MECHANIKA

Michał Wilczyński

Konsultacje:

1) poniedziałki 16:30-17:30 pokój 103 Gmach Fizyki lub poprzez program TEAMS
2) środy 16-17 pokój 103 Gmach Fizyki lub poprzez program TEAMS

Konsultacje poprzez TEAMS w zespole konsultacje (kod **8g5e9wg** *)*

Możliwość indywidualnych konsultacji w terminie uzgodnionym poprzez e-mail

Adres e-mail: michal.wilczynski@pw.edu.pl

Adres strony internetowej:
http://www.if.pw.edu.pl/~wilczyns

ORIENTACYJNY PROGRAM WYKŁADU z MECHANIKI

1)Przypomnienie podstawowych równań klasycznej mechaniki. Krzywoliniowe ortogonalne układy współrzędnych: cylindryczny, biegunowy i sferyczny. Transformacja prędkości i przyspieszenia przy przejściu do obracającego się układu odniesienia. Potencjał i zachowanie energii mechanicznej. Pęd i momentu pędu dla układu punktów materialnych. Związki pomiędzy wielkościami fizycznymi w układzie inercjalnym i układzie środka masy.
2)Zagadnienie dwóch ciał oddziałujących siłą centralną. Równanie ruchu względnego. Całka energii i momentu pędu. Potencjał efektywny. Wzór Bineta. Ruch pod wpływem siły o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości ciał. Wektor Runge-Lenza.
3) Więzy. Przesunięcia wirtualne. Zasada d'Alemberta dla punktu materialnego i układu punktów materialnych. Siła reakcji więzów. Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju. Zasada Lagrange'a (prac wirtualnych). Przykłady ilustrujące zastosowanie zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju.
4)Współrzędne uogólnione, Siła uogólniona, pęd uogólniony. Funkcja Lagrange'a. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Współrzędne cykliczne. Całki pierwsze równań Lagrange'a II rodzaju. Potencjał uogólniony dla cząstki w polu elektromagnetycznym. Przykłady ilustrujące równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Przybliżona analiza równań ruchu w pobliżu położenia równowagi.

5) Małe drgania układu o wielu stopniach swobody. Współrzędne normalne.

6) Wariacja funkcji i wariacja całki bez czasu i z czasem. Równania Eulera-Lagrange'a dla zagadnienia wariacyjnego. Przykłady zasad wariacyjnych (w tym zasada najmniejszego działania Hamiltona). Twierdzenie Noether; związek zasady całek ruchu z symetrią układu.

7) Funkcja Hamiltona i równania kanoniczne Hamiltona. Przykłady. Przestrzeń fazowa. Nawiasy Poissona. Twierdzenie Liouville'a. Transformacje kanoniczne (funkcja tworząca, własności transformacji kanonicznych i ich zastosowania).

8) Równanie Hamiltona-Jacobiego. Separacja zmiennych w równaniu Hamiltona-Jacobiego. Przykłady całkowania równania Hamiltona-Jacobiego. *Równania H-J jako podstawa obliczeń przybliżonych. Zmienne kat–działanie, wyznaczanie częstości drgań układów okresowych.*

9) Dynamika bryły sztywnej. Tensor momentu bezwładności, moment pędu i energia kinetyczna bryły w układzie związanym z bryłą i układzie nieruchomym. Równania ruchu bryły w układzie związanym z bryłą-równania Eulera. Opis ruchu bryły w układzie nieruchomym. Katy Eulera. Zasada d’Alemberta i równania Lagrange’a II rodzaju dla bryły sztywnej. Opis ruchu swobodnego bąka symetrycznego. Wpływ siły ciężkości na ruch bąka.

10) Rozpraszanie cząstek, Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie. Funkcje Lagrange’a i Hamiltona w mechanice relatywistycznej.

Program wykładu oraz kolejność realizacji tematów może ulec modyfikacjom.

<u>LITERATURA</u>

Podręczniki:

1) W. Rubinowicz, W. Królikowski, Mechanika teoretyczna, PWN 1998.
2) J. R. Taylor, Mechanika klasyczna tom 1 i 2 , PWN 2006. (małe drgania, bryła sztywna, przykłady)
3) M. Wierzbicki, Mechanika klasyczna w zadaniach, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2010. (współrzędne krzywoliniowe, przykłady)
4) G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN 1975. (twierdzenie Noether)
5) K. Stefański, Wstęp do mechaniki klasycznej, PWN 1999.
6) I.I. Olchowski, mechanika teoretyczna, PWN 1978 (przykłady).
7) L.D. Landau, J.M. Lifszyc, Mechanika, PWN 2007.
8) H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Classical mechanics, Addisson Wesley 1980.
9) W. Greiner, Classical mechanics, systems of particles and Hamiltonian dynamics, Springer 2010 – dostępna wersja internetowa książki w bibliotece
10) D. Morin, Classical mechanics with problems and solutions, Cambridge University Press 2008.
11) R.D. Gregory, Classical mechanics, Cambridge University Press 2006.

Zbiory zadań:

1) E. Karaśkiewicz, Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej, PWN 1959.
2) Zadania umieszczone w podręcznikach 1,**2,3,5,6**,7,9,10,11
3) G.L. Kotkin, W.G. Serbo, Zbiór zadań z mechaniki klasycznej, WNT 1972.

Regulamin-Zasady zaliczenia przedmiotu

1) Przedmiot obejmuje 30 h wykładu i 30 h ćwiczeń rachunkowych.
2) Obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa. Dopuszczona jest jedna nieobecność nieusprawiedliwiona.
3) W ramach ćwiczeń zorganizowane będą 2 kolokwia w semestrze w trybie stacjonarnym, za każde można uzyskać do 20 punktów. W przypadku braku możliwości zorganizowania kolokwium w formie stacjonarnej w ramach kolokwium studenci będą proszeni o rozwiązanie w ciągu 90 minut 3-4 zadań i przesłanie terminowe skanów/fotografii ich rozwiązań poprzez program TEAMS lub e-mail.
4) Istnieje możliwość poprawy jednego kolokwium w terminie ustalonym dla grupy studenckiej poza czasem regularnych zajęć w końcu semestru lub na początku sesji egzaminacyjnej.
5) Dodatkowo łącznie do 20 punktów, a w szczególnych przypadkach do 25 punktów, będzie można uzyskać za rozwiązanie zadań domowych i aktywność w trakcie ćwiczeń.
6) Egzamin z przedmiotu będzie miał charakter pisemny organizowany na terenie Politechniki W przypadku braku możliwości zorganizowania egzaminu na Politechnice będzie to egzamin w zasadzie ustny realizowany poprzez program TEAMS. Za egzamin będzie można uzyskać maksymalnie 40 punktów.
7) Przed wystawieniem oceny z kolokwiów, zadań domowych i egzaminu istnieje możliwość przeprowadzenia dodatkowej rozmowy ustnej. W czasie kolokwiów i egzaminu nie można korzystać z materiałów nie udostępnionych przez prowadzącego.
8) Warunkiem koniecznym zaliczenia przedmiotu jest otrzymanie z ćwiczeń co najmniej 30 punktów oraz uzyskanie na egzaminie co najmniej połowy możliwych do uzyskania punktów.
9) Ocena z przedmiotu jest oceną łączną, wystawianą na podstawie sumy punktów z ćwiczeń i egzaminu według następującej skali: 0-50 pkt – 2.0, 51-60 pkt. - 3.0, 61-70 pkt. – 3.5, 71-80 pkt. – 4.0, 81-90 pkt. – 4.5, 91 pkt. i więcej – 5.0.

Przypomnienie podstawowych praw mechaniki punktu materialnego

II zasada dynamiki Newtona

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

(obowiązuje w inercjalnych układach odniesienia gdy $|\vec{v}| << c$
c- wartość prędkości światła)

m-masa punktu materialnego, $\vec{F}$ -wypadkowa siła działająca na punkt materialny

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ -przyspieszenie punktu materialnego,

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ -prędkość punktu materialnego, $\vec{r}$ -wektor wodzący punktu materialnego

Równanie ruchu

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Stosowana konwencja oznaczenia pochodnej po czasie

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \overset{ozn.}{=} \dot{\vec{A}} \qquad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \overset{ozn.}{=} \ddot{\vec{A}} \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} \qquad m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -wersory

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{matrix} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{matrix}$$

równania różniczkowe rzędu drugiego

Związek pędu z siłą wypadkową $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

