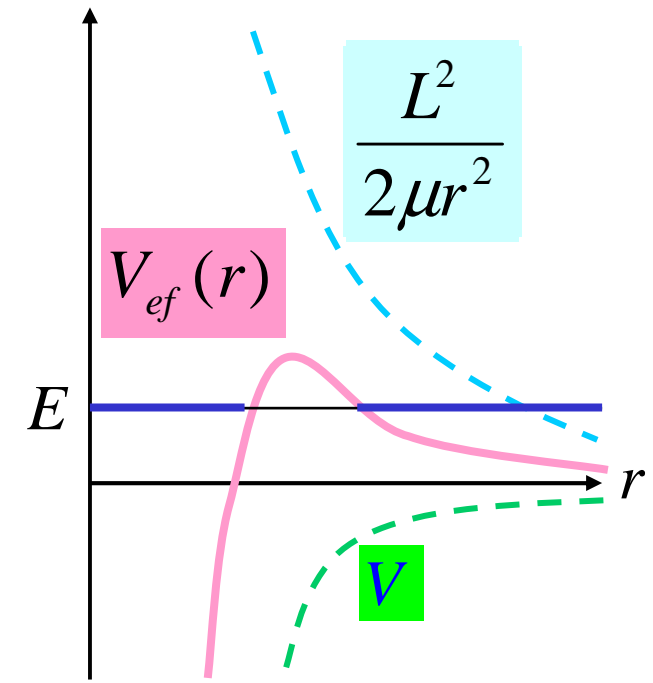
Np. gdy $f(r) = -\frac{\alpha}{r^4}$ \rightarrow $V(r) = -\frac{1}{3} \frac{\alpha}{r^3}$ \rightarrow $V_{ef}(r) = -\frac{\alpha}{3r^3} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

człon $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ dominuje dla dużych r $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r) = 0$

człon $-\frac{\alpha}{3r^3}$ dominuje dla małych r $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = -\infty$

pośrodku garb potencjału

Ciało o masie zredukowanej i energii E pokazanej na rysunku może oddalać się na nieskończoną odległość od centrum siły lub ruch jego jest ograniczony w przestrzeni w zależności od początkowej wartości r



Spadek na centrum siły gdy $L \neq 0$ jest możliwy w potencjale $V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ gdy $n > 2$
 lub $V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ gdy $\alpha > \frac{L^2}{2\mu}$

Wyznaczanie zależności $r(t)$ oraz $\varphi(t)$ przy wykorzystaniu całki energii E oraz momentu pędu L

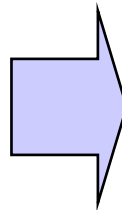
$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}(r) \Rightarrow \dot{r}(r) = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))} \Rightarrow dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}}$$

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$L = |\vec{L}| = |L_z|$$

Zależność czasowa

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}} + const$$



$$t(r) \rightarrow r(t)$$

$$r(t = t_0)$$

$$\varphi(t = t_0)$$

$$L_z = \mu r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{\mu r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{L_z}{\mu r^2} dt \Rightarrow \varphi = \int \frac{L_z}{\mu r^2} dt + const$$

$$\varphi(t)$$

Zwykle wyniki nie dają się wyrazić przy pomocy funkcji elementarnych

Wyznaczanie równania toru $r(\varphi)$ przy wykorzystaniu całki energii E oraz momentu pędu L

$$\Rightarrow dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}}$$

$$d\varphi = \frac{L_z}{\mu r^2} dt$$

$L = |\vec{L}| = |L_z| \quad V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$

Równanie toru

$$d\varphi = \frac{\pm L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}}$$

$$\varphi = \int \frac{\pm \frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}} dr + const$$

$r(\varphi = \varphi_0)$

$$\varphi(r) \rightarrow r(\varphi)$$

Rozwiązanie wyrażające się przez funkcje elementarne dla $f(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ gdy $n=2,3,-1$, przez funkcje eliptyczne dla $n=4,5,7,0,-3,-5$

$$\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\pm \frac{L}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}}$$

Zmiana kąta φ przy zmianie r od r_{\min} do r_{\max}

Znając $r(\varphi)$ można próbować wyznaczyć zależność $t(\varphi)$

$$d\varphi = \frac{L_z}{\mu r^2} dt \Rightarrow dt = \frac{\mu r^2}{L_z} d\varphi \Rightarrow t = \int \frac{\mu r^2}{L_z} d\varphi + const$$

$t(\varphi)$

$\varphi(t = t_0)$

Wzór Bineta

Z równania ruchu względnego $\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ oraz rel.

$$\mu(a_r \vec{e}_r + a_\phi \vec{e}_\phi) = f(r) \vec{e}_r$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

oraz rel.

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$$

$$L_z^2 = L^2$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi}$$

$$L_z^2 = L^2$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r) \Rightarrow \mu \left(\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \right) = f(r)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$-\frac{L^2}{\mu r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\} = f(r)$$

← Wzór Bineta

1) Wzór Bineta pozwala dla określonego toru ruchu $r=r(\phi)$ wyznaczenie postaci siły centralnej powodującej ten ruch czyli wyznaczenie postaci funkcji $f(r)$.

2) Wzór ten pozwala dla określonej siły $f(r)$ na drodze rozwiązania równania różniczkowego rzędu drugiego na określenie równania toru $r=r(\phi)$ zależnego od dwóch stałych dowolnych, które można uzależnić od $r(\phi=0)$ i $\frac{dr}{d\phi}(\phi=0)$.

Jedną ze stałych można uzależnić od energii wykorzystując wzór wynikający z

relacji $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}(r)$ oraz $\dot{r} = \frac{L_z}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi}$

Określenie równania toru z całki energii i momentu pędu dla siły

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

$$\varphi = \int \frac{\pm \frac{L_z}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}} + const$$

$$f(r) = -\frac{dV}{dr} \quad V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\varphi = \pm \frac{L}{\mu} \int \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}} dr + const$$

$$const = \varphi_0$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{1}{r^2} dr$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{L}{\mu} \int \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}} dr = \mp \frac{L}{\mu} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2\alpha u}{\mu} - \frac{L^2 u^2}{\mu^2}}} du = \mp \frac{L}{\mu} \frac{\mu}{L} \arccos \left[\frac{-\frac{2\alpha}{\mu} + \frac{2L^2}{\mu^2} u}{\sqrt{\frac{4\alpha^2}{\mu^2} + \frac{8EL^2}{\mu^3}}} \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + bu - cu^2}} du \stackrel{c>0}{=} -\frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \left[\frac{b - 2cu}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \right]$$

$$a = \frac{2E}{\mu} \quad b = \frac{2\alpha}{\mu} \quad c = \frac{L^2}{\mu^2} > 0$$

$$= \pm \arccos \left[\frac{\frac{2\alpha}{\mu} \left(\frac{L^2 u}{\mu \alpha} - 1 \right)}{\frac{2|\alpha|}{\mu} \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}}} \right] \stackrel{\alpha > 0}{=} \pm \arccos \left[\frac{\frac{L^2 u}{\mu \alpha} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \alpha^2}}} \right]$$

