

MECHANIKA KLASYCZNA

Michał Wilczyński

Adres e-mail: michal.wilczynski@pw.edu.pl

Adres strony internetowej:

<http://www.if.pw.edu.pl/~wilczyns>

Konsultacje:

- 1) poniedziałki 16:15-17 sala 103A GF
- 2) czwartki 9:15-10:15 sala 103A GF (nie będzie konsultacji 27.02)
- 3) piątki 16:45-17:30 sala 103A GF

Terminy konsultacji mogą ulec zmianie. Aktualne terminy konsultacji są umieszczone na stronie internetowej

Możliwość indywidualnych konsultacji w terminie uzgodnionym poprzez e-mail

ORIENTACYJNY PROGRAM WYKŁADU z MECHANIKI KLASYCZNEJ

- 1) Przypomnienie podstawowych praw klasycznej mechaniki. **Zagadnienie dwóch ciał oddziałujących siłą centralną.** Równanie ruchu względnego. Całka energii i momentu pędu. Potencjał efektywny. Wzór Bineta.
- 2) Ruch pod wpływem siły o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości ciał. Wektor Runge-Lenza. Zarys metody rozwiązywania numerycznego równań ruchu.
- 3) Więzy. Przesunięcia wirtualne. **Zasada d'Alemberta** dla punktu materialnego i układu punktów materialnych. Siła reakcji więzów, **Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju.** Zasada Lagrange'a (prac wirtualnych). Przykłady ilustrujące zastosowanie zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju.
- 4) Współrzędne uogólnione, Siła uogólniona, równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Funkcja Lagrange'a, **równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla sił potencjalnych.** Pęd uogólniony. Współrzędne cykliczne. Całki pierwsze równań Lagrange'a II rodzaju. Potencjał uogólniony dla cząstki w polu elektromagnetycznym. Przykłady ilustrujące równania Lagrange'a drugiego rodzaju i sposoby ich analitycznego i numerycznego rozwiązania.
- 5) Położenie równowagi układów mechanicznych, trwałość (stabilność) położenia równowagi. Przybliżona analiza równań ruchu w pobliżu położenia równowagi. **Małe drgania układu o wielu stopniach swobody.** Współrzędne normalne.

- 6) Wariacja funkcji i wariacja całki. **Równania Eulera-Lagrange'a dla zagadnienia wariacyjnego.** Przykłady zasad wariacyjnych (w tym zasada najmniejszego działania Hamiltona). **Twierdzenie Noether,** związek całek ruchu z symetrią układu.
- 7) **Funkcja Hamiltona i równania kanoniczne Hamiltona.** Nawiasy Poissona. Funkcja Hamiltona dla cząstki naładowanej poruszającej się w polu elektrycznym i magnetycznym. Przykłady.
- 8) **Przestrzeń fazowa.** Analiza ruchu układów mechanicznych w przestrzeni fazowej. Twierdzenie Liouville'a oraz twierdzenie Poincarego o powrocie i ich związek z podstawami fizyki statystycznej.
- 9) **Transformacje kanoniczne.** Równanie Hamiltona-Jacobiego. Separacja zmiennych w równaniu Hamiltona-Jacobiego. Przykłady całkowania równania Hamiltona-Jacobiego.
- 10) Elementy dynamiki układów nieliniowych. Chaos deterministyczny
- 11) Funkcja Lagrange'a i Hamiltona w mechanice relatywistycznej.

Program wykładu oraz kolejność realizacji tematów może ulec modyfikacjom.

LITERATURA

Podręczniki:

- 1) W. Rubinowicz, W. Królikowski, Mechanika teoretyczna, PWN 1998.
- 2) J. R. Taylor, Mechanika klasyczna tom 1 i 2 , PWN 2006. (małe drgania, dynamika układów nieliniowych, przykłady)
- 3) M. Wierzbicki, Mechanika klasyczna w zadaniach, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2010. (współrzędne krzywoliniowe, przykłady)
- 4) G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN 1975. (twierdzenie Noether)
- 5) K. Stefański, Wstęp do mechaniki klasycznej, PWN 1999.
- 6) I.I. Olchowski, mechanika teoretyczna, PWN 1978 (przykłady).
- 7) L.D. Landau, J.M. Lifszyc, Mechanika, PWN 2007.
- 8) H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Classical mechanics, Addison Wesley 1980.
- 9) W. Greiner, Classical mechanics, systems of particles and Hamiltonian dynamics, Springer 2010 – dostępna wersja internetowa książki w bibliotece
- 10) D. Morin, Classical mechanics with problems and solutions, Cambridge University Press 2008.
- 11) R.D. Gregory, Classical mechanics, Cambridge University Press 2006.

Zbiory zadań:

- 1) E. Karaśkiewicz, Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej, PWN 1959.
- 2) Zadania umieszczone w podręcznikach 1,2,3,5,6,7,9,10,11
- 3) G.L. Kotkin, W.G. Serbo, Zbiór zadań z mechaniki klasycznej, *WNT* 1972.

Regulamin-Zasady zaliczenia przedmiotu

- 1) Przedmiot obejmuje 30 h wykładu i 30 h ćwiczeń rachunkowych.
- 2) Obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa. Dopuszczone są dwie nieobecności nieusprawiedliwione za wyjątkiem ćwiczeń na którym organizowane są kolokwia.
- 3) W ramach ćwiczeń zorganizowane będą 2 kolokwia w semestrze, za każde z nich można uzyskać do 20 punktów. Dodatkowo w ramach ćwiczeń do 16 punktów będzie można uzyskać łącznie za rozwiązanie prac domowych, zadania projektowego oraz aktywność podczas zajęć.
- 4) Pisemny egzamin z przedmiotu będzie składał się z kilku/kilkunastu pytań o charakterze otwartym. Niektóre pytania mogą odnosić się do zademonstrowania dowodu wyprowadzenia wybranych relacji udowodnionych na wykładzie. W ramach egzaminu będą także do rozwiązania zadania bardzo zbliżone do przykładowych zadań omawianych na wykładzie lub rozwiązywanych na ćwiczeniach łącznie za 20 punktów. Osoby które otrzymają z ćwiczeń 44 punkty będą zwolnione z konieczności rozwiązania zadań na egzaminie otrzymując z nich 20 punktów. Za egzamin będzie można uzyskać maksymalnie 50 punktów.
- 5) Przed wystawieniem oceny z prac pisemnych i egzaminu może być przeprowadzona dodatkowa rozmowa ustna. W czasie egzaminu i kolokwiów nie można korzystać z materiałów nie udostępnionych w trakcie egzaminu przez prowadzącego.
- 6) Warunkiem koniecznym zaliczenia przedmiotu jest otrzymanie z ćwiczeń co najmniej 25 punktów oraz uzyskanie na egzaminie co najmniej 25 punktów.
- 7) Ocena z przedmiotu jest oceną łączną, wystawianą na podstawie sumy punktów z ćwiczeń i egzaminu według następującej skali: 0-49 pkt – 2.0, 50-59 pkt. - 3.0, 60-69 pkt. – 3.5, 70-79 pkt. – 4.0, 80-89 pkt. – 4.5, 90 pkt. i więcej – 5.0.

Przypomnienie podstawowych praw mechaniki punktu materialnego

II zasada dynamiki Newtona

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

(obowiązuje w inercjalnych układach odniesienia gdy $|\vec{v}| \ll c$
 c - wartość prędkości światła)

m -masa punktu materialnego, $\vec{F}$ -wypadkowa siła działająca na punkt materialny

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{-przyspieszenie punktu materialnego,}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{-prędkość punktu materialnego,} \quad \vec{r} \quad \text{-wektor wodzący punktu materialnego}$$

Stosowana konwencja oznaczenia pochodnej po czasie

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \text{ ozn. } \dot{\vec{A}} \quad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \text{ ozn. } \ddot{\vec{A}} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

Równanie ruchu

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -wersory

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{równania różniczkowe rzędu drugiego}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow m\ddot{y} = F_y$$

Równania te można formułować także w układach krzywoliniowych
znając rozkład na składowe w tych układach wektorów przyspieszenia
(ćwiczenia) i siły

$$m\ddot{z} = F_z$$

Energia kinetyczna $E_k = T$ $T = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} = \frac{m}{2} \sum_j v_j^2$ v_j -składowe prędkości ciała w układzie ortogonalnym

Dla układu złożonego z n punktów materialnych o masach m_i $T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\vec{v}_i|^2$