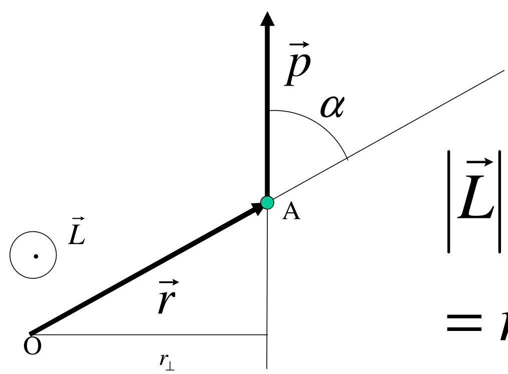
$\vec{p} = m\vec{v}$ -pęd ciała

Relacja zgodna z II zasadą dynamiki Newtona gdy *m*=const

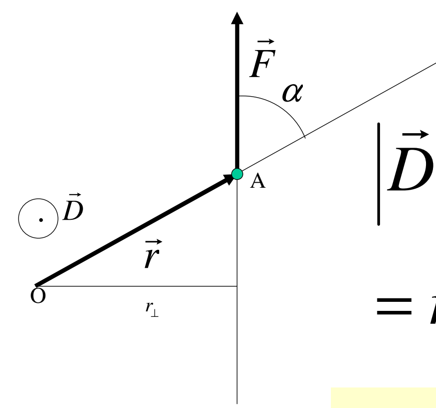
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$$

Moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Moment siły $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$



$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{p}\right|\sin\alpha = r_\perp\left|\vec{p}\right|$$



$$\left|\vec{D}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\alpha = r_\perp\left|\vec{F}\right|$$

Związek momentu pędu z wypadkowym momentem siły

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}$$

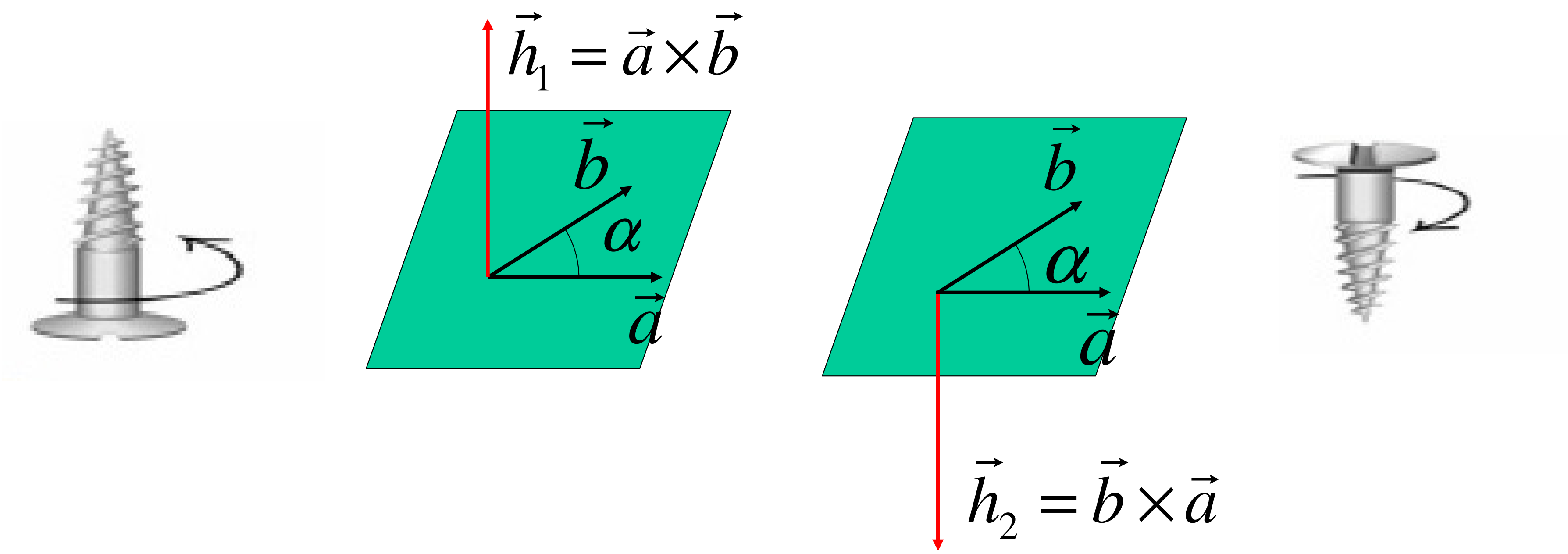
Punkt O nieruchomy w układzie inercjalnym

Zasada zachowania pędu i momentu pędu

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const$$

$$\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Reguła śruby prawoskrętnej



Krzywoliniowe układy współrzędnych

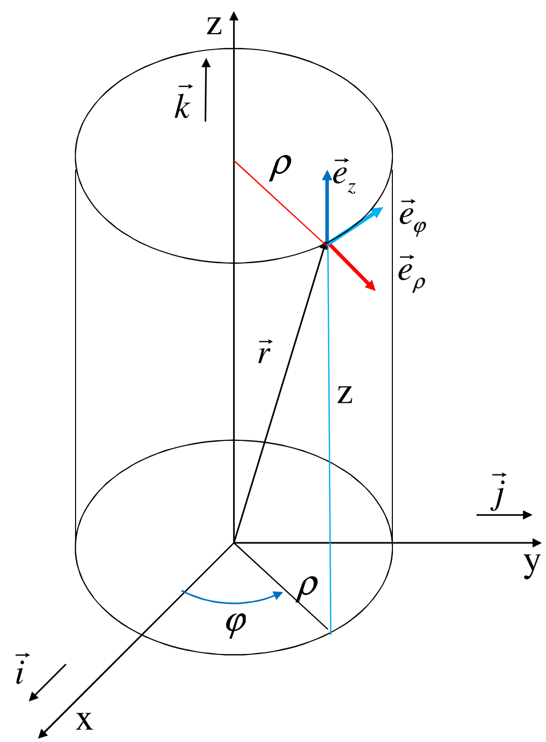
Położenie punktu materialnego w przestrzeni możemy opisywać nie tylko w układzie kartezjańskim lecz także w układach krzywoliniowych (np. cylindrycznym, sferycznym). W przestrzeni 3 DIM do określenia położenia punktu w przestrzeni wykorzystujemy 3 współrzędne q_i (i=1,2,3) przy czym współrzędne kartezjańskie sa funkcjami tych współrzędnych $x = x(q_1, q_2, q_3)$ $y = y(q_1, q_2, q_3)$ $z = z(q_1, q_2, q_3)$

W układzie cylindrycznym $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$

W układzie sferycznym $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$

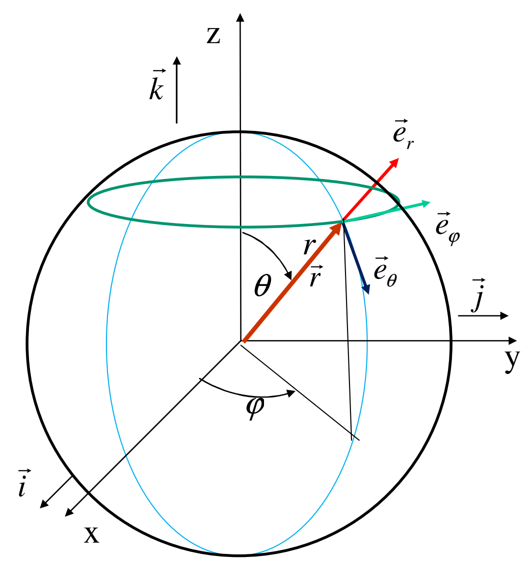
Układ cylindryczny

$$x = \rho \cos(\varphi)$$
$$y = \rho \sin(\varphi)$$
$$z = z$$



Układ sferyczny

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$
$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$
$$z = r \cos(\theta)$$

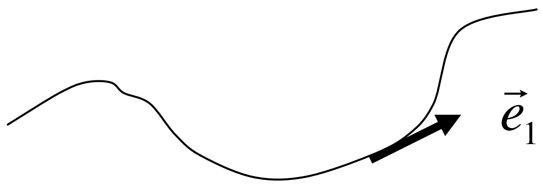


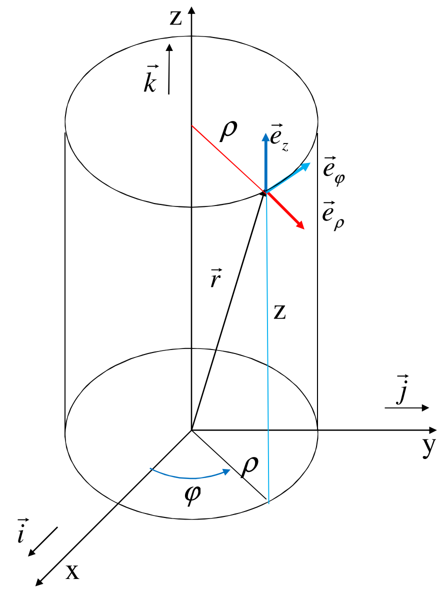
Układy krzywoliniowe-Wersory, Rozkład wektora na składowe

W układzie krzywoliniowym dla każdego punktu przestrzeni wprowadza się 3 lokalne wersory

$\vec{e}_i$ (i=1,2,3).