Siła przyciągająca

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \arccos \left[\frac{\frac{L^2}{\mu\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}}} \right] \quad \frac{L^2}{\mu\alpha r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Równanie toru dla siły przyciągającej $\alpha > 0$

Można pokazać iż w przypadku gdy $\alpha < 0$ (siła odpychająca) otrzymujemy równanie toru w postaci

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu|\alpha|}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Dyskusja równania toru dla siły

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

siła przyciągająca
 $\alpha > 0$

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$L \neq 0$$

Równanie toru jest równaniem krzywej stożkowej

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Centrum siły w ognisku

ε mimośród

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hiperbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parabola
$0 < \varepsilon < 1$	$-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$	elipsa
$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$	okrąg

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \geq 0$$

P parametr

$$P = \frac{L^2}{\mu\alpha} > 0$$

Ruch po torach (orbitach) ograniczonych

Tory ruchu ograniczone (elipsa i okrąg) odpowiadają energii $E < 0$

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hiperbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parabola
$0 < \varepsilon < 1$	$-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$	elipsa
$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$	okrąg

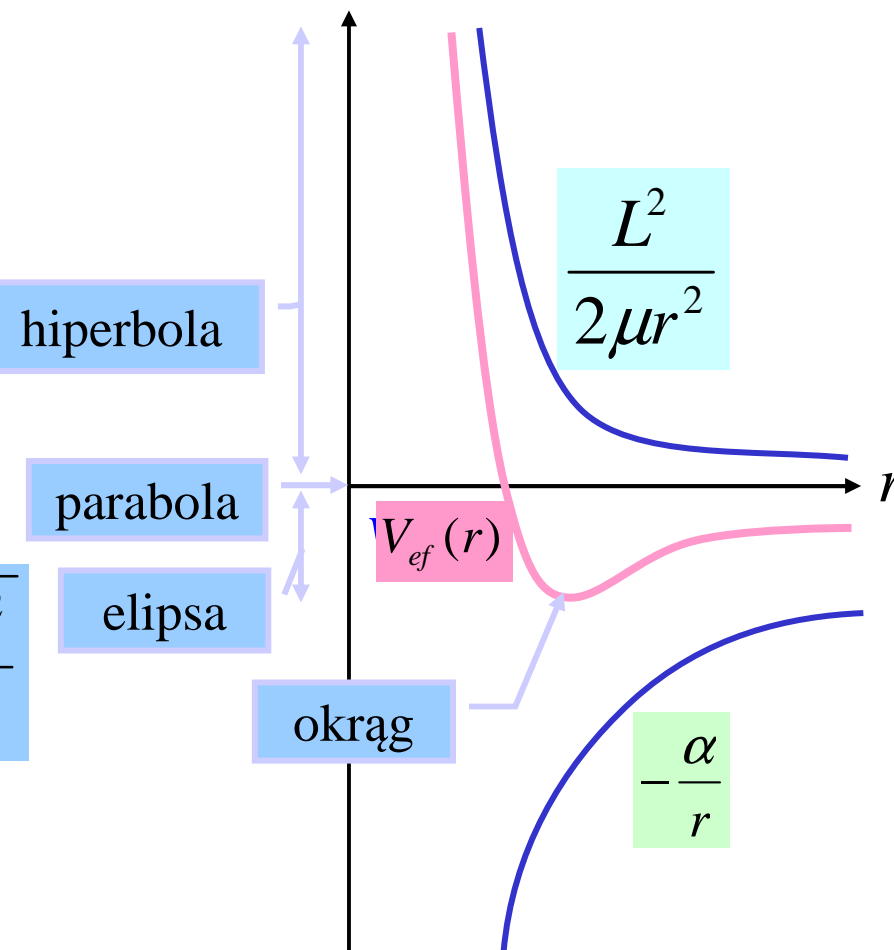
$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

Ruch po okręgu $\varepsilon = 0$

$$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$$

$$r = \text{const} = P = \frac{L^2}{\alpha\mu}$$



Ruch po elipsie $0 < \varepsilon < 1$

Odległości od ogniska do peryhelium i aphelium

$$r_{\min} = \frac{P}{(1 + \varepsilon)} \quad \text{dla} \quad \varphi - \varphi_0 = 0 + 2n\pi \quad r_{\max} = \frac{P}{(1 - \varepsilon)} \quad \text{dla} \quad \varphi - \varphi_0 = \pi + 2n\pi$$

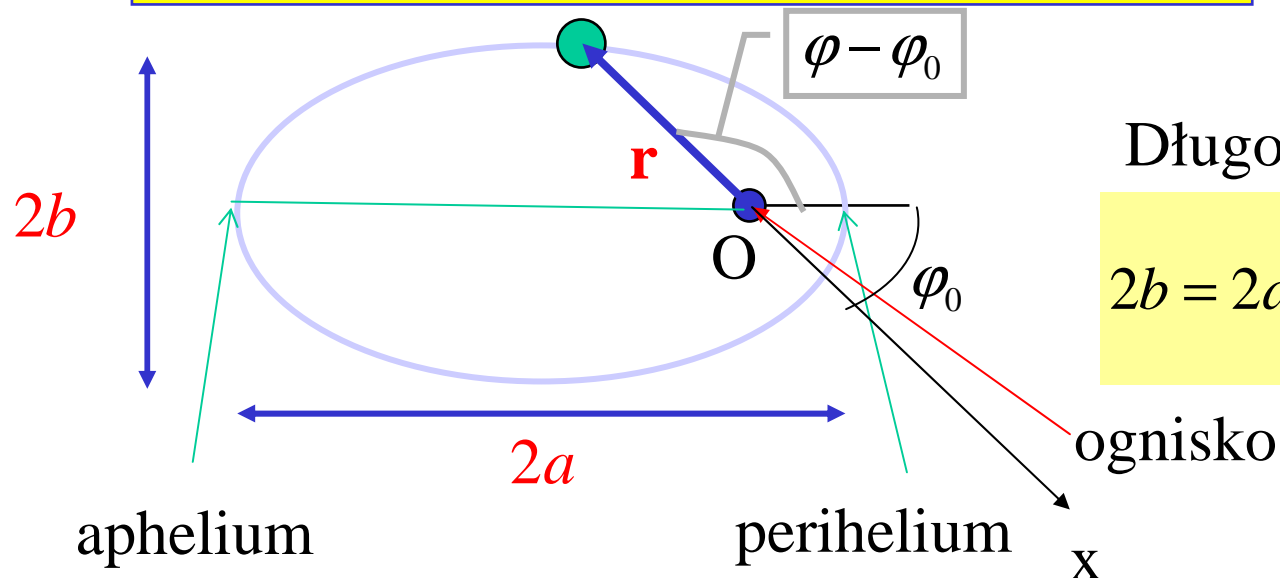
$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$P = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