Potencjał V (gdy nie zależy jawnie od czasu $V = \text{energia potencjalna}$)
 (jest funkcją współrzędnych określających położenie punktów materialnych wchodzących w skład układu oraz ewentualnie czasu ,
 potencjał definiuje się także dla pojedynczego ciała poruszającego się pod działaniem sił wytworzonych przez ciała spoza układu,
 wielkość użyteczna przy zapisie równań Lagrange'a II rodzaju i równań Hamiltona)

Ogólny związek między siłą wypadkową działającą na i -te ciało $\vec{F}_i$ i potencjałem

$\vec{F}_i = -\text{grad}_i V = -\nabla_i V$ (pozwała na jego wyznaczenie z dokładnością do stałej)

W układzie kartezyjskim $F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ $F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$ x_i, y_i, z_i - współrzędne określające położenie i -tego punktu materialnego

Potencjał w sensie określonym powyżej można określić gdy wszystkie siły działające w układzie są potencjalne (można dla każdej z nich określić potencjał wykorzystując relację analogiczną do powyższej)

Zasada zachowania energii

Gdy wszystkie siły działające w układzie są potencjalne i potencjał ten nie zależy jawnie od czasu, to całkowita energia $E = T + V$ jest stałą ruchu

Pęd i moment pędu dla układu złożonego z punktów materialnych

$$\vec{p}_u = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{L}_u = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

(sumowanie po punktach materialnych)

Związek pędu z wypadkową siłą

$$\dot{\vec{p}}_u = \vec{F}_w$$

gdzie $\vec{F}_w$ -suma wektorowa wszystkich sił zewnętrznych

Związek momentu pędu z wypadkowym momentem sił

$$\dot{\vec{L}}_u = \vec{D}_w = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Moment pędu i moment siły będący sumą momentów sił działających na wszystkie punkty materialne określamy względem tego samego punktu spoczywającego w inercjalnym układzie współrzędnych lub środka masy układu. Gdy siły działające między punktami są centralne (działają wzdłuż prostej łączącej dwa punkty) to nie wnoszą one wkładu do wypadkowego momentu sił.

Zasada zachowania pędu i momentu pędu

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{w,zew} = 0 \Rightarrow \vec{p}_u = const$$

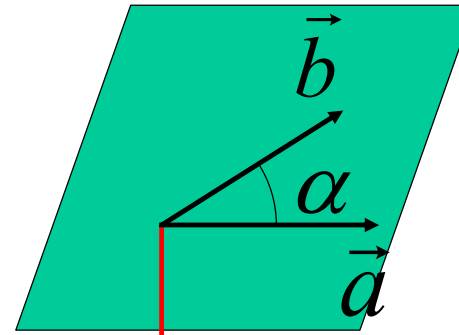
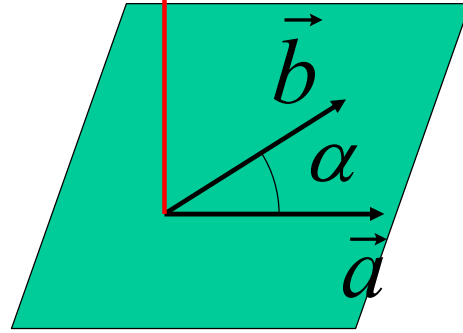
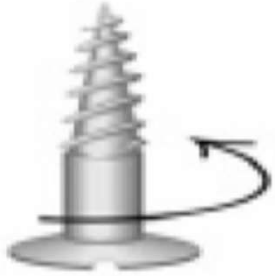
zasada zachowania pędu (3 całki ruchu)

$$\vec{D}_w = \vec{D}_{w,zew} = 0 \Rightarrow \vec{L}_u = const$$

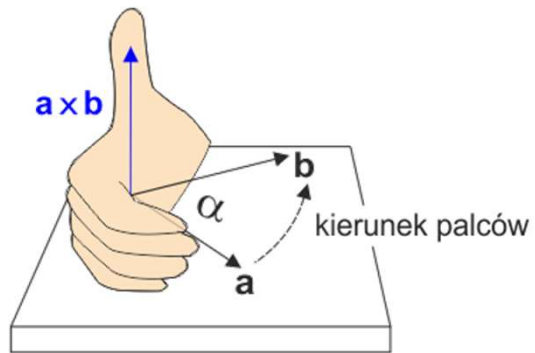
zasada zachowania momentu pędu
(3 całki ruchu)

Reguła śruby prawoskrętnej

$$\vec{h}_1 = \vec{a} \times \vec{b}$$



Reguła prawej ręki



$$|\vec{h}_1| = |\vec{h}_2| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\alpha)$$

$$\vec{h}_2 = \vec{b} \times \vec{a}$$

Zagadnienie dwóch ciał oddziałujących siłą centralną

Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

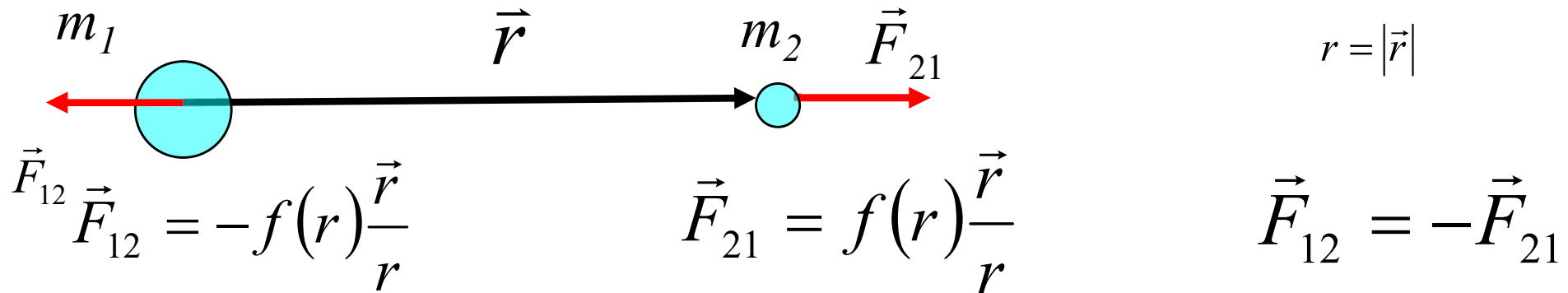
Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

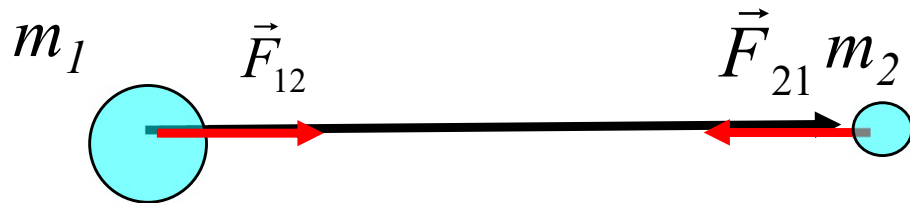
Wzajemne oddziaływanie dwóch ciał, które może być opisywane jako oddziaływanie centralne, jest zjawiskiem, w którym siła oddziaływania jest skierowana wzdłuż linii łączącej środki mas obu ciał.

Siła centralna



Dla oddziaływania grawitacyjnego
(siła przyciągająca)

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} < 0 \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$



Dla oddziaływania elektrostatycznego w próżni

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \quad \epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$$

$q_1 > 0$ $q_2 > 0$

(siła odpychająca dla ładunków q_1 i q_2 o jednakowym znaku)

Dla oddziaływania grawitacyjnego lub elektrostatycznego $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = |f(r)| \propto \frac{1}{r^2}$