Wersor $\vec{e}_i$ związany ze współrzędną q_i jest wektorem o długości jednostkowej stycznym do linii przy przesuwaniu się wzdłuż której ulega zmianie wartość tylko współrzędnej q_i





$\vec{e}_1$ $q_{2,}q_3$=const,

Zwrot jego najczęściej wybiera się tak, iż wskazuje on kierunek wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta. W układach ortogonalnych dla każdego punktu zachodzi relacja

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & gdy & i = j \\ 0 & gdy & i \neq j \end{Bmatrix}$$

W przeciwieństwie do wersorów w układzie kartezjańskim $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, które nie zależą od położenia punktu w przestrzeni i w układzie nieruchomym nie zmieniają się w czasie, kierunek wersorów w układach krzywoliniowych zależy od położenia punktu w przestrzeni i ulegają one zmianie w czasie przy przemieszczaniu się punktu w przestrzeni.

Dowolny wektor $\vec{A}$ można przedstawić w postaci kombinacji

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i$$

czyli znaleźć jego składowe A_i w układzie krzywoliniowym.

W układzie kartezjańskim analogiczna relacja przyjmuje postać: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

Iloczyn skalarny wektorów

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left[A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3\right]\cdot\left[B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3\right] = A_1B_1\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1\right) + A_1B_2\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\right) + A_1B_3\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3\right) +$$

$$+ A_2B_1\left(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1\right) + A_2B_2\left(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2\right) + A_2B_3\left(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\right) + A_3B_1\left(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\right) + A_3B_2\left(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2\right) + A_3B_3\left(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\right)$$

$$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Długość wektora A

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Założenie $\quad \vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$

Iloczyn wektorowy wektorów

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3\right)\times\left(B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3\right) =$$

$$= A_1B_1\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_1\right) + A_1A_2\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right) + A_1A_3\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_3\right) +$$

$$+ A_2B_1\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_1\right) + A_2B_2\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_2\right) + A_2B_3\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_3\right) +$$

$$+ A_3B_1\left(\vec{e}_3\times\vec{e}_1\right) + A_3B_2\left(\vec{e}_3\times\vec{e}_2\right) + A_3B_3\left(\vec{e}_3\times\vec{e}_3\right) =$$

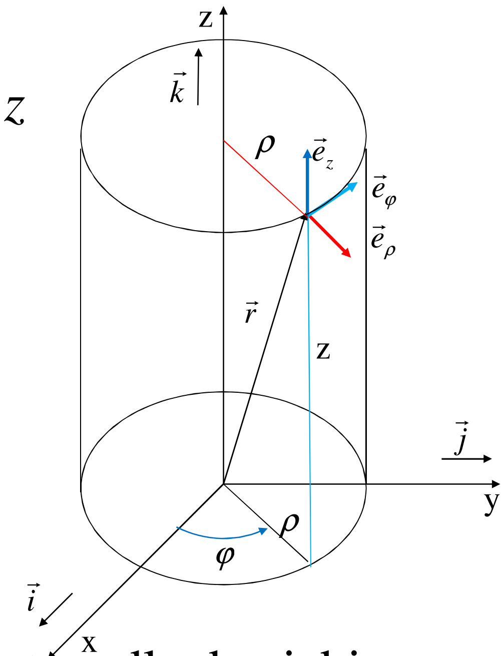
$$= A_1B_1\cdot 0 + A_1B_2\vec{e}_3 - A_1B_3\vec{e}_2 +$$

$$- A_2B_1\vec{e}_3 + A_2B_2\cdot 0 + A_2B_3\vec{e}_1 +$$

$$+ A_3B_1\vec{e}_2 - A_3B_2\vec{e}_1 + A_3B_3\cdot 0 =$$

$$= \left(A_2B_3 - A_3B_2\right)\vec{e}_1 + \left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\vec{e}_2 + \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Układ cylindryczny



Współrzędne krzywoliniowe $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$

Związek między współrzędnymi w układzie kartezjańskim i cylindrycznym

$$x = \rho\cos(\varphi)$$
$$y = \rho\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg(\varphi) = \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Wprowadzamy dla każdego punktu przestrzeni 3 prostopadłe do siebie wersory $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$. Wersor $\vec{e}_i$ jest styczny do linii wzdłuż której zmienia się tylko i-ta współrzędna, a zwrot jego jest taki iż wskazuje kierunek wzdłuż którego współrzędna ta wzrasta . Wersory te spełniają warunki: $\left|\vec{e}_\rho\right| = \left|\vec{e}_\varphi\right| = \left|\vec{e}_z\right| = 1$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0 \qquad \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$$

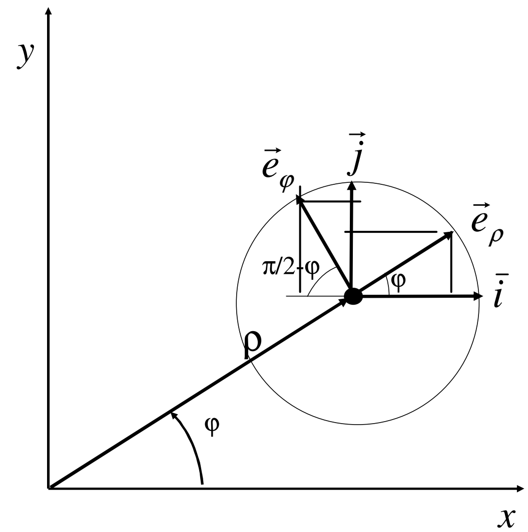
Dowolny wektor można przedstawić w postaci kombinacji $\vec{A} = A_\rho\vec{e}_\rho + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$

Z rysunku widać iż wektor wodzący $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \Rightarrow r_\rho = \rho; r_\varphi = 0; r_z = z$

Wektor prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\right) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}$

gdzie $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

Związek wersorów w układzie cylindrycznym $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$
z wersorami $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ w układzie kartezjańskim



$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

W powyższych wzorach od czasu zależy tylko φ a zatem

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \left[-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}\right]\frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \dot{\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \left[-\cos(\varphi)\vec{i} - \sin(\varphi)\vec{j}\right]\frac{d\varphi}{dt} = -\vec{e}_\rho \dot{\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

A zatem $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_\rho = \dot{\rho}$ składowa radialna prędkości

$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$ składowa transwersalna prędkości

$v_z = \dot{z}$

Wektor przyspieszenia

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\dot{z}\vec{e}_z\right)=\ddot{\rho}\vec{e}_\rho+\dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}+\ddot{z}\vec{e}_z+\dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

gdzie $\ddot{\rho}=\frac{d^2\rho}{dt^2}$ $\quad\ddot{\varphi}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\quad\ddot{z}=\frac{d^2z}{dt^2}$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}=\vec{e}_\varphi\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}=-\vec{e}_\rho\dot{\varphi}$$

$$\longrightarrow\quad\vec{a}=\ddot{\rho}\vec{e}_\rho+\dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi-\rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho+\ddot{z}\vec{e}_z=$$

$$=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi+\ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a}=a_\rho\vec{e}_\rho+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_z\vec{e}_z=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi+\ddot{z}\vec{e}_z\Rightarrow$$

$\Rightarrow a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$ składowa radialna przyspieszenia

$a_\varphi=2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}$ składowa transwersalna przyspieszenia

$a_z=\ddot{z}$

Określenie składowych gradientu funkcji skalarnej $h(\rho,\varphi,z)$ w układzie cylindrycznym

$$grad\ h=\left[grad\ h\right]_\rho\vec{e}_\rho+\left[grad\ h\right]_\varphi\vec{e}_\varphi+\left[grad\ h\right]_z\vec{e}_z$$

$$\left[grad\ h\right]_\rho=\frac{\partial h}{\partial\rho}\qquad\left[grad\ h\right]_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial\varphi}\qquad\left[grad\ h\right]_z=\frac{\partial h}{\partial z}$$

Dowód: Infinitezymalnie mały przyrost dh funkcji h związany z przyrostami $d\rho, d\varphi, dz$ współrzędnych ρ, φ, z

$$\boxed{dh = \frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial h}{\partial z} dz}$$

$$dh = gradh \cdot d\vec{r} = \left[(gradh)_\rho \vec{e}_\rho + (gradh)_\varphi \vec{e}_\varphi + (gradh)_z \vec{e}_z \right] \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \right]$$

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}$ – Wektor równoległy do wersora $\vec{e}_\rho \Rightarrow \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| \vec{e}_\rho$

$$dh = \left[(gradh)_\rho \vec{e}_\rho + (gradh)_\varphi \vec{e}_\varphi + (gradh)_z \vec{e}_z \right] \cdot \left[\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| d\rho \vec{e}_\rho + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| d\varphi \vec{e}_\varphi + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| dz \vec{e}_z \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{dh = (gradh)_\rho \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| d\rho + (gradh)_\varphi \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| d\varphi + (gradh)_z \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| dz}$$