Widać iż przejście $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$ wiąże się ze zmianą kąta φ o 2π -orbita zamknięta n -liczba całkowita

Długość osi dużej: (ćwiczenia) $2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2P}{(1 - \varepsilon^2)} = -\frac{\alpha}{E}$

Długość dużej osi jest określona przez całkowitą energię E



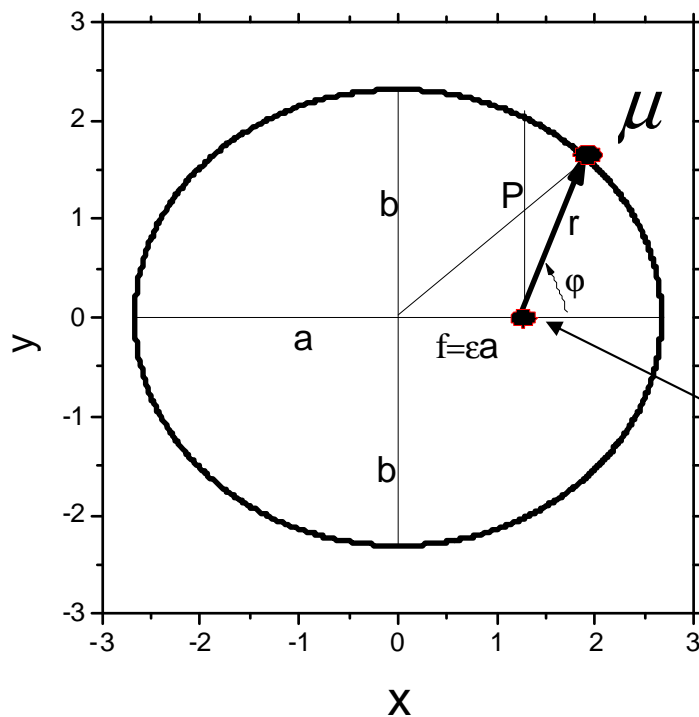
Długość osi małej: (ćwiczenia)

$$2b = 2a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{-\frac{2L^2}{\mu E}}$$

Wyznaczenie ogniskowej elipsy f

$$r_{\max} - r_{\min} = (a + f) - (a - f) = 2f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{P}{1 - \varepsilon} - \frac{P}{1 + \varepsilon} \right] = \frac{P\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = a\varepsilon$$



φ_0 określa orientację osi dużej elipsy względem osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych

Gdy $\varphi_0 = 0$ to duża półoś elipsy pokrywa się z osią Ox i

$\varphi = 0$ odpowiada perihelium a

$\varphi = \pi$ aphelium

Centrum siły (początek układu bieżunowego) nie leży na przecięciu osi symetrii elipsy lecz w ognisku

Po przesunięciu początku układu współrzędnych o wektor $\vec{d} = [-f, 0] = [-\varepsilon a, 0]$ o długości równej ogniskowej $f = \varepsilon a$ i umieszczeniu go na przecięciu osi symetrii elipsy równanie elipsy w układzie kartezjańskim przyjmuje postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Związek toru ruchu analizowanych ciał z torem ruchu ciała o masie zredukowanej

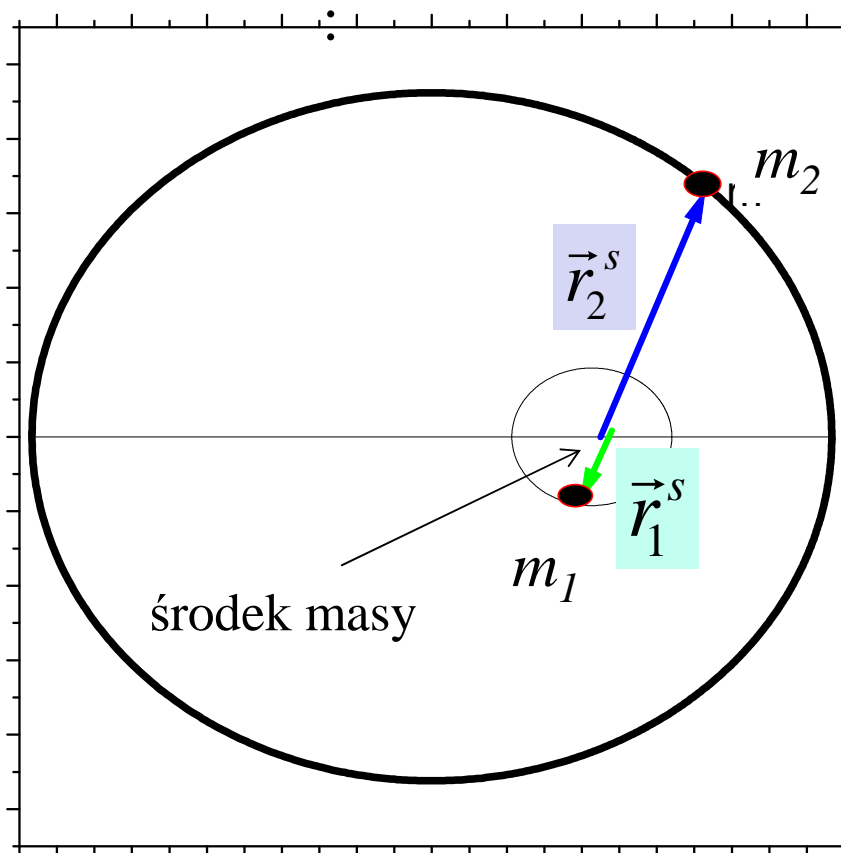
Uwzględniając związki wiążące wektory wodzące ciał o masach m_1 i m_2 w układzie środka masy \vec{r}_1^s oraz \vec{r}_2^s odpowiednio z wektorem wodzącym \vec{r} ciała o masie

zredukowanej μ :

$$\vec{r}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

widać iż ruch obu ciał zachodzi po elipsach o ogniskach położonych w środku masy

Rysunek
dla
 $m_1 > m_2$



Długości dużych półosi tych elips a_1 i a_2 można powiązać z długością dużej półosi elipsy będącej torem ruchu ciała o masie zredukowanej

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a$$

Gdy $m_1 \gg m_2$ to $a_1 \approx 0$

$a_2 \approx a$ czyli ciało o masie m_2 porusza się po elipsie w ognisku położonym w miejscu położenia ciała o masie m_1 .