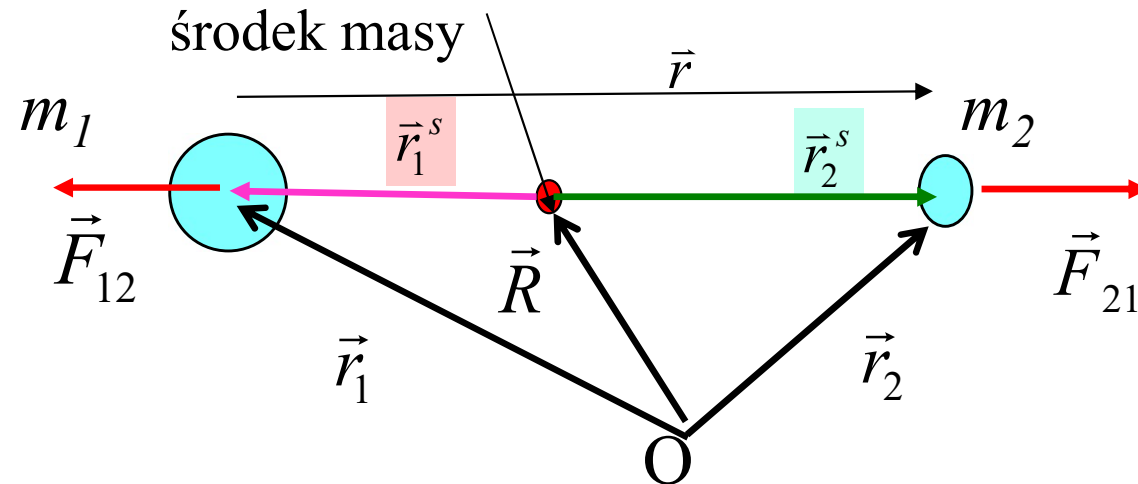
$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ α -stała $\alpha = Gm_1m_2$ dla oddziaływania grawitacyjnego

Równania ruchu i układ środka masy w zagadnieniu dwóch ciał

$$\vec{F}_{12} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{F}_{21} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Położenie środka masy układu określa wektor

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1^s + \vec{R}, \vec{r}_2 = \vec{r}_2^s + \vec{R}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s$$

Z II zasady dynamiki Newtona zapisanej w układzie inercyjnym O wynikają równania

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

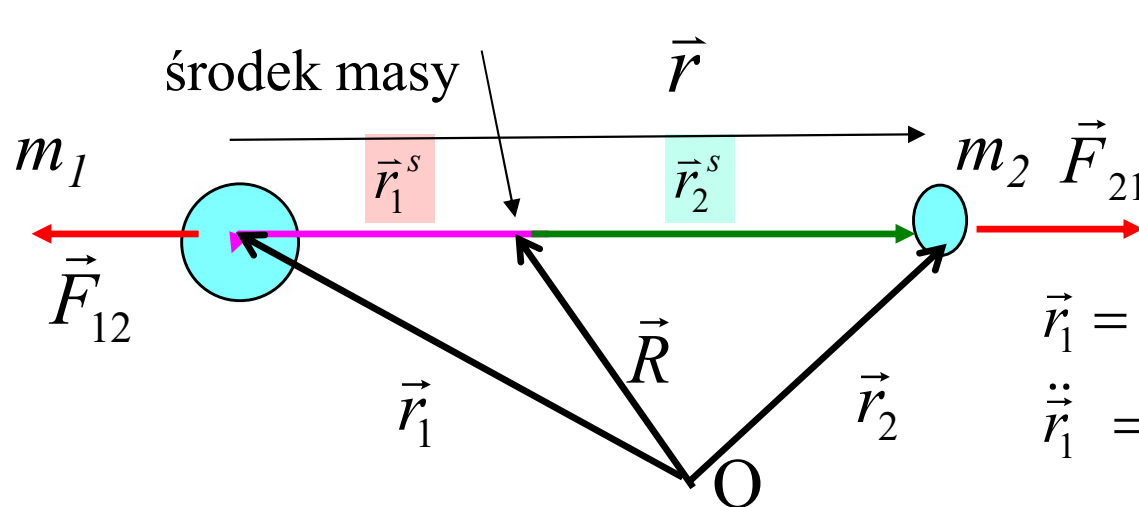
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Przyspieszenie środka masy jest równe zero czyli środek masy można przyjąć za początek układu inercyjnego. Wynika to z faktu iż siła wypadkowa działająca na układ ciał jest równa zero (brak sił zewnętrznych)

Równanie ruchu względnego w zagadnieniu dwóch ciał



$$\vec{F}_{12} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{21} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1^s + \vec{R} & \vec{r}_2 &= \vec{r}_2^s + \vec{R} & \ddot{\vec{R}} &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= \ddot{\vec{r}}_1^s & \ddot{\vec{r}}_2 &= \ddot{\vec{r}}_2^s & \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s \end{aligned}$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{1}{m_1} f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2} f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Odejmując równania otrzymane stronami

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2^s - \ddot{\vec{r}}_1^s = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \rightarrow \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{\mu} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

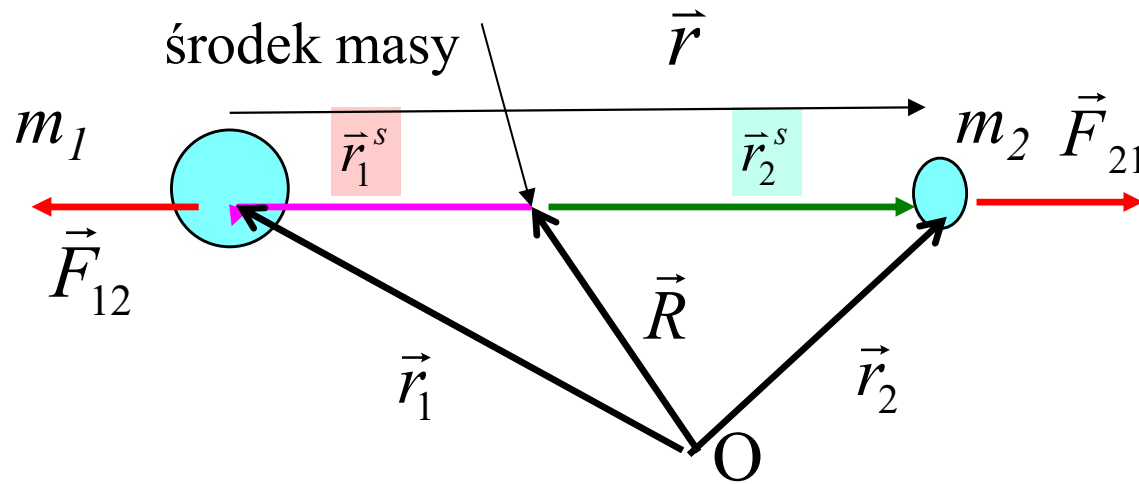
Równanie ruchu
względnego

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

-masa zredukowana

Ruch w polu siły centralnej a zagadnienie dwóch ciał



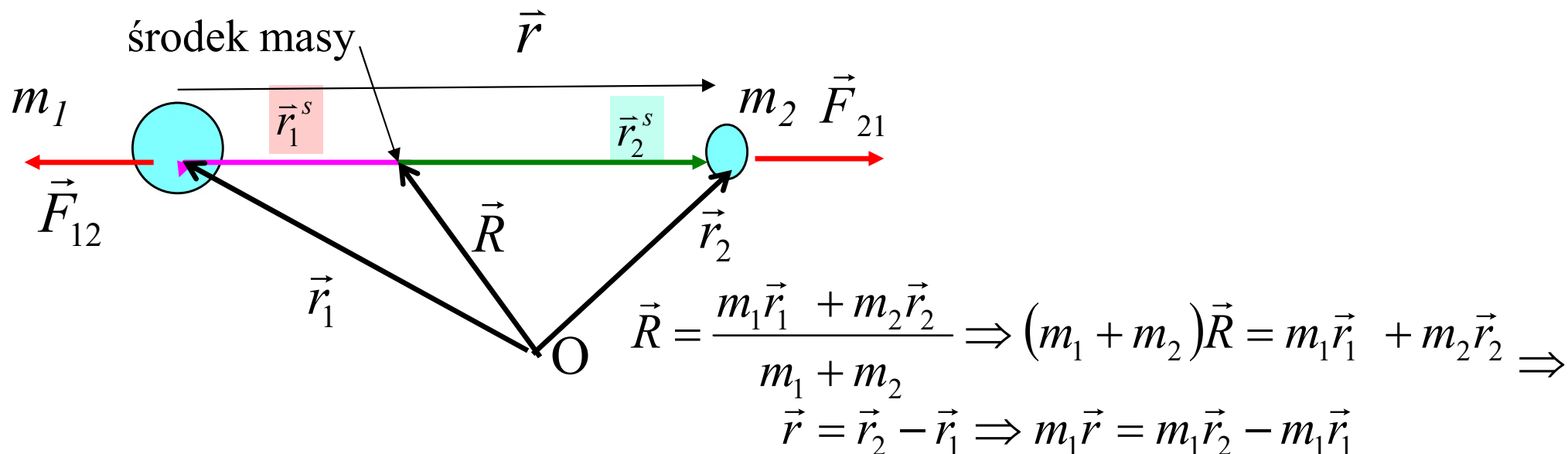
Równanie ruchu
względnego

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

-masa zredukowana

- 1) Równanie powyższe opisuje ruch ciała 2 w układzie o początku w miejscu położenia ciała 1. Układ ten nie jest układem inercyjnym, gdyż przyspieszenie ciała 1 jest w ogólności różne od zera.
- 2) Równanie to ma taką postać jak równanie opisujące ruch hipotetycznego ciała o masie zredukowanej μ w układzie inercyjnym pod wpływem siły centralnej skierowanej stale w kierunku początku układu współrzędnych (centrum siły) (gdy $f(r) < 0$) lub kierunku przeciwnym (gdy $f(r) > 0$)
- 3) Znajomość ruchu ciała o masie zredukowanej pozwala na określenie zależności od czasu wektorów $\vec{r}_1^s$ oraz $\vec{r}_2^s$ określających położenie obu ciał w układzie o początku w środku masy