Z porównania wzorów w ramkach

$$[grad\ h]_\rho = \frac{\partial h}{\partial \rho} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \frac{\partial h}{\partial \rho} / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \frac{\partial h}{\partial \rho} / \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 0} = \frac{\partial h}{\partial \rho}$$

$$[grad\ h]_\varphi = \frac{\partial h}{\partial \varphi} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \frac{\partial h}{\partial \varphi} / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{\partial h}{\partial \varphi} / \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi + 0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi}$$

$$[grad\ h]_z = \frac{\partial h}{\partial z} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = \frac{\partial h}{\partial z} / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial h}{\partial z} / \sqrt{0 + 0 + 1} = \frac{\partial h}{\partial z}$$

Moment pędu ciała o masie *m* w układzie kartezjańskim i cylindrycznym

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{v})=m\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ r_x & r_y & r_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}=m\left[(y\dot{z}-\dot{y}z)\vec{i}+(z\dot{x}-x\dot{z})\vec{j}+(x\dot{y}-y\dot{x})\vec{k}\right]$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{v})=m\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ r_\rho & r_\varphi & r_z\\ v_\rho & v_\varphi & v_z\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \rho & 0 & z\\ \dot{\rho} & \rho\dot{\varphi} & \dot{z}\end{vmatrix}=-m\rho z\dot{\varphi}\vec{e}_\rho+m(\dot{\rho}z-\rho\dot{z})\vec{e}_\varphi+m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho\times\vec{e}_\varphi=\vec{e}_z\qquad \vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z=\vec{e}_\rho\qquad \vec{e}_z\times\vec{e}_\rho=\vec{e}_\varphi$$

Prędkość polowa

$$\vec{\sigma}=\frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v})=\frac{\vec{L}}{2m}=\frac{1}{2}\left[-\rho z\dot{\varphi}\vec{e}_\rho+(\dot{\rho}z-\rho\dot{z})\vec{e}_\varphi+\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z\right]$$

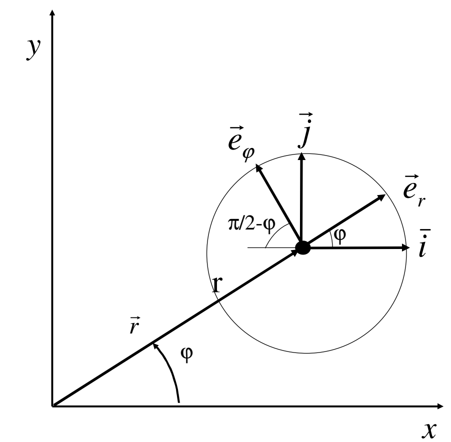
Układ biegunowy

W przypadku ruchu w płaszczyźnie z=0 dwuwymiarowy układ wprowadzony w tej płaszczyźnie to układ biegunowy. Wówczas mamy $\rho=r=|\vec{r}|$ $\quad\dot{\rho}=\dot{r}\quad \ddot{\rho}=\ddot{r}$

$$\dot{z}=\ddot{z}=0$$

$$\vec{e}_r=\cos(\varphi)\vec{i}+\sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi=-\sin(\varphi)\vec{i}+\cos(\varphi)\vec{j}$$



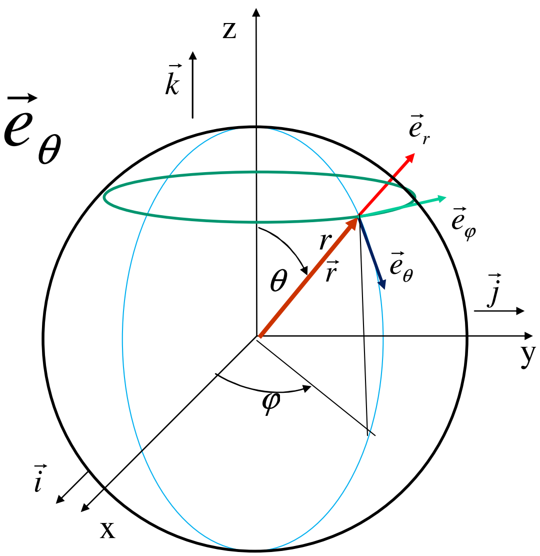
$$\vec{r}=r\vec{e}_r\qquad \vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}=\left[\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi\qquad \vec{L}=mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

$$[grad\ h]_r=\frac{\partial h}{\partial r}\qquad [grad\ h]_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\varphi}$$

Układ sferyczny

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$



$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = r\cos(\theta) \qquad tg(\varphi) = \frac{y}{x}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

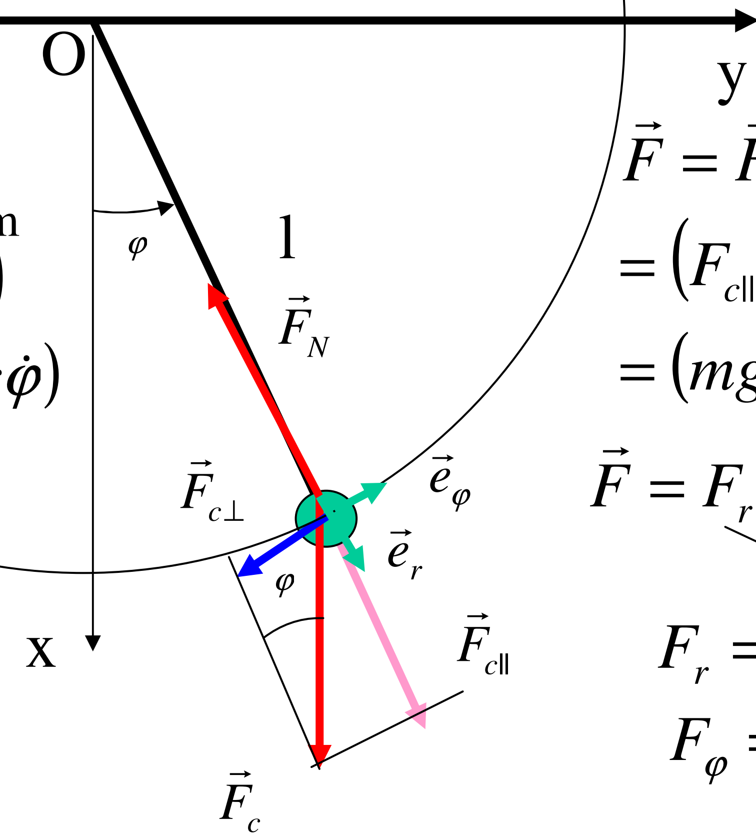
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = m\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r_r & r_\theta & r_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\sin\theta\dot{\varphi} \end{vmatrix} = 0\vec{e}_r - mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi$$

Układ biegunowy odpowiada przypadkowi gdy $\theta = \frac{\pi}{2}$

Wahadło matematyczne

-rozważania w układzie biegunowym



Składowe przyspieszenia w układzie biegunowym

$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)$$

$$a_\varphi = \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)$$

W rozważanym przypadku

$$r = l, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_r = -l\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = l\ddot{\varphi} \end{array}$$

Siła wypadkowa

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_N = \vec{F}_{c\parallel} + \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_N =$$

$$= \left(F_{c\parallel} - F_N\right)\vec{e}_r - F_{c\perp}\vec{e}_\varphi =$$

$$= \left(mg\cos\varphi - F_N\right)\vec{e}_r - mg\sin\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$F_r = mg\cos\varphi - F_N$$

$$F_\varphi = -mg\sin\varphi$$

Z II zasady dynamiki Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$

$$ma_r = F_r \Rightarrow -ml\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - F_N$$

Równanie pozwala na wyznaczenie F_N

$$ma_\varphi = F_\varphi \Rightarrow ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0}$$

Nieliniowe równanie ruchu

$$\varphi \to 0 \Rightarrow \sin(\varphi) \approx \varphi \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

Równanie o podobnej postaci jak dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Rozwiązanie równania $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ opisującego oscylator harmoniczny jednowymiarowy-cząstkę o masie *m* poruszającą się wzdłuż osi Ox pod wpływem siły $\vec{F}=-kx\vec{i}$ (do samodzielnej analizy)

(wówczas $m\ddot{x}=F_x=-kx \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=0$ gdzie $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$
w przypadku wahadła analizowanego w ramach zastosowanego przybliżenia $x=\varphi$)

Rozwiązań powyższego równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach jednorodnego poszukujemy w postaci $x(t)=C\exp(rt)$

Równanie charakterystyczne : $Cr^2\exp(rt)+\omega^2 C\exp(rt)=0 \Rightarrow r^2+\omega^2=0$

Jego pierwiastki są równe $r_1=i\omega$ oraz $r_2=-i\omega$

Ponieważ $r_1\neq r_2$ to ogólne rozwiązanie można zapisać w postaci

$$x(t)=C_1\exp(r_1 t)+C_2\exp(r_2 t)=C_1\exp(i\omega t)+C_2\exp(-i\omega t)=$$
$$=(C_1+C_2)\cos(\omega t)+i(C_1-C_2)\sin(\omega t)$$

Wykorzystano relacje (α-liczba rzeczywista)

$$\exp(i\alpha)=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) \qquad \exp(-i\alpha)=\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)$$