Wyznaczenie zależności $r(t)$ w ruchu po elipsie

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu} \sqrt{-r^2 - \frac{L^2}{2\mu|E|} + \frac{\alpha r}{|E|}}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu} \sqrt{-(r-a)^2 + a^2 \varepsilon^2}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\mu\alpha^2}} \quad \text{-mimośród elipsy}$$

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \quad \text{-długość dużej półosi elipsy}$$

Do określenia położenia ciała na torze można wykorzystać zamiast zmiennej r (lub φ) zmienną u , której związek ze zmienną r dany jest relacją

$$r = a(1 - \varepsilon \cos(u))$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt}$$

Po uwzględnieniu powyższych relacji otrzymujemy równanie

$$a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt} = \pm \frac{1}{a(1 - \varepsilon \cos(u))} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 (-\cos^2(u) + 1)}}$$

Wyznaczenie zależności $r(t)$ w ruchu po elipsie

$$a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt} = \pm \frac{1}{a(1-\varepsilon \cos(u))} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu}} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 (-\cos^2(u) + 1)}$$

$$a\varepsilon \sin(u) \frac{du}{dt} = \pm \frac{a\varepsilon \sin(u)}{a(1-\varepsilon \cos(u))} \sqrt{\frac{2|E|}{\mu}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\mu\alpha^2}} \text{ - mimośród elipsy}$$

$$dt = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} (1 - \varepsilon \cos(u)) du \Rightarrow$$

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \text{ - długość dużej półosi elipsy}$$

$$\Rightarrow t = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int (1 - \varepsilon \cos(u)) du$$

Po scałkowaniu obustronnym

$$t = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} (u - \varepsilon \sin(u)) + const = \pm \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (u - \varepsilon \sin(u)) + const$$

Równanie
Keplera

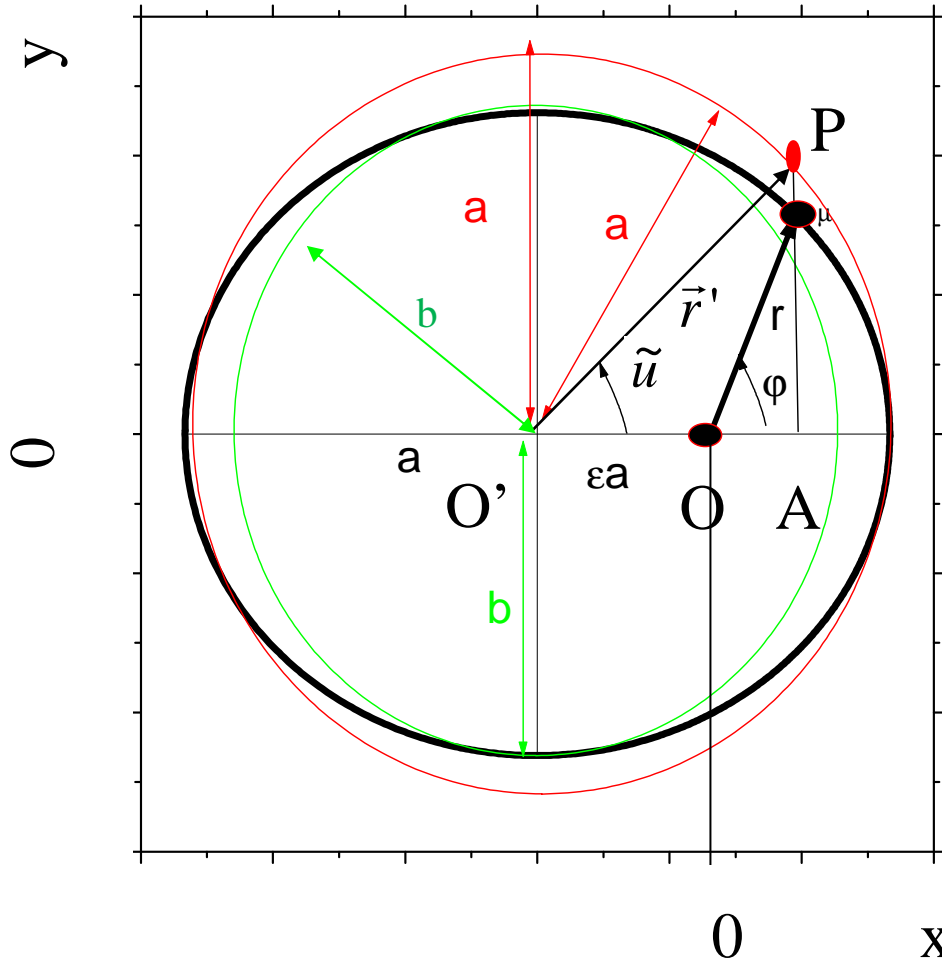
Nie da się relacji powyższej odwrócić tak by znaleźć $u(t)$ przy pomocy funkcji elementarnych. Można pokazać iż obiegowi elipsy odpowiada zmiana u o 2π

Z relacji powyższej wynika iż zmiana ta zachodzi w czasie $T = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} 2\pi$

Czas ten jest równy okresowi obiegu elipsy

Czym jest u (anomia mimośrodowa) ?