Dodając równania otrzymane stronami

$$(m_1 + m_2) \vec{R} + m_1 \vec{r} = (m_1 + m_2) \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r} = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

W układzie o początku
w środku masy

$$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{r}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Gdy $m_1 \gg m_2$ to $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2$ oraz $\vec{r}_2^s \approx \vec{r}$ $\vec{r}_1^s \approx \vec{0}$

$m_2 \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ Równanie opisuje ruch ciała 2 pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku nieruchomego centrum siły położonego w miejscu położenia ciała 1 lub w kierunku przeciwnym

Moment pędu w zagadnieniu dwóch ciał

Moment pędu w układzie o początku w środku masy

$$\begin{aligned}\vec{L}^s &= \vec{r}_1^s \times m_1 \dot{\vec{r}}_1^s + \vec{r}_2^s \times m_2 \dot{\vec{r}}_2^s = \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times m_1 \dot{\vec{r}}_1^s + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \times m_2 \dot{\vec{r}}_2^s = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}}_2^s - \dot{\vec{r}}_1^s) = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} \Rightarrow \boxed{\vec{L}^s = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}}\end{aligned}$$

$\dot{\vec{r}}$ -prędkość

hipotetycznego ciała o masie zredukowanej (prędkość w ruchu względnym)

Moment ten jest stałą ruchu $\boxed{\vec{L}^s = const}$ gdyż

$$\dot{\vec{L}}^s = \dot{\vec{r}} \times \mu \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} f(r) = 0 \Rightarrow \vec{L}^s = const$$

$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

Wniosek ten byłby słuszny

również wtedy gdyby

$$f(r) \rightarrow f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

Niezależność od czasu momentu pędu wiąże się z tym iż siły wewnętrzne działające w układzie są siłami centralnymi oraz brak jest sił zewnętrznych wywieranych na ciała w układzie przez ciała spoza układu

$\vec{L}^s = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = const \longrightarrow$ Wektory $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ leżą w stałej płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}^s$

$$\vec{r}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2^s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \quad \vec{r}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1^s = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \longrightarrow$$

Ruch względny obu ciał jest ruchem płaskim odbywającym się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wektora wypadkowego momentu pędu układu złożonego z tych ciał określonego w układzie środka masy.

Do opisu ruchu w tej płaszczyźnie można wprowadzić dwuwymiarowy układ biegunowy.

Układ biegunowy

Do opisu ruchu w tej płaszczyźnie $z=\text{const}$ można wprowadzić dwuwymiarowy układ biegunowy. Współrzędnymi w tym układzie są wielkości r oraz φ . Zachodzą relacje

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

Wektor wodzący

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

Prędkość

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Składowa radialna

$$v_r = \dot{r}$$

Składowa transwersalna

$$v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

Przyspieszenie

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Składowa radialna

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

Składowa transwersalna

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

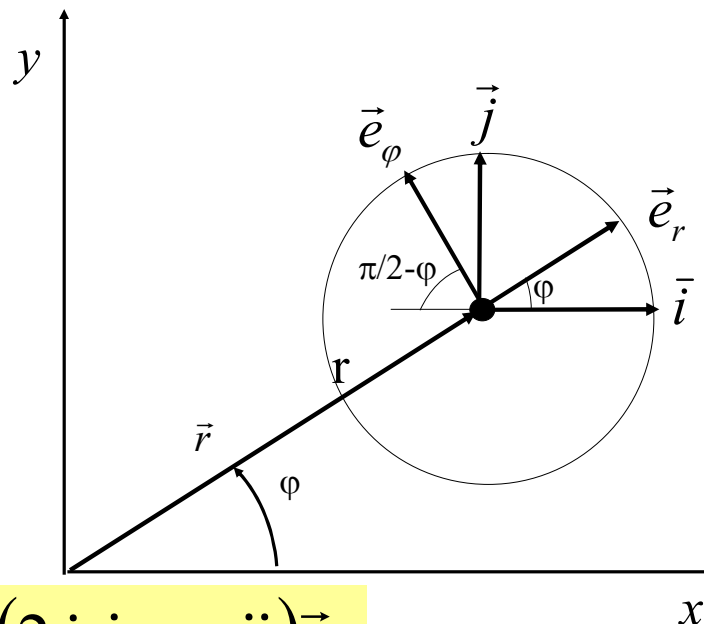
Moment pędu ciała o masie m

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

Jest on prostopadły do płaszczyzny w której odbywa się ruch czyli jest równoległy do osi Oz

Operator gradientu

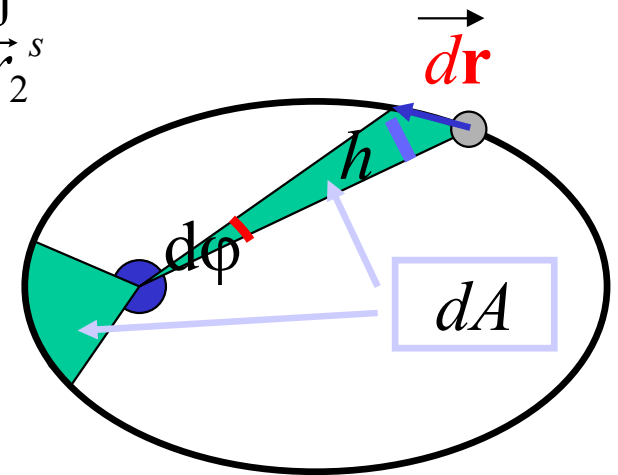
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$



●

$$\vec{L}^s = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \mu r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z = L_z^s \vec{e}_z \Rightarrow L_z^s = \mu r^2 \dot{\phi}$$

Ze stałości momentu pędu wynika stałość prędkości polowej określającej szybkość z jaką wektor $\vec{r}$ jak i wektory $\vec{r}_1^s, \vec{r}_2^s$ zakreślają pole w trakcie ruchu. Prawo to w odniesieniu do ruchu planet nosi nazwę II Prawa Keplera



II prawo Keplera

Dla ciała o masie zredukowanej zachodzi w szczególności

Prędkość
polowa

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{\frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt} = \frac{\frac{1}{2} rh}{dt} \approx \frac{\frac{1}{2} rr |d\phi|}{dt} = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\phi}| = \frac{|L_z^s|}{2\mu} = \frac{L^s}{2\mu} = const$$

Energia w zagadnieniu dwóch ciał

Energia kinetyczna w układzie środka masy

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{r}}_1^s)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{r}}_2^s)^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (m_2 + m_1) \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s$$

Energia potencjalna (potencjał V)

W układzie biegunowym w płaszczyźnie ruchu $\vec{r} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = f(r) \vec{e}_r \Rightarrow F_r = f(r), F_\varphi = 0$$

$$\vec{F} = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \Rightarrow F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, F_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

A zatem

potencjał zależy tylko od współrzędnej radialnej $V=V(r)$ i jego wartość można określić z dokładnością do stałej z równania

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int f(r) dr$$

Można pokazać iż $\vec{F}_1 = -\text{grad}_1 V = \text{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}_{12}$ $\vec{r} = \vec{r}_2^s - \vec{r}_1^s$

$$\vec{F}_2 = -\text{grad}_2 V = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}_{21}$$

Wprowadzenie potencjału nie było by możliwe gdyby $f(r) \rightarrow f(\vec{r}) = f(r, \varphi)$