Ponieważ x może przyjmować tylko wielkości rzeczywiste to

$$x(t)=A_1\cos(\omega t)+A_2\sin(\omega t)$$

gdzie $A_1=C_1+C_2$ $A_2=i(C_1-C_2)$ stałe rzeczywiste

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

Ogólne rozwiązanie rozważanego równania zależne również od dwóch stałych dowolnych A_0 oraz φ_0 można zapisać np. także w postaci: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

gdzie A-amplituda, φ_0 -faza początkowa drgań, ω-częstość kołowa drgań

przy czym ponieważ $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(\omega t)\cos(\varphi_0) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi_0)$

to zachodzi

$$\begin{matrix} A_1 = A\cos(\varphi_0) \\ A_2 = -A\sin(\varphi_0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ tg(\varphi_0) = -\dfrac{A_2}{A_1} \end{matrix}$$

lub w postaci $x(t) = A\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0)$

przy czym ponieważ $x(t) = A\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0) = A\sin(\omega t)\cos(\tilde{\varphi}_0) + A\cos(\omega t)\sin(\tilde{\varphi}_0)$

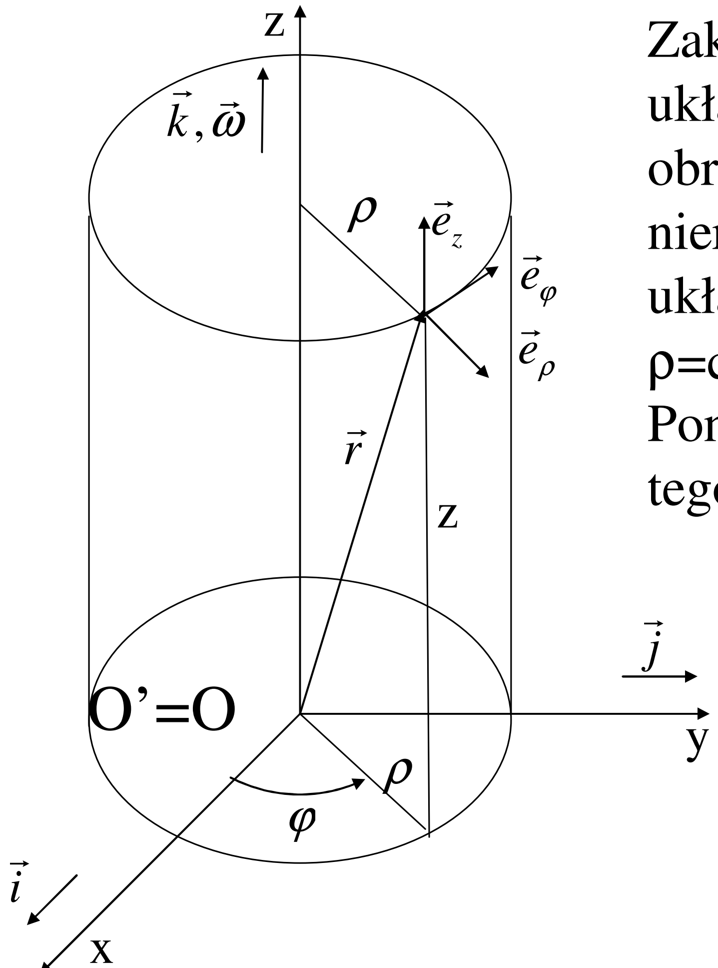
to zachodzi

$$\begin{matrix} A_2 = A\cos(\tilde{\varphi}_0) \\ A_1 = A\sin(\tilde{\varphi}_0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ tg(\tilde{\varphi}_0) = \dfrac{A_1}{A_2} \end{matrix}$$

Ruch oscylatora jest okresowy z okresem $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ gdyż $x(t+T) = x(t)$

Transformacja prędkości i przyspieszenia przy przejściu do obracającego się układu odniesienia

PRĘDKOŚĆ KĄTOWA



Zakładamy iż układ ruchomy O' o początku w początku układu nieruchomego O'=O podlega ruchowi obrotowemu wokół osi Oz czyli ruch dowolnego punktu nieruchomego w tym układzie zachodzi w nieruchomym układzie cylindrycznym O po okręgu o stałym promieniu ρ=const w płaszczyźnie *z*=const

Ponieważ $v_z = \dot{z} = 0$ oraz $v_\rho = \dot{\rho} = 0$ to prędkość tego punktu w układzie nieruchomym jest równa

$$\vec{v} = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \rho\dot{\varphi}\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho\right) = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \rho\vec{e}_\rho =$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \Rightarrow \vec{v} = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\right) = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{r}$$

$\vec{\omega} \equiv \dot{\varphi}\vec{e}_z$ *prędkość kątowa*

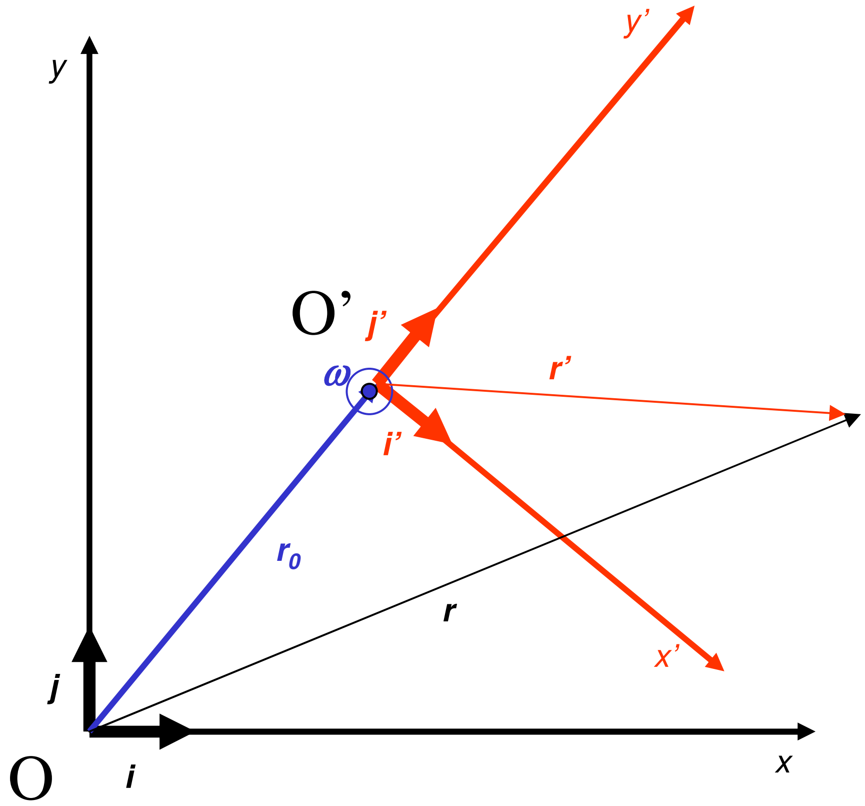
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ *prędkość w ruchu obrotowym*

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \leftarrow$ Związek słuszny dla wektora wodzącego punktu nieruchomego w układzie obracającym się (w tym układzie wektor wodzący jest stały)

Można pokazać iż związek o tej postaci jest prawdziwy dla dowolnego wektora $\vec{u}$ stałego w układzie obracającym się ze prędkością kątową $\vec{\omega}$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}}$$

Transformacje prędkości i przyspieszenia dowolnego poruszającego się ciała pomiędzy układami nieruchomym O i ruchomym O' podlegającym złożeniu ruchu translacyjnego i obrotowego (gdy $\vec{\omega} = const$)



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$ -prędkość początku układu O' w układzie O

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} \equiv \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' +$$

$$+ x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

Prędkość w układzie obracającym się

$$\vec{v}' \equiv \frac{d'\vec{r}'}{dt} \equiv \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \neq \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Wersory w układzie obracającym nie są stałe w układzie nieruchomym

Wyprowadzenie wzoru na transformacje prędkości

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}=\underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)}_{=\vec{v}'=\frac{d'\vec{r}'}{dt}}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

Gdy $\vec{k}'\parallel\vec{\omega}\Rightarrow\frac{d\vec{k}'}{dt}=0$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{u}\Rightarrow\frac{d\vec{i}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}',\ \frac{d\vec{j}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j}',\frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d'\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\left(x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}'\right)=\frac{d'\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\vec{v}_u+\vec{v}',\quad\vec{v}_u=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}'}$$

prędkość unoszenia

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d'\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'\Rightarrow\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d'\vec{u}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{u}$$

Związek po lewej stronie jest prawdziwy dla dowolnego wektora $\vec{u}$ a nie tylko wektora $\vec{r}$, ponieważ przy jego wyprowadzeniu korzystaliśmy tylko z ogólnie prawdziwego związku

Wyprowadzenie wzoru na transformacje przyspieszenia (gdy $\vec{\omega}=const$)