Współrzędne (x,y) ciała o masie zredukowanej w układzie O można powiązać z u wzorem $x = a \cos u - a\varepsilon, y = b \sin(u)$



Dowód Przyjmujemy $\varphi_0 = 0$

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{P - r}{r\varepsilon} = \frac{\cos(u) - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos(u)}$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos(u))$$

$$P = a(1 - \varepsilon^2)$$

$$x = r \cos(\varphi) = \frac{P - r}{\varepsilon} = a \cos u - a\varepsilon$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u = b \sin u$$

Rozważmy punkt P poruszający się po okręgu o promieniu a tak iż jego x -owa współrzędna x_p w każdej chwili czasu jest równa współrzędnej x ciała o masie zredukowanej. Jego współrzędne można powiązać z wielkością \tilde{u} na rysunku

$$x_p = |O'A| - |OO'| = a \cos(\tilde{u}) - \varepsilon a,$$

$$y_p = |AP| = |O'P| \sin(\tilde{u}) = a \sin(\tilde{u})$$

Ponieważ $x_p = x$ to $u = \tilde{u}$ czyli anomia mimośrodowa u to kąt jaki z dużą osią elipsy tworzy wektor wodzący \vec{r}' punktu P w układzie o początku w punkcie O'

Czasu obiegu elipsy dla ciała o masie zredukowanej

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2}$$

Wzór ten można wyznaczyć także (analogicznie jak na ćwiczeniach) wykorzystując wzory na prędkość polową $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}$ i pole elipsy $A = \pi ab = \pi \sqrt{-\frac{L^2 \alpha^2}{8\mu E^3}}$

Dzięki temu iż prędkość polowa jest stała to $T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}}$

Wyznaczony okres obiegu elipsy przez ciało o masie zredukowanej $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$

jest równy okresowi obiegu przez oba ciała elips, po których się one poruszają

W przypadku ruchu pod wpływem siły grawitacyjnej $\alpha = Gm_1 m_2$ czyli

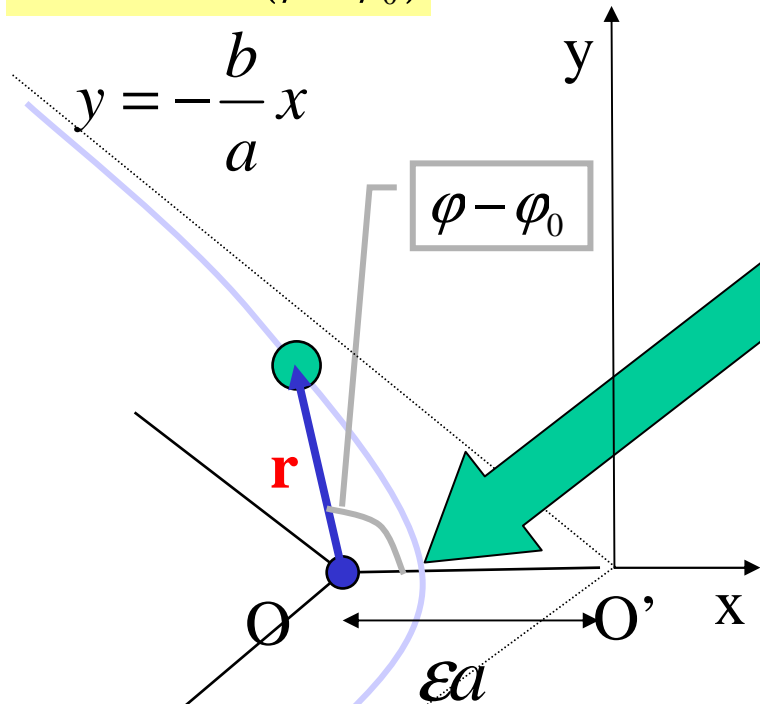
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2}$$

Gdy $m_1 \gg m_2$ to $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2} \approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{Gm_1}} a^{3/2}$

Gdy ciałem o masie $m_1 = M$ jest Słońce otrzymujemy **III prawo Keplera** zgodnie z którym dla wszystkich planet stosunek $\frac{T^2}{a^3} \approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{GM}}$ jest jednakowy

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$



• $\varepsilon > 1 \rightarrow$ hiperbola

$$\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}} \Rightarrow \varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$$

$$r_{\min} = \frac{P}{1 + \varepsilon} \text{ dla } \varphi = \varphi_0 \text{ (perihelium)}$$

$r > 0$ i skończone $\Rightarrow 1/r > 0 \Rightarrow$

$\cos(\varphi - \varphi_0) > -1/\varepsilon$ ogranicza φ

$$-\varphi_{gr} < \varphi - \varphi_0 < \varphi_{gr} \quad \varphi_{gr} = \arccos(-1/\varepsilon) \quad \pi/2 < \varphi_{gr} < \pi$$

$$r \rightarrow \infty \text{ dla } \varphi - \varphi_0 = \pm \varphi_{gr}$$

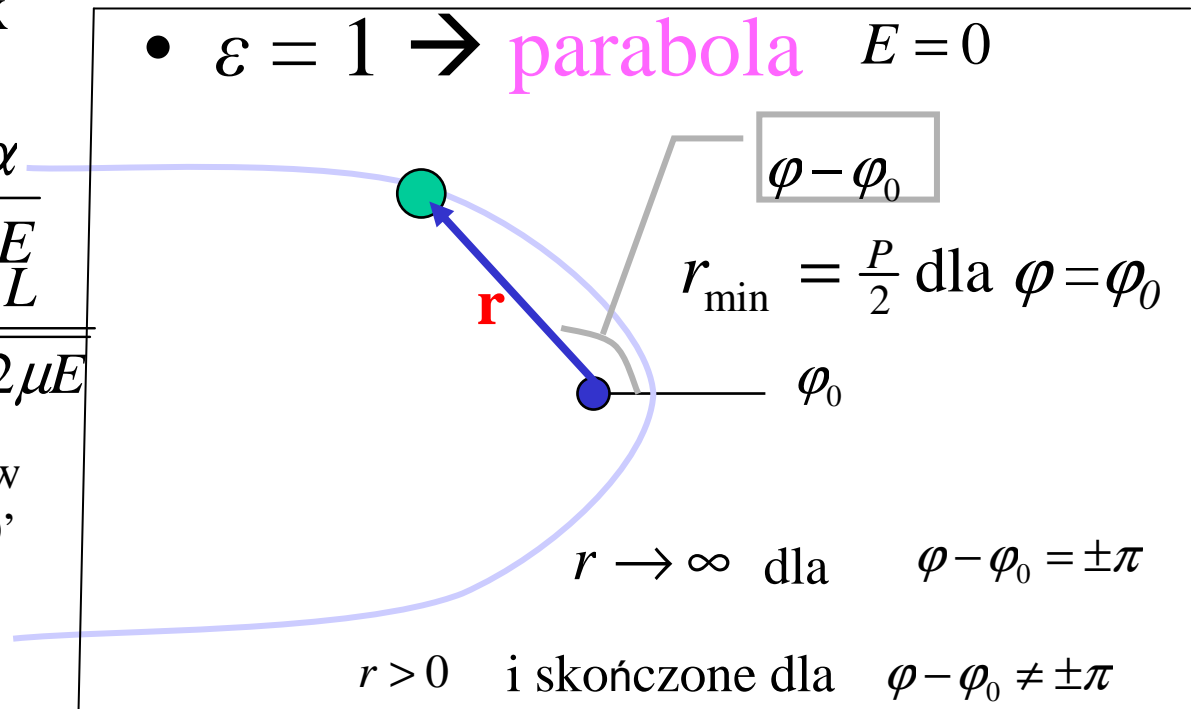
• $\varepsilon = 1 \rightarrow$ parabola $E = 0$