Energia całkowita w układzie środka masy

$$E = T + V = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

V -potencjał

$$\frac{dE}{dt} = \mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{dV}{dr} \dot{r} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\vec{r}} - f(r) \dot{r} = f(r) \vec{e}_r \cdot \vec{v} - f(r) \dot{r} = f(r) v_r - f(r) \dot{r}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

W układzie biegunowym mamy

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \dot{r} \quad v_\phi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\phi = r \dot{\phi}$$

A zatem $\frac{dE}{dt} = f(r) v_r - f(r) \dot{r} = f(r) \dot{r} - f(r) \dot{r} = 0 \Rightarrow E = \text{const}$

Energia ta jest stałą ruchu co wynika z faktu iż wszystkie siły działające w układzie są potencjalne, a potencjał nie zależy jawnie od czasu

Energie tą można zapisać w postaci

$$L_z^{\text{ozn.}} = L_z = \mu r^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2} (v_r^2 + v_\phi^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r)$$

$$L = |\vec{L}| = |L_z|$$

gdzie

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

Wzór jak dla ciała o masie μ poruszającego w przestrzeni jednowymiarowej w efektywnym potencjale V_{ef}

Jakościowa analiza ruchu względnego w oparciu o całki energii E i momentu pędu L w ruchu względnym

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r)$$

gdzie potencjał efektywny

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$L = |\vec{L}| = |L_z|$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = E - V_{ef}(r) \geq 0$$

Warunek na dozwolone wartości r o postaci zależnej od postaci potencjału efektywnego

$$\dot{r} = 0 \leftrightarrow E - V_{ef}(r) = 0$$

Równanie określa granice obszarów, w których może odbywać się ruch

W punktach w których $\dot{r} = 0$ ciało o masie zredukowanej μ jak też ciała o masach m_1 i m_2 w ogólności nie spoczywają gdyż w przypadku gdy $L \neq 0$ to składowa transwersalna prędkości

$$v_\phi = r\dot{\phi} = r \frac{L_z}{\mu r^2}$$

w tych punktach w ogólności nie zeruje się

Przykład: Analiza potencjału efektywnego dla siły przyciągającej

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0) \quad \text{gdy } L \neq 0$$

(siła grawitacyjna lub elektrostatyczna między ładunkami o przeciwnych znakach)

Wyznaczenie potencjału:

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \quad \longrightarrow \quad V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Wyznaczenie potencjału efektywnego:

$$V_{ef}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Cechy analizowanego potencjału efektywnego

człon $-\frac{\alpha}{r}$ dominuje dla dużych r $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r) = 0$

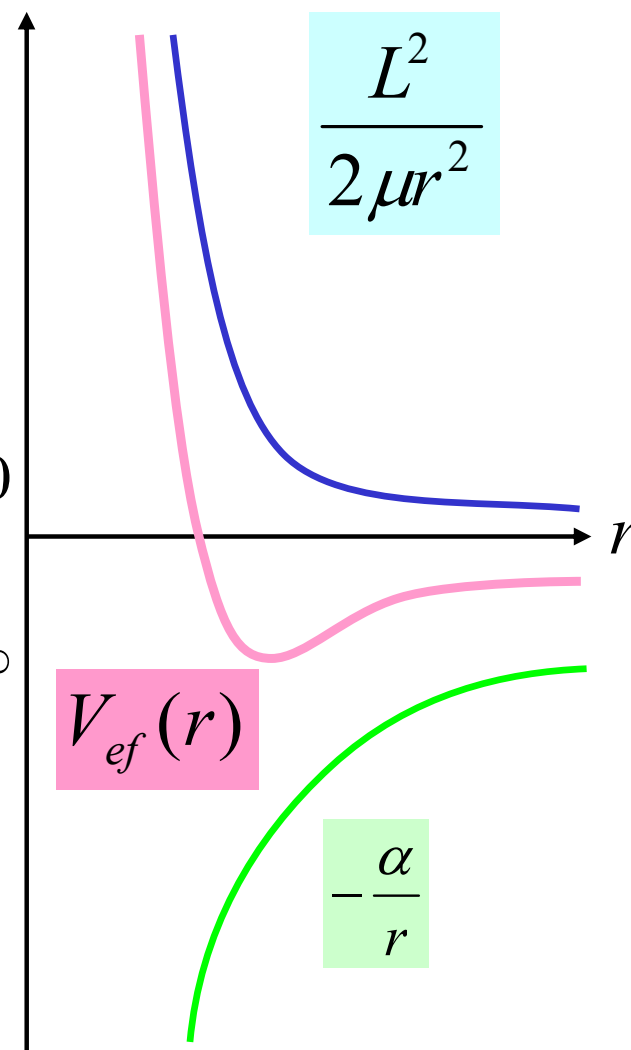
człon $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ dominuje dla małych r $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \infty$

pośrodku jama potencjału

Podobny charakter ma potencjał efektywny dla siły przyciągającej $f(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta} \quad (\alpha > 0)$

gdy $1 < \beta < 3$ (potencjał

$$V(r) = -\frac{1}{(\beta-1)} \frac{\alpha}{r^{\beta-1}}$$

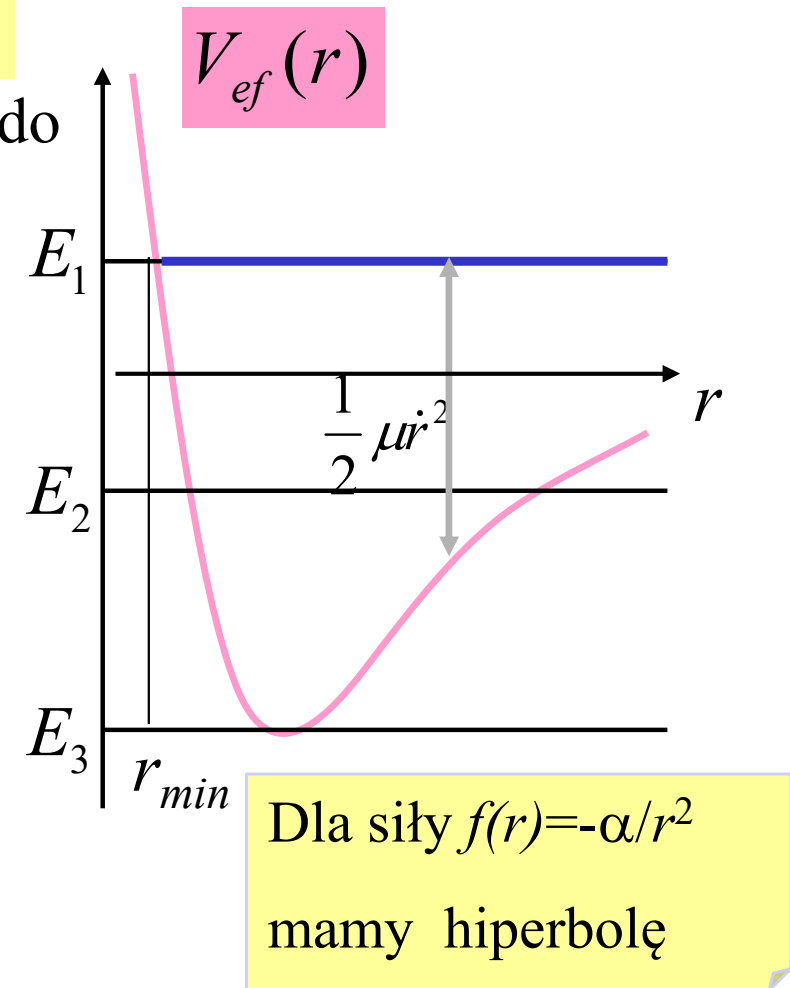
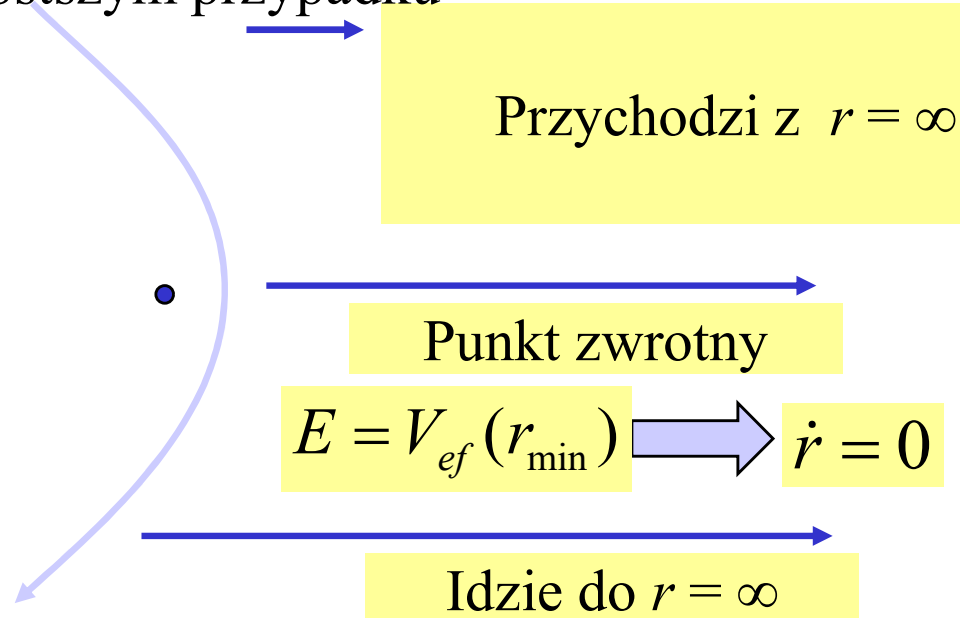