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'+(\vec{\omega}\times\vec{r}')\Rightarrow \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_0}{dt}+\frac{d\vec{v}'}{dt}+\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)\quad (\text{bo } \vec{\omega}=const)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_0}{dt}+\left[\frac{d'\vec{v}'}{dt}+(\vec{\omega}\times\vec{v}')\right]+\vec{\omega}\times\left[\frac{d'\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'\right]=$$

$$=\vec{a}_0+[\vec{a}'+(\vec{\omega}\times\vec{v}')]+[(\vec{\omega}\times\vec{v}')+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')]=$$

$$=\vec{a}_0+\vec{a}'+2(\vec{\omega}\times\vec{v}')+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times(\vec{r}_{\parallel}'+\vec{r}_{\perp}'))=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp}')=\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{\perp}')-\vec{r}_{\perp}'(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})=-\omega^2\vec{r}_{\perp}'$$

$\vec{r}_{\perp}'(\vec{r}_{\parallel}')$ -składowe wektora $\vec{r}'$ prostopadle (równoległe) do $\vec{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'+2(\vec{\omega}\times\vec{v}')+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')=\vec{a}_0+\vec{a}'+\vec{a}_{cor}+\vec{a}_{dosr}}$$

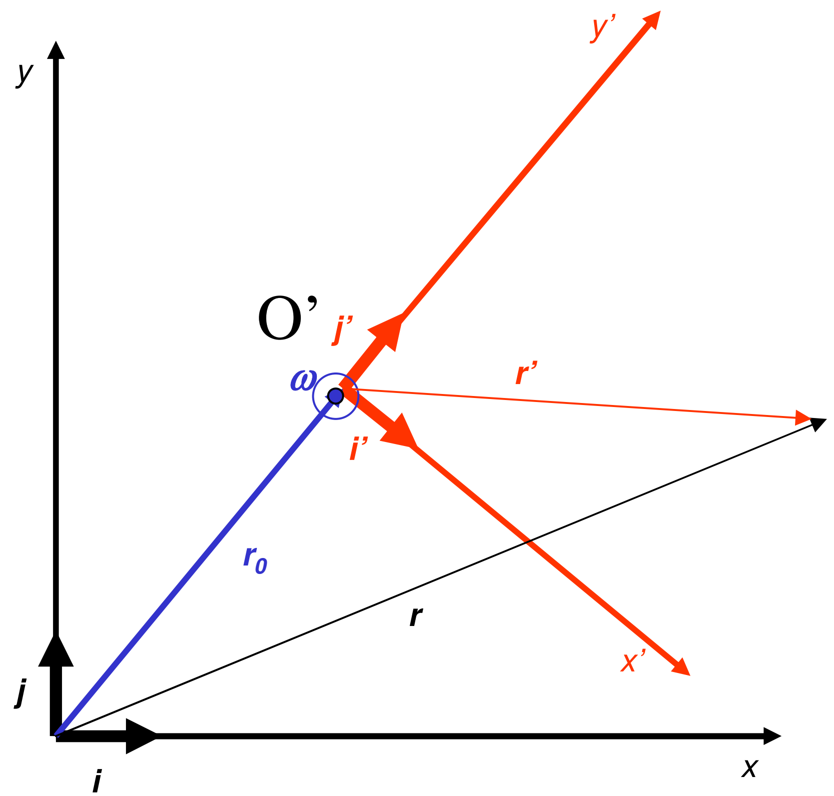
$$\vec{a}_0=\frac{d\vec{v}_0}{dt}$$ przyspieszenie początku układu O’ w układzie O

$$\vec{a}_{cor}\equiv 2(\vec{\omega}\times\vec{v}')$$ przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{a}_{dosr}\equiv\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')=-\omega^2\vec{r}_{\perp}'$$ przyspieszenie dośrodkowe

Układ nieinercjalny nie podlega obrotowi $\vec{\omega}=0\Rightarrow\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}';\quad \vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'$

Transformacje prędkości i przyspieszenia dowolnego poruszającego się ciała pomiędzy układami nieruchomym O i ruchomym O' podlegającym złożeniu ruchu translacyjnego i obrotowego (gdy $\vec{\omega} = const$)



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}' =$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_{dosr} + \vec{a}_C + \vec{a}'$$

$\vec{a}_{dosr} \equiv \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ przysp. dośrodkowe

$\vec{a}_C \equiv 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$ przysp. Coriolisa

Transformacja Galileusza

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

gdzie

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{v}' \equiv \frac{d'\vec{r}'}{dt} \equiv \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\vec{a}' \equiv \frac{d'\vec{v}'}{dt} \equiv \frac{dv'_x}{dt}\vec{i}' + \frac{dv'_y}{dt}\vec{j}' + \frac{dv'_z}{dt}\vec{k}'$$

$\frac{d'}{dt}$-pochodna po czasie liczona w układzie ruchomym obracającym się

Można pokazać iż w przypadku gdy prędkość kątowa ulega zmianie to wzór na transformacje przyspieszenia przyjmuje postać

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'$$

który różni się od wzoru otrzymanego wcześniej obecnością wyrazu $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'$

Zasada II dynamiki Newtona w układzie nieinercjalnym podlegającym także ruchowi obrotowemu

W układzie inercjalnym $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{a}_{dosr} + \vec{a}_{cor} \Rightarrow \quad m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{a}_{dosr} - m\vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d^2{}'\vec{r}'}{dt^2} \qquad \vec{a}_{dosr} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -\omega^2\vec{r}_\perp'$$

$$\vec{a}_{cor} = 2(\vec{\omega}\times\vec{v}') = 2\left(\vec{\omega}\times\frac{d'\vec{r}'}{dt}\right) \qquad \vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$$

W układzie nieinercjalnym

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_b + \vec{F}_{odsr} + \vec{F}_{cor}$$

$\vec{F}_{odsr} = -m\vec{a}_{dosr} = m\omega^2\vec{r}_\perp'$ siła odśrodkowa

$\vec{F}_{cor} = -m\vec{a}_{cor} \equiv 2m(\vec{v}'\times\vec{\omega})$ siła Coriolisa

$\vec{F}_b = -m\vec{a}_0 = -m\dfrac{d\vec{v}_0}{dt}$ siła bezwładności

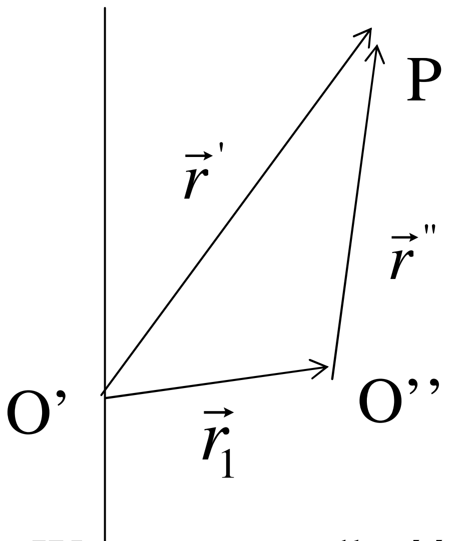
W układzie nieobracającym się $\vec{F}_{odsr} = \vec{F}_{cor} = \vec{0}$

Niezależność prędkości kątowej od wyboru początku ruchomego układu odniesienia

Rozważmy układ o początku w punkcie O' obracający się z wokół osi przechodzącej przez punkt O' z prędkością kątową $\vec{\omega}$

Wprowadźmy nowy układ o początku w punkcie O'' spoczywającym w układzie ruchomym O'

Rozważmy prędkość unoszenia dowolnego punktu P w obu układach



W układzie O' mamy $\vec{v}_u = \vec{v}_o + (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

gdzie $\vec{v}_o$ -prędkość punktu O'

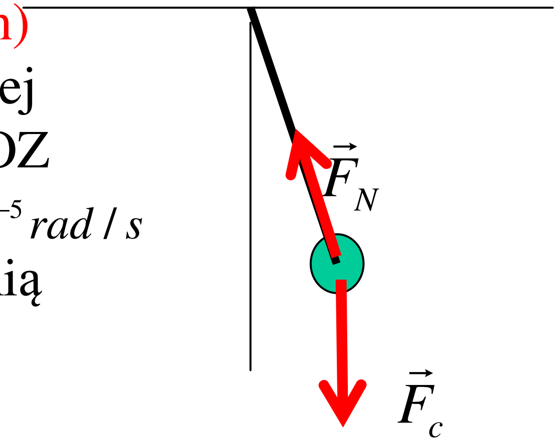
Wzór ten możemy przekształcić do postaci

$$\vec{v}_u = \vec{v}_o + \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{r}_1 + \vec{r}\,''\right)\right) = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'' = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,''$$

gdzie $\vec{v}_1 = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_1$ -prędkość punktu O''

Wzory na prędkość unoszenia w układach O' i O'' maja tą sama ogólną postać z tą samą prędkością kątową , różnią się zaś m.in. prędkością z jaka porusza się początek układu. Za początek układu ruchomego przez który przechodzi os obrotu można przyjąć dowolny nieruchomy punkt O'' w układzie ruchomym O'. Jest to przejawem tego iż podział ruchu na ruch postępowy i obrotowy jest niejednoznaczny, a oś obrotu ma tylko ustalony kierunek. W przypadku gdy $\vec{v}_0 = 0$ czyli w układzie O' prędkość unoszenia dowolnego punktu P ma tylko człon związany z ruchem obrotowym $\vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ to w układzie O'' ma także człon związany z ruchem postępowym $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$