$$a = \frac{P}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E/L}$$

$$b = \frac{P}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\mu E}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ równanie w układzie } O'$$

$$y = \frac{b}{a}x$$



$$r \rightarrow \infty \text{ dla } \varphi - \varphi_0 = \pm \pi$$

$r > 0$ i skończone dla $\varphi - \varphi_0 \neq \pm \pi$

Na rysunku z układem kartezyjskim $\varphi_0 = 0$

Dyskusja równania toru dla $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ gdy $\alpha < 0$ siła odpychająca

$$r = \frac{P}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

$$L \neq 0$$

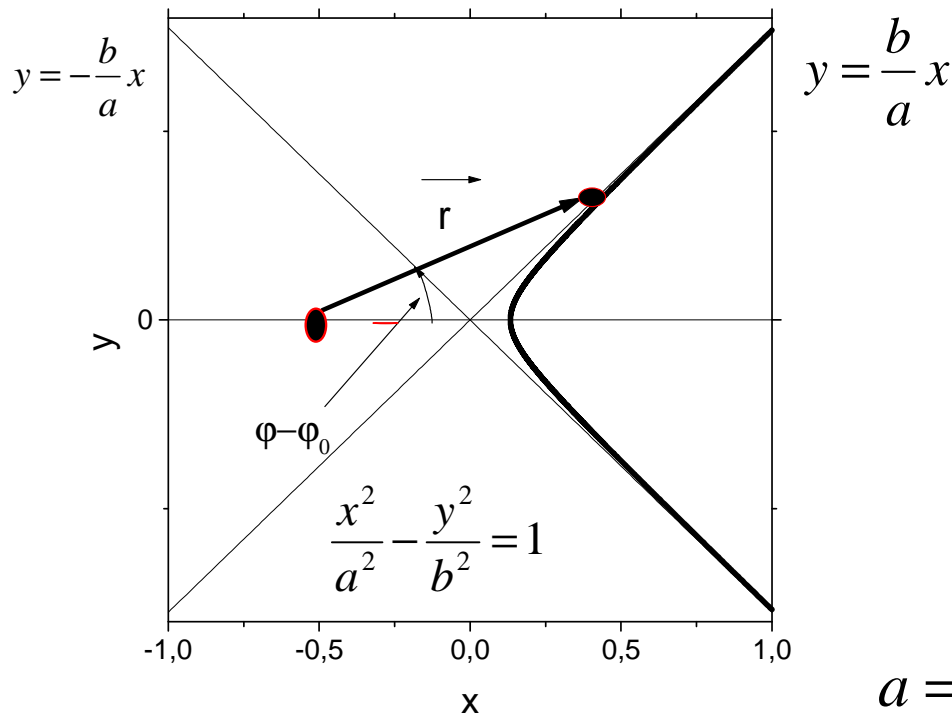
ε mimośród

$$P = \frac{L^2}{\mu|\alpha|}$$

P parametr

Rozwiązanie $r > 0$ i skończone istnieje tylko w przypadku gdy $\varepsilon > 1 \Rightarrow E > 0$

Rozwiązaniem jest druga gałąź hiperboli



$$\varphi = \varphi_0 - \text{perihelium} \quad r_{\min} = \frac{P}{-1 + \varepsilon}$$

$$r > 0 \text{ i skończone} \Rightarrow 1/r > 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi - \varphi_0) > 1/\varepsilon \text{ ogranicza } \varphi$$

$$-\varphi_{gr} < \varphi - \varphi_0 < \varphi_{gr}$$

$$\varphi_{gr} = \arccos(1/\varepsilon) < \pi/2$$

$$r \rightarrow \infty \text{ gdy } (\varphi - \varphi_0) \rightarrow \pm \varphi_{gr}$$

$$a = \frac{P}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{|\alpha|}{2E}$$

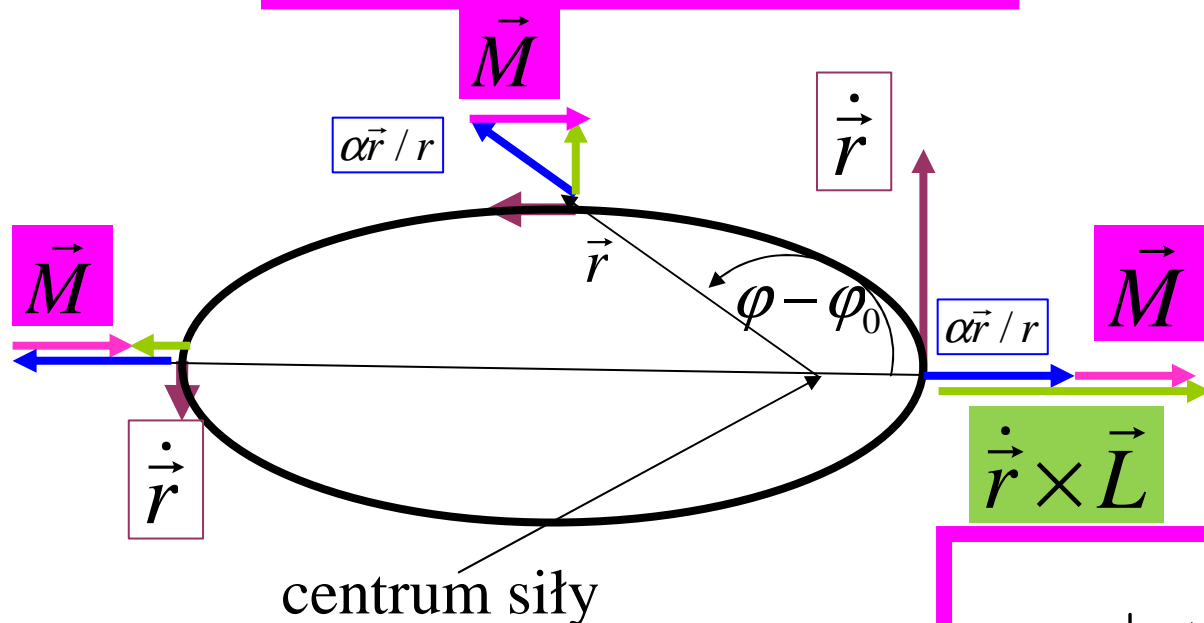
$$b = \frac{P}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{L}{\sqrt{2\mu E}}$$