Zależność charakteru ruchu względnego od energii w układzie środka masy E dla siły przyciągającej z „jamą potencjału”

1) Gdy $E = E_1 > \lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r)$ to ruch ciała o masie zredukowanej

nieograniczony $r \geq r_{\min}$ gdzie $E_1 = V_{ef}(r_{\min})$

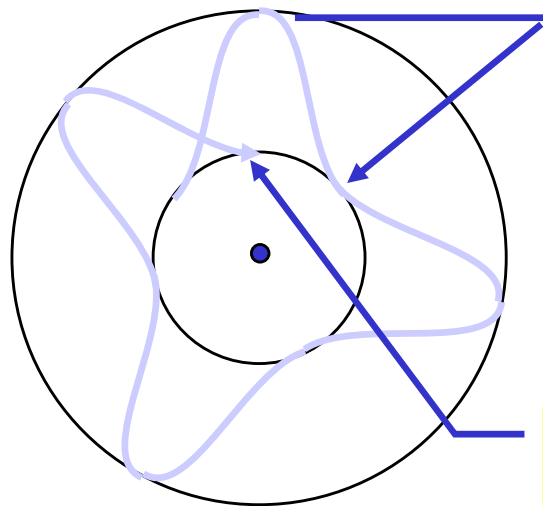
Ciało o masie zredukowanej μ może oddalić się do nieskończoności (odległość między ciałami o masach m_1 i m_2 może stać się nieskończona)
W najprostszym przypadku



Dla przypadku niektórych sił w pewnych warunkach ciało o masie μ przed oddaleniem się do ∞ może kilka razy okrążyć centrum siły np. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$ gdy $\frac{15L^2}{16\mu} < \alpha < \frac{L^2}{\mu}$
(dla siły tej nie ma jamy potencjału ale również gdy $\alpha < \frac{L^2}{\mu}$ to $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \infty$)

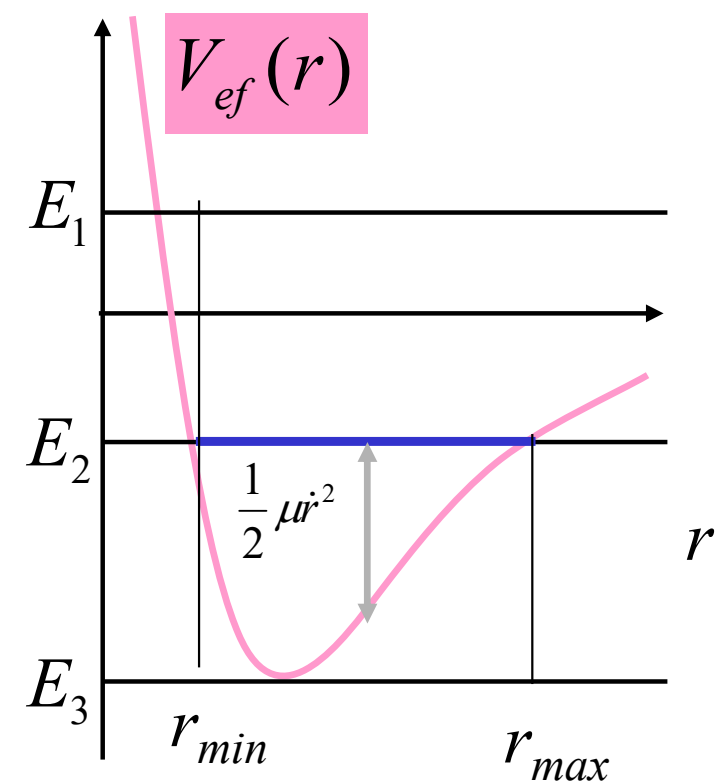
2) Gdy $E = E_2 = V_{ef}(r_{min}) = V_{ef}(r_{max}) < \lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r)$

ruch ciała o masie zredukowanej μ
zachodzi pomiędzy dwoma okręgami
o promieniach r_{min} i r_{max}



Ruch pomiędzy
okręgami o dwóch
promieniach

Orbita może być otwarta



$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(L_z / r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr$$

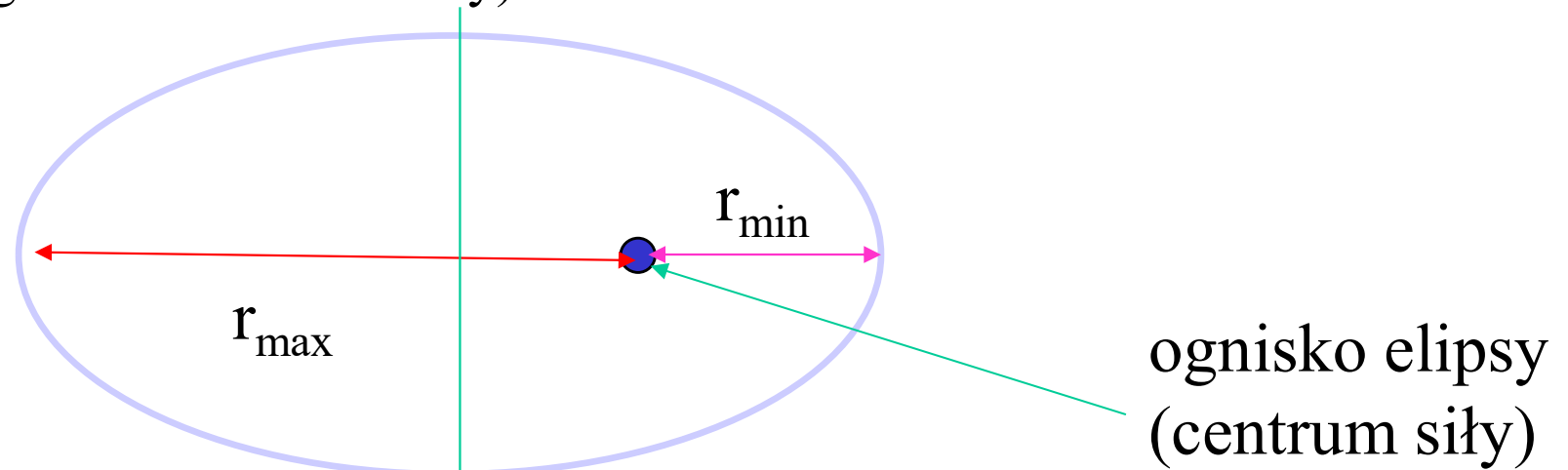
Orbita jest zamknięta gdy $2\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m}$ n, m -liczby całkowite

W ogólnym przypadku orbita jest zamknięta tylko dla odpowiednio
dobranych energii E i momentu pędu L czyli dla szczególnych
warunków początkowych ruchu