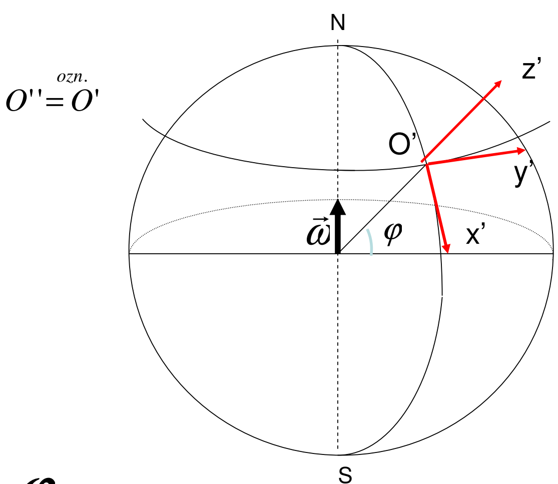
Wahadło Foucaulta (przykład dla zainteresowanych)



wahadło matematyczne na powierzchni Ziemi podlegającej w układzie inercjalnym ruchowi obrotowemu wokół osi OZ z prędkością kątową $\vec{\omega}$ o wartości $\omega = 2\pi / 24h \approx 0{,}7 \cdot 10^{-5}\, rad/s$

Opis w układzie ruchomym sztywno związanym z ziemią o początku w miejscu umieszczenia wahadła

R-promień Ziemi $\vec{i}\,' \parallel$ oś $O'x$ $\vec{j}\,' \parallel$ oś Oy' $\vec{k}\,' \parallel$ oś Oz'



φ - szerokość geograficzna

Z II zasady dynamiki w układzie nieinercjalnym wynika iż

$$m\vec{a}\,' = \vec{F}_N + \vec{F}_c + \vec{F}_b + \vec{F}_{odsr} + \vec{F}_{cor}$$

$\vec{a}\,' = \ddot{x}'\vec{i}\,' + \ddot{y}'\vec{j}\,' + \ddot{z}'\vec{k}\,'$ -przyspieszenie ciała w układzie ruchomym

$\vec{v}\,' = \dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,'$ -prędkość ciała w układzie ruchomym

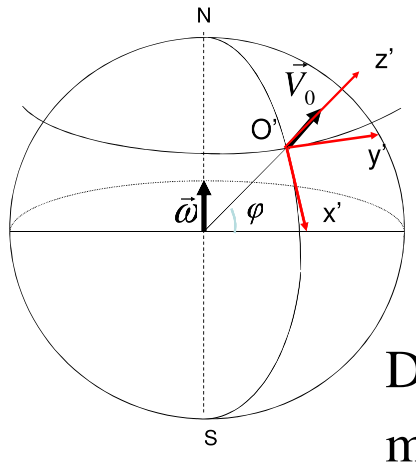
$\vec{F}_{cor} = 2m(\vec{v}\,' \times \vec{\omega})$ $\vec{F}_{odsr} = m\omega^2 \vec{r}_\perp^{\,'}$

$\vec{r}_\perp^{\,'}$ -rzut wektora wodzącego na o płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu

$\vec{F}_b = -m\ddot{\vec{r}}_0 = m\omega^2 \vec{r}_{0\perp}$ gdyż punkt O' porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu równym odległości O' od osi obrotu Ziemi $r_{0\perp} = R\cos(\varphi)$

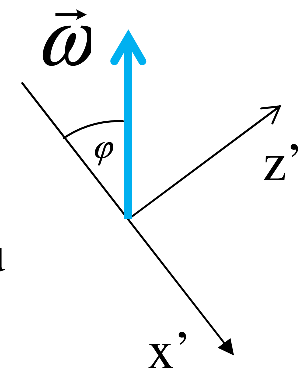
Dla ruchu w pobliżu powierzchni Ziemi można przyjąć iż $\vec{F}_{odsr} = m\omega^2 \vec{r}_\perp^{\,'} \approx 0$, a obecność siły $\vec{F}_b = m\omega^2 \vec{r}_{0\perp}$ uwzględniamy tylko modyfikując wartość przyspieszenia ziemskiego g

Wahadło Foucaulta



$$m\vec{a}'\approx \vec{F}_N+\vec{F}_c+\vec{F}_{cor} = \vec{F}_N + m\vec{g} + 2m\left(\vec{v}'\times\vec{\omega}\right)$$

$$\vec{\omega} = -\omega\cos\varphi\,\vec{i}\,' + \omega\sin\varphi\,\vec{k}\,'$$



Dla niewielkich wychylenia nici wahadła od pionu można przyjąć iż $z'=\dot{z}'=\ddot{z}'=0$

$$\vec{v}'\times\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ \dot{x}' & \dot{y}' & 0 \\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \end{vmatrix} = \omega\sin\varphi\,\dot{y}'\,\vec{i}\,' - \omega\sin\varphi\,\dot{x}'\,\vec{j}\,' + \omega\cos\varphi\,\dot{y}'\,\vec{k}\,'$$

$$\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega} = 2m\omega\sin\varphi\,\dot{y}'\,\vec{i}\,' - 2m\omega\sin\varphi\,\dot{x}\vec{j}\,' + 2m\omega\cos\varphi\,\dot{y}'\,\vec{k}\,'$$

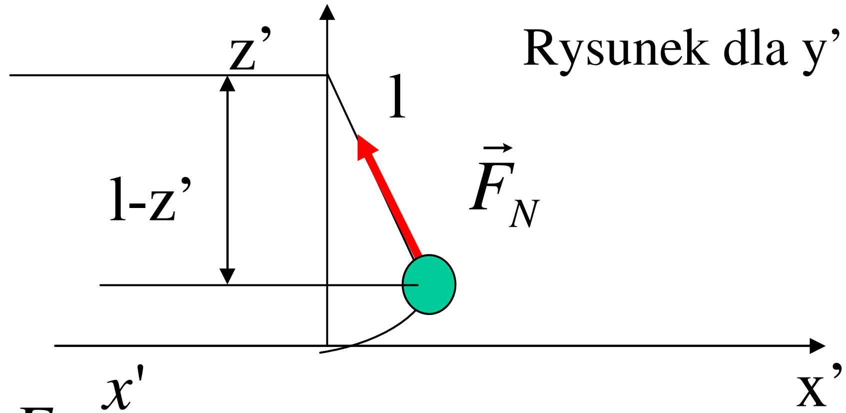
$$\vec{F}_N = F_{Nx'}\vec{i}\,' + F_{Ny'}\vec{j}\,' + F_{Nz'}\vec{k}\,' \qquad \vec{F}_c = -mg\vec{k}\,'$$

$$m\ddot{x}' = F_{Nx'} + 2m\omega\sin\varphi\,\dot{y}'$$

$$m\ddot{y}' = F_{Ny'} - 2m\omega\sin\varphi\,\dot{x}'$$

$$0 = m\ddot{z}' = F_{Nz'} - mg + 2m\omega\cos\varphi\,\dot{y}' \qquad \Rightarrow F_{Nz'} = mg - 2m\omega\cos\varphi\,\dot{y}'$$

$$F_{Nz'} = mg - 2m\omega\cos\varphi\dot{y}'$$



Rysunek dla y’=0

$$F_{Nx'} = \vec{F}_N \cdot \vec{i}\,' = F_n \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{F}_N, \vec{i}\,'\right)\right) = -F_N \frac{x'}{l}$$

$$F_{Ny'} = \vec{F}_N \cdot \vec{j}\,' = F_n \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{F}_N, \vec{j}\,'\right)\right) = -F_N \frac{y'}{l}$$

Dla niewielkich katów α wychylenia nici wahadła od pionu

$$F_{Nz'} = \vec{F}_n \cdot \vec{k}\,' = F_N \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{F}_N, \vec{k}\,'\right)\right) = F_N \frac{(l - z')}{l} \approx F_N$$

$$F_{Nx'} \approx -\frac{x'}{l} F_{Nz'}, \quad F_{Ny'} \approx -\frac{y'}{l} F_{Nz'}$$

$$m\ddot{x}' = F_{Nx'} + 2m\omega\sin\varphi\dot{y}'$$

$$m\ddot{y}' = F_{Ny'} - 2m\omega\sin\varphi\dot{x}'$$

$$\longrightarrow$$

$$m\ddot{x}' = -mg\frac{x'}{l} + \frac{2m\omega\cos\varphi}{l} x'\dot{y}' + 2m\omega\sin\varphi\dot{y}'$$

$$m\ddot{y}' = -mg\frac{y'}{l} + \frac{2m\omega\cos\varphi}{l} y'\dot{x}' - 2m\omega\sin\varphi\dot{x}'$$