Wektor Rungego-Lentza całką ruchu odbywającego się pod wpływem siły $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ (dowód ćwiczenia)

$$\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} = \text{const}$$

całka ruchu

W przypadku ruchu po elipsie kierunek wektora \vec{M} jest równoległy do dużej półosi elipsy (ogólnie równoległy do prostej przechodzącej przez ognisko i peryhelium)



centrum siły

Długość wektora

Rungego-Lentza jest równa

$$M = |\vec{M}| = |\alpha| \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = |\alpha| \varepsilon$$

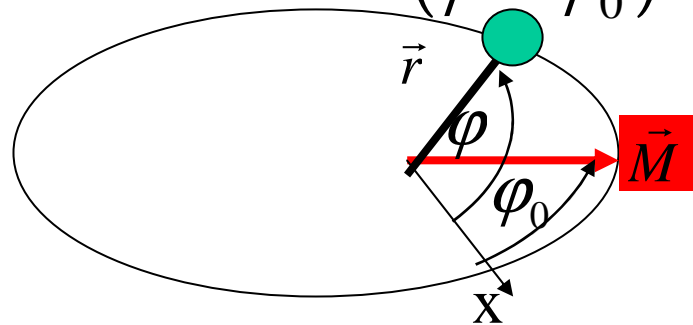
Fakt iż \vec{M} nie zależy od czasu dostarcza 3 całek ruchu, z których tylko jedna jest niezależna od całek ruchu E i \vec{L} (stałość długości i zerowanie się składowej wektora \vec{M} prostopadłej do płaszczyzny ruchu wynika ze stałości E i \vec{L})

Znajomość wektora Rungego-Lentza pozwala na określenie w inny sposób równania toru ciała o masie zredukowanej $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{M} \cdot \vec{r} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} - \alpha r = \frac{L^2}{\mu} - \alpha r$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{r} = Mr \cos(\varphi - \varphi_0)$$



$$Mr \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{L^2}{\mu} - \alpha r$$

$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu}}{M \cos(\varphi - \varphi_0) + \alpha}$$

$$M = \alpha \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = |\alpha| \varepsilon = \alpha \varepsilon \quad \alpha > 0$$

$$P = \frac{L^2}{\mu|\alpha|} = \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

równanie orbity eliptycznej dla $0 < \varepsilon < 1$
(równanie toru gdy $\alpha > 0$)

$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu\alpha}}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} =$$

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

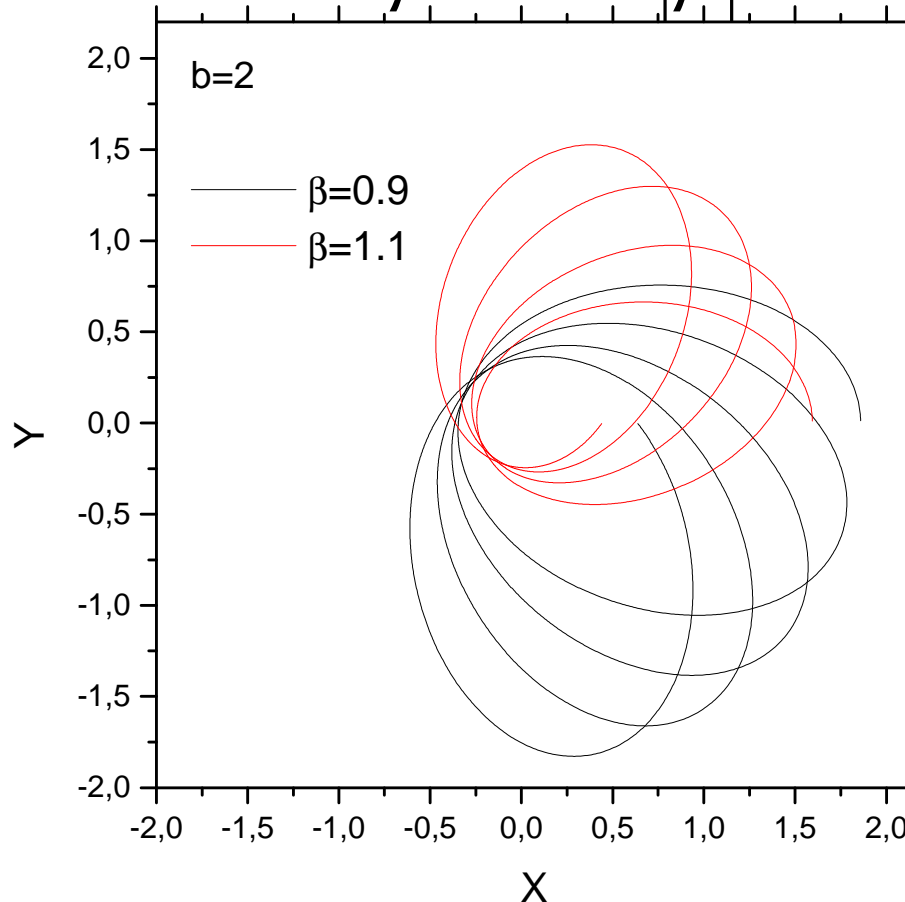
Kształt toru dla przypadku gdy
 $V(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$ $\beta > 1$ lub $\beta < 1$ $|\beta| \approx 1$

$$\alpha > 0, E < 0$$

$$b = \frac{\alpha}{|E|} \left(\sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \right)^\beta$$

$$X = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \cos(\varphi)$$

$$Y = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \sin(\varphi)$$



Można zauważyć iż dla $\beta \neq 1$ tor ruchu nie jest krzywą zamkniętą

W szczególności gdy $\beta > 1$ mamy $\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(L/r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr > \pi$

zaś gdy $\beta < 1$ mamy $\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(L/r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr < \pi$