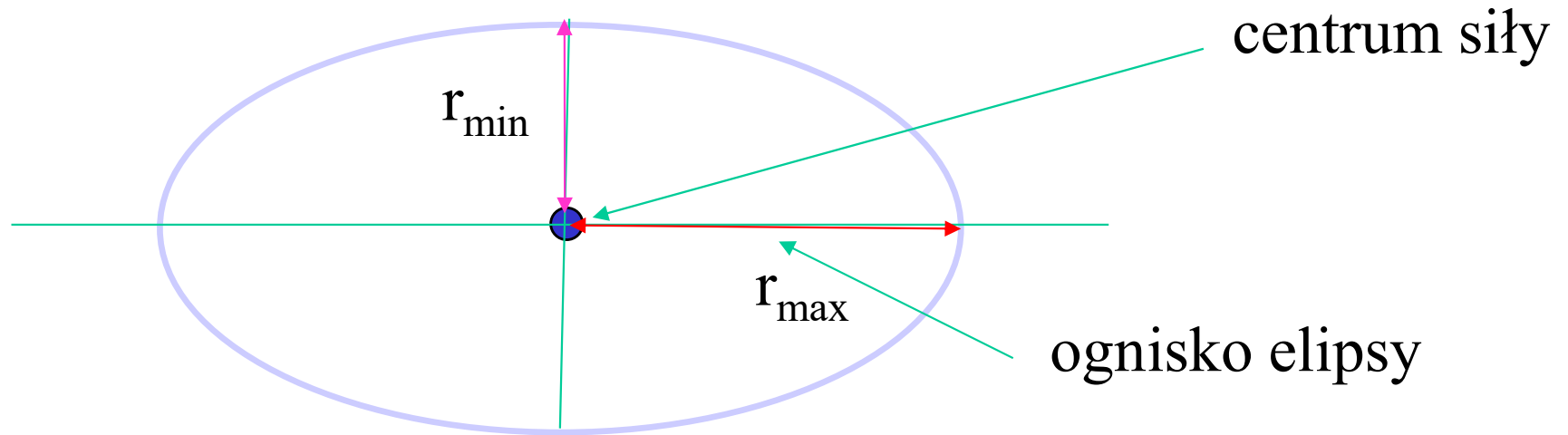
Jednakże sile $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ odpowiada **zawsze** (niezależnie od konkretnych wartości

E i L) orbita zamknięta i w tym przypadku mamy zawsze $\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(L_z / r^2)}{\sqrt{2\mu(E - V_{ef}(r))}} dr = \pi$

(torem elipsa o ognisku w centrum siły)

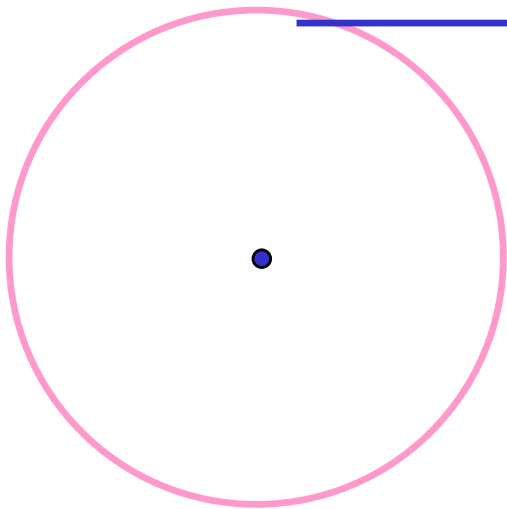


Dygresja Podobna sytuacja ma miejsce wówczas gdy $f(r) = -kr$ ($V(r) = kr^2/2$) gdy mamy $\Delta\varphi = \pi / 2$ (torem jest elipsa z centrum siły na przecięciu osi symetrii elipsy). W tym przypadku $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r) = \infty$



3) Gdy $E = E_3 = V_{ef}(r_0) < V_{ef}(r \neq r_0)$

to ruch ciała o masie zredukowanej μ zachodzi po okręgu o promieniu r_0 (odległość między ciałami o masach m_1 i m_2 pozostaje stała i równa r_0)

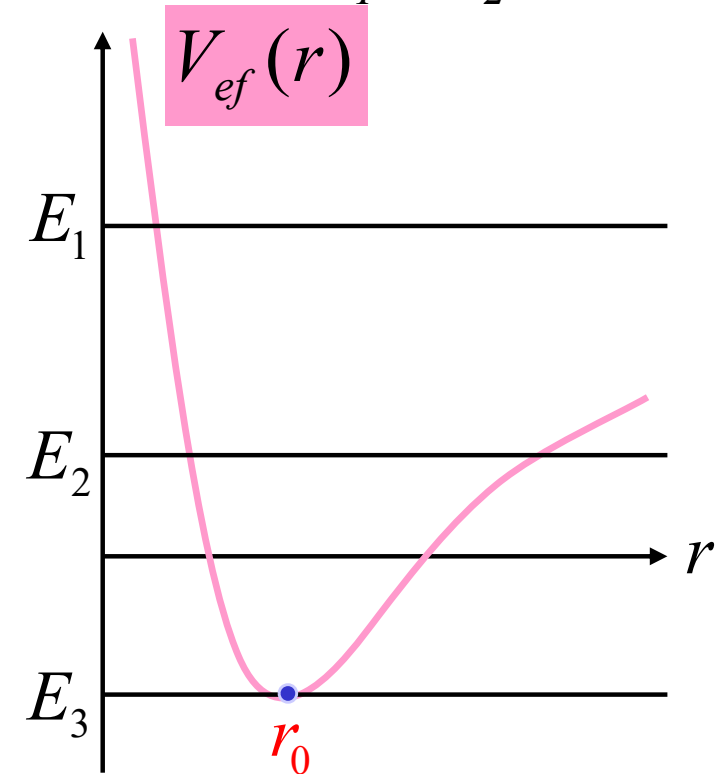


Ruch po okręgu

$$E = V_{ef}(r_0)$$

$$\dot{r} = 0$$

$$r = \text{const} = r_0$$



Zależność charakteru ruchu względnego od energii w układzie środka masy E dla siły przyciągającej typu $f(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$ z $\beta > 3$

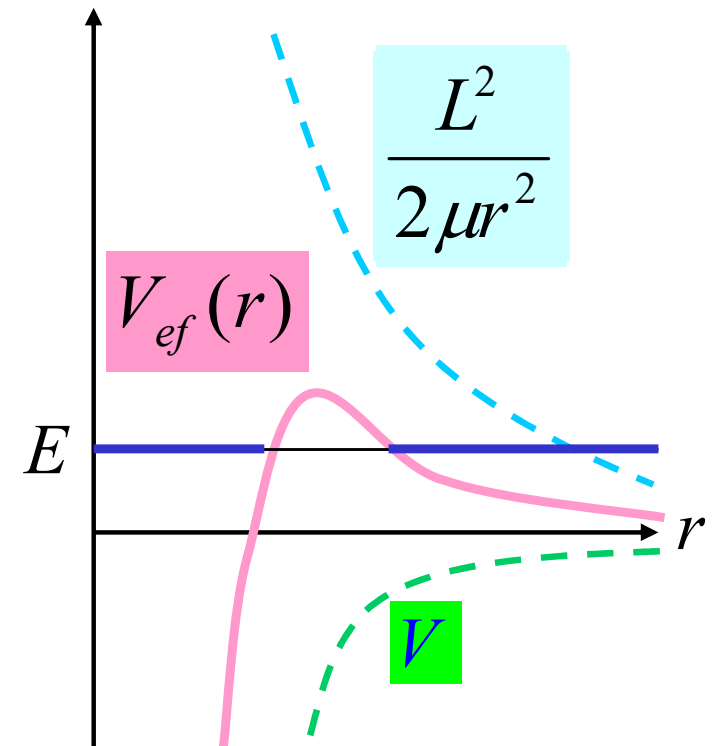
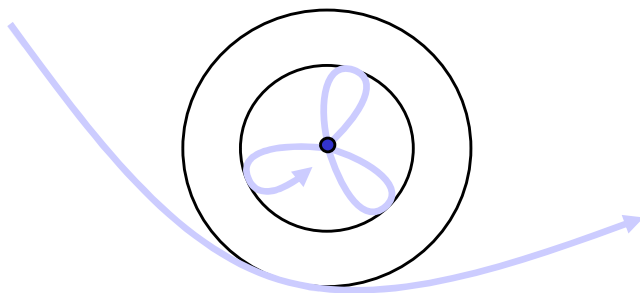
Np. gdy $f(r) = -\frac{\alpha}{r^4}$ $\rightarrow$ $V(r) = -\frac{1}{3} \frac{\alpha}{r^3}$ $\rightarrow$ $V_{ef}(r) = -\frac{\alpha}{3r^3} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

człon $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ dominuje dla dużych r $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef}(r) = 0$

człon $-\frac{\alpha}{3r^3}$ dominuje dla małych r $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = -\infty$

pośrodku garb potencjału

Ciało o masie zredukowanej i energii E pokazanej na rysunku może oddalić się na nieskończoną odległość od centrum siły lub ruch jego jest ograniczony w przestrzeni w zależności od początkowej wartości r