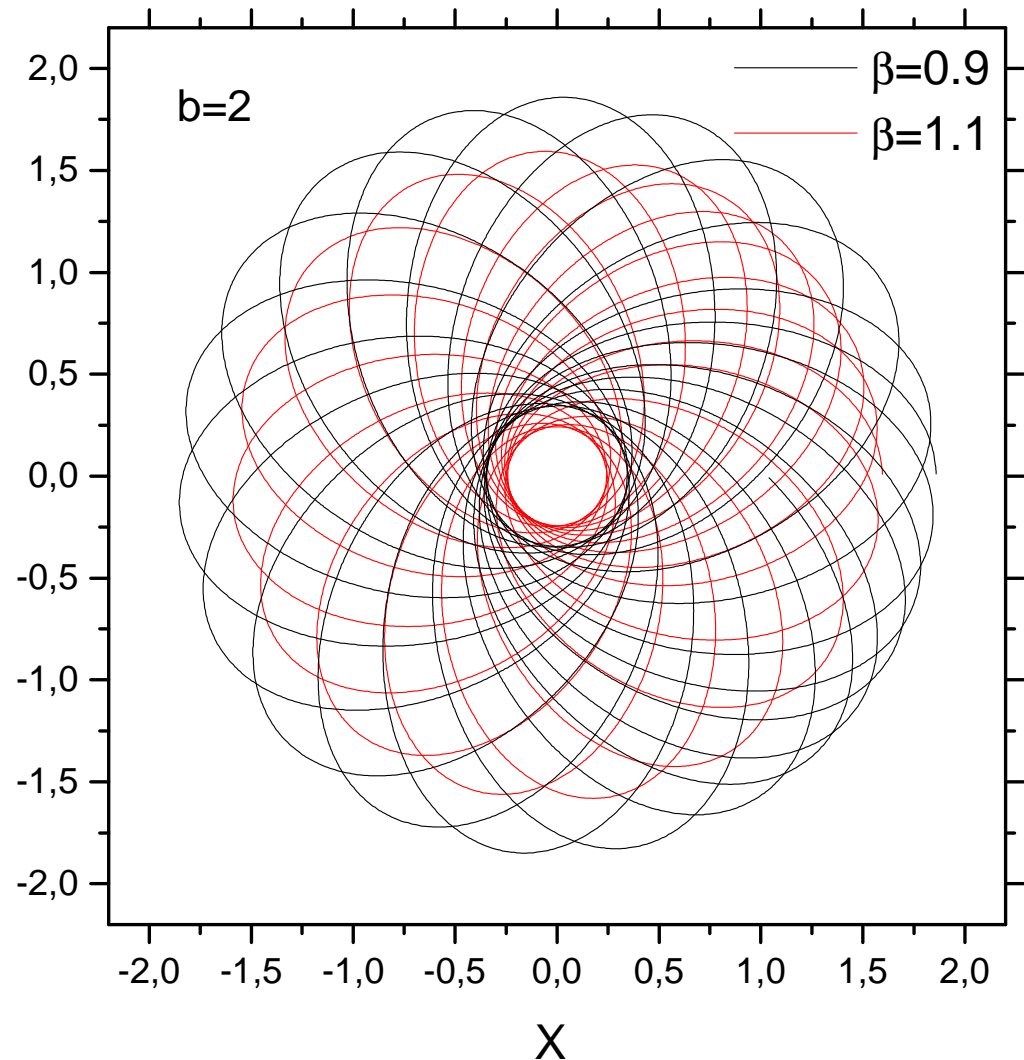
$$\alpha > 0, E < 0$$

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$$

$$b = \frac{\alpha}{|E|} \left(\sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \right)^\beta \quad \text{>}$$

$$X = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \cos(\varphi)$$

$$Y = r \sqrt{\frac{\mu|E|}{L^2}} \sin(\varphi)$$



Można zaobserwować występowanie maksymalnej i minimalnej odległości pomiędzy dwoma ciałami

Przykładowe trajektorie ciał oddziałujących siłą centralną o potencjale

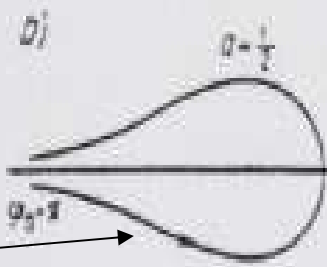
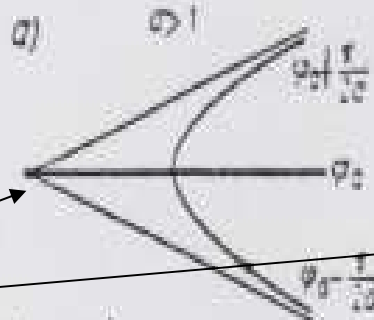
$V(r) = -\frac{\alpha}{2r^2}$ Kształt toru zależy od parametru

$a = \sqrt{1 - \frac{\alpha\mu}{L^2}}$

$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

Tor z rysunku a) odpowiada sile odpychającej, pozostałe sile przyciągającej

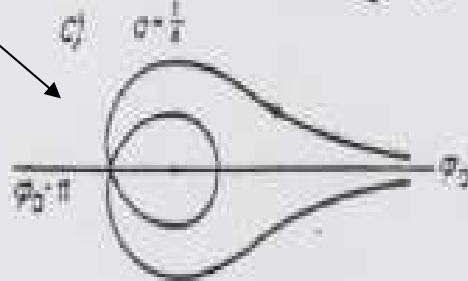
$E > 0, \alpha < 0$



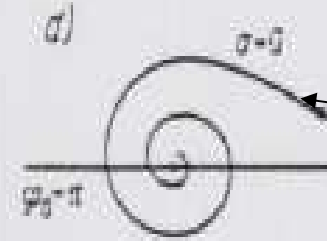
$E > 0, \alpha > 0$

$r = \frac{1}{C \cos(a(\varphi - \varphi_0))}$

$E > 0, \alpha > 0$



$E > 0, \alpha > 0$



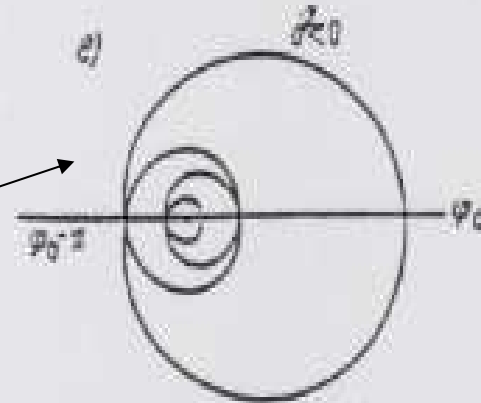
$r = \frac{1}{C(\varphi - \varphi_0)}$

spirala hiperboliczna

$E < 0, \alpha > 0$

$r = \frac{1}{C \cosh(b(\varphi - \varphi_0))}$

$b^2 = -a^2$



Rysunek nie pokazuje wszystkich możliwych torów ruchu ciał, a tylko przykładowe