Spadek na centrum siły gdy $L \neq 0$ jest możliwy w potencjale $V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ gdy $n > 2$
 lub $V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ gdy $\alpha \geq \frac{L^2}{2\mu}$

Wyznaczanie zależności $r(t)$ oraz $\varphi(t)$ przy wykorzystaniu całki energii E oraz momentu pędu L

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}(r) \Rightarrow \dot{r}(r) = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))} \Rightarrow dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}}$$

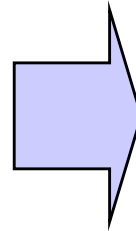
$V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$ Wyrażenie to wiąże $\dot{r}$ z r w ruchu o określonym E i L .

$$L = |\vec{L}| = |L_z|$$

Stanowi także równanie różniczkowe 1 rzędu pozwalające na określenie $r(t)$

Zależność czasowa

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{ef}(r))}} + const$$



$$t(r) \rightarrow r(t)$$

$$r(t = t_0)$$

$$L_z = \mu r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{\mu r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{L_z}{\mu r^2} dt \Rightarrow \varphi = \int \frac{L_z}{\mu r^2} dt + const$$

$$\varphi(t = t_0)$$

$$\varphi(t)$$

Zwykle wyniki nie dają się wyrazić przy pomocy funkcji elementarnych

$$\Rightarrow dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}}$$

$$d\varphi = \frac{L_z}{\mu r^2} dt$$

$L = |\vec{L}| = |L_z| \quad V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$

Równanie toru

$$d\varphi = \frac{\pm L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}}$$

$$\varphi = \int \frac{\pm \frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}} dr + const$$

$$\varphi(r) \rightarrow r(\varphi)$$

$r(\varphi = \varphi_0)$

Rozwiązanie wyrażające się przez funkcje elementarne dla $f(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$
 gdy $n=2,3,-1$, przez funkcje eliptyczne dla $n=4,5,7,0,-3,-5$

$$\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\pm \frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{ef}(r))}} dr$$

← Zmiana kąta φ przy zmianie r od $r_{\min}$ do $r_{\max}$

Znając $r(\varphi)$ można próbować wyznaczyć zależność $t(\varphi)$

$$d\varphi = \frac{L_z}{\mu r^2} dt \Rightarrow dt = \frac{\mu r^2}{L_z} d\varphi \Rightarrow t = \int \frac{\mu r^2}{L_z} d\varphi + const$$

$$t(\varphi) \rightarrow \varphi(t)$$

$\varphi(t = t_0)$

Wyznaczanie zależności $r(t)$ oraz $\varphi(t)$ przy wykorzystaniu równania ruchu względnego oraz całki momentu pędu L

Z równania ruchu względnego $\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ otrzymujemy $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

$$\mu(a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi) = f(r) \vec{e}_r$$

$a_\varphi = 0$ $\mu a_r = f(r)$ $\mu(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)$

Wykorzystując całkę momentu pędu $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$ i uwzględniając to iż $L_z^2 = L^2$

otrzymujemy $\mu \left(\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \right) = f(r)$ (*)

Powyższe równanie pozwala na wyznaczenie $r(t)$ w wyniku rozwiązywania równania różniczkowego rzędu II przy znajomości $r, \dot{r}$ w chwili początkowej ruchu ($\dot{r}$ można uzależnić od r, E i L korzystając z całki energii). Znając $r(t)$ zależność $\varphi(t)$ można określić wykorzystując równanie $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$. Obliczenia można dokonać w sposób numeryczny np. zamieniając równanie różniczkowe rzędu drugiego (*) na układ dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego wprowadzając nową zmienną $u = \dot{r}$

Wzór Bineta (uzyskujemy go eliminując w uzyskanym równaniu $\ddot{r}$)

$$\mu \left(\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \right) = f(r)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} \quad \leftarrow \quad -\frac{L_z}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = -r^2 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L_z}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{L_z}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \dot{\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{L_z}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \frac{L_z}{\mu r^2} \quad \leftarrow \quad -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$L_z^2 = L^2$$

$$-\frac{L^2}{\mu r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\} = f(r)$$

Wzór Bineta

1) Wzór Bineta pozwala dla określonego toru ruchu $r=r(\phi)$ wyznaczenie postaci siły centralnej powodującej ten ruch czyli wyznaczenie postaci funkcji $f(r)$.

2) Wzór ten pozwala dla określonej siły $f(r)$ na drodze rozwiązania równania różniczkowego rzędu drugiego na określenie równania toru $r=r(\phi)$ zależnego od dwóch stałych dowolnych, które można uzależnić od $r(\phi=0)$ i $\frac{dr}{d\phi}(\phi=0)$.

Jedną ze stałych można uzależnić od energii i momentu pędu wykorzystując wzór

$$E = \frac{L^2}{2\mu} \left\{ \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} + V(r) \quad \text{wynikający z relacji } E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}(r) \text{ oraz } V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \text{ i } \dot{r} = \frac{L_z}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L_z}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$L_z^2 = L^2$$

Przykładowe trajektorie ciał oddziałujących siłą centralną o potencjale

$$V(r) = -\frac{\alpha}{2r^2}$$

Kształt toru zależy od parametru

$$a = \sqrt{1 - \frac{\alpha\mu}{L^2}}$$

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Tor z rysunku a) odpowiada sile odpychającej, pozostałe sile przyciągającej

$$E > 0, \alpha < 0$$

$$r = \frac{1}{C \cos(a(\varphi - \varphi_0))}$$

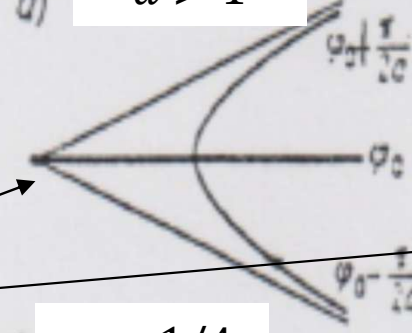
$$E > 0, \alpha > 0$$

$$E < 0, \alpha > 0$$

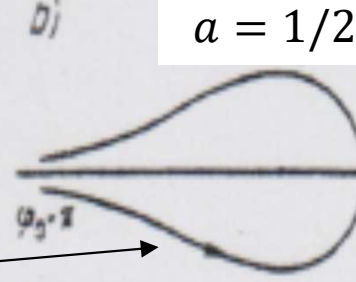
$$r = \frac{1}{C \cosh(b(\varphi - \varphi_0))}$$

$$b^2 = -a^2$$

$$a > 1$$

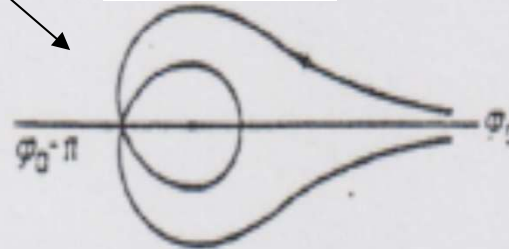


$$a = 1/2$$

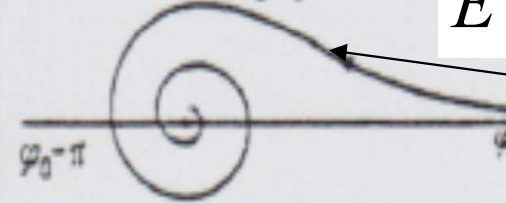


$$E > 0, \alpha > 0$$

$$a = 1/4$$



$$a = 0$$



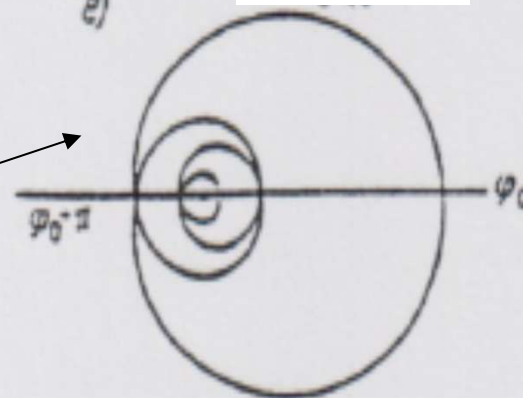
$$E > 0, \alpha > 0$$

$$r = \frac{1}{C(\varphi - \varphi_0)}$$

spirala hiperboliczna

$$a^2 < 0$$

e)



Rysunek nie pokazuje wszystkich możliwych torów ruchu ciał, a tylko przykładowe