Można przyjąć iż $\frac{2m\omega\cos\varphi}{l}x'\dot{y}'\approx 0$ $\frac{2m\omega\cos\varphi}{l}y'\dot{x}'\approx 0$

Ruch wahadła w płaszczyźnie stycznej do powierzchni Ziemi opisują więc równania

$$m\ddot{x}' = 2m\omega\sin\varphi\dot{y}' - \frac{mgx'}{l} \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}' = -2m\omega\sin\varphi\dot{x}' - \frac{mgy'}{l} \qquad (2)$$

Po pomnożeniu równania (2) przez *i* i dodaniu stronami do równania (1) otrzymujemy

$$m(\ddot{x}' + i\ddot{y}') = 2m\omega\sin\varphi(\dot{y}' - i\dot{x}') - \frac{mg(x' + iy')}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ddot{x}' + i\ddot{y}') = -i2\omega\sin\varphi(\dot{x}' + i\dot{y}') - \frac{g(x' + iy')}{l}$$

Wprowadzając oznaczenie $u = x' + iy'$

$$\ddot{u} + i2\omega\sin\varphi\dot{u} + \frac{g}{l}u = 0$$

Równanie różniczkowe rzędu II liniowe o stałych współczynnikach jednorodne

$$\ddot{u} + i2\omega \sin\varphi \dot{u} + \frac{g}{l} u = 0$$

Wprowadzając oznaczenie $\Omega_{z'} = \omega \sin\varphi;\qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$ mamy

$$\ddot{u} + i2\Omega_{z'}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \qquad (*)$$

Przewidując rozwiązanie w postaci $u = C\exp(\lambda t)$

otrzymujemy równanie charakterystyczne powyższego równania różniczkowego

$$\left(\lambda^2 + i2\Omega_{z'}\lambda + \omega_0^2\right)C\exp(\lambda t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + i2\Omega_{z'}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

i jego rozwiązania

$$\lambda = \frac{-i2\Omega_{z'} \pm \sqrt{-4\Omega_{z'}^2 - 4\omega_o^2}}{2} = -i\left(\Omega_{z'} \pm \sqrt{\Omega_{z'}^2 + \omega_o^2}\right) \overset{\Omega_{z'} << \omega_o}{\approx} -i\left(\Omega_{z'} \pm \omega_0\right)$$

$$\lambda_1 = -i\left(\Omega_{z'} - \omega_0\right); \lambda_2 = -i\left(\Omega_{z'} + \omega_0\right)$$

Ogólne przybliżone rozwiązanie równania różniczkowego (*)

$$u = C_1\exp(\lambda_1 t) + C_2\exp(\lambda_2 t) = \exp(-i\Omega_{z'}t)\left[C_1\exp(i\omega_0 t) + C_2\exp(-i\omega_0 t)\right] =$$
$$= \exp(-i\Omega_{z'}t)\left[C_1\cos(\omega_0 t) + iC_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) - iC_2\sin(\omega_0 t)\right]$$

$$u = \exp(-i\Omega_{z'}t)\left[A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t)\right]$$

$$\exp(\pm i\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) \pm i\sin(\omega_0 t) \qquad A_1 = C_1 + C_2 \qquad A_2 = i(C_1 - C_2)$$

Uwzględnienie warunków początkowych ruchu $x(t=0)=x_0;\ y(t=0)=\dot{x}(t=0)=\dot{y}(t=0)=0$

$$u=\exp\left(-i\Omega_{z'}t\right)\left[A_1\cos\left(\omega_0 t\right)+A_2\sin\left(\omega_0 t\right)\right]\Rightarrow u(t=0)=A_1$$

$$x(t=0)=x_0;\ y(t=0)=0\Rightarrow u(t=0)=x(t=0)+iy(t=0)=x_0 \qquad \Rightarrow A_1=x_0$$

$$\dot{u}=-i\Omega_{z'}\exp\left(-i\Omega_{z'}t\right)\left[A_1\cos(\omega_0 t)+A_2\sin(\omega_0 t)\right]+$$

$$+\omega_0\exp\left(-i\Omega_{z'}t\right)\left[-A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)\right]\Rightarrow\dot{u}\left(t=0\right)=-i\Omega_{z'}A_1+\omega_0 A_2$$

$$\dot{x}(t=0)=0;\ \dot{y}(t=0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\dot{u}(t=0)=\dot{x}(t=0)+i\dot{y}(t=0)=0 \qquad \Rightarrow A_2=i\frac{\Omega_{z'}}{\omega_0}A_1=i\frac{\Omega_{z'}}{\omega_0}x_0$$

$$u=\exp\left(-i\Omega_{z'}t\right)\left[x_0\cos\left(\omega_0 t\right)+i\frac{\Omega_{z'}}{\omega_o}x_0\sin\left(\omega_o t\right)\right]=$$

$$=x_0\left[\cos\left(\Omega_{z'}t\right)-i\sin\left(\Omega_{z'}t\right)\right]\left[\cos\left(\omega_0 t\right)+i\frac{\Omega_{z'}}{\omega_o}\sin\left(\omega_o t\right)\right]$$

$$x=\mathrm{Re}(u)=x_0\left[\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\Omega_{z'}t\right)+\frac{\Omega_{z'}}{\omega_0}\sin\left(\omega_o t\right)\sin\left(\Omega_{z'}t\right)\right]\cong x_0\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\Omega_{z'}t\right)$$

$$y=\mathrm{Im}(u)=-x_0\left[\cos\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\Omega_{z'}t\right)-\frac{\Omega_{z'}}{\omega_0}\sin\left(\omega_o t\right)\cos\left(\Omega_{z'}t\right)\right]\cong -x_0\cos\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\Omega_{z'}t\right)$$

Płaszczyzna drgań wahadła ulega precesji wokół osi prostopadłej do powierzchni ziemi z prędkością kątową $\Omega_{z'}=\omega\sin\varphi$ w przypadku gdy $\sin\varphi>0$ (półkula północna) w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara

Energia kinetyczna i potencjał.
Zasada zachowania energii mechanicznej

Pęd i moment pędu dla układu punktów materialnych.
Zasada zachowania momentu pędu dla układu punktów materialnych

Energia kinetyczna E_k=T $\quad T=\frac{m|\vec{v}|^2}{2}=\frac{m}{2}\sum_j v_j^2$

v_j -składowe prędkości w układzie ortogonalnym

W układzie kartezjańskim $T=\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2}$

Dla układu złożonego z n punktów materialnych o masach m_i $\quad T=\sum_{i=1}^{n} T_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\vec{v}_i|^2$

Potencjał *V* *(zwany w przypadku gdy nie zależy jawnie od czasu także energią potencjalną)*

(będziemy go traktować jako funkcję współrzędnych określających położenie punktów materialnych wchodzących w skład układu oraz ewentualnie czasu , przy czym definiuje się potencjał także dla pojedynczego ciała poruszającego się pod działaniem znanych sił wytworzonych przez ciała spoza układu)

Ogólny związek między siłą wypadkową działającą na *i*-te ciało i potencjałem

$$\vec{F}_i=-grad_i V=-\nabla_i V$$

(pozwala na jego wyznaczenie z dokładnością do stałej)

W układzie kartezjańskim $\quad F_{ix}=-\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad F_{iy}=-\frac{\partial V}{\partial y_i} \quad F_{iz}=-\frac{\partial V}{\partial z_i}$

x_i, y_i, z_i - współrzędne określające położenie *i*-tego punktu materialnego

Zasada zachowania energii

Jeżeli dla wszystkich sił działających w układzie można wprowadzić potencjał (siły są potencjalne) i potencjał ten nie zależy jawnie od czasu co odpowiada temu iż siły te są zachowawcze (praca wykonywana przez nie przy ruchu ciała po drodze zamkniętej jest równa zeru) to całkowita energia mechaniczna układu równa sumie $T+V$ jest zachowana

Szkic dowodu

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \Rightarrow m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2\right) = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2\right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \qquad (*)$$

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i - grad_i V \cdot \vec{v}_i = \sum_i -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \qquad (**)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d(T+V)}{dt} = 0 \Rightarrow T + V = const$$

Po pomnożeniu równania (*) przez dt i scałkowaniu go po t od $t=t_p$ do $t=t_k$ otrzymujemy relacje wiążącą zmianę energii kinetycznej z pracą sił przy przemieszczaniu ciała i zmianą potencjału (przy uwzględnieniu (**))

$$T(t=t_k) - T(t=t_p) = \sum_i \int_\Gamma \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\left[V(t=t_k) - V(t=t_p)\right]$$

W przypadku ruchu po torze zamkniętym jej spełnienie wymaga by praca była równa zeru gdy potencjał nie zależy jawnie od czasu

Wyznaczenie energii całkowitej jednowymiarowego oscylatora poruszającego się wzdłuż osi Ox pod wpływem siły $\vec{F} = -kx\vec{i}$

a) energia kinetyczna

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

b) energia potencjalna V (nazywana potencjałem)

Ogólny związek między siła i potencjałem $\vec{F} = -gradV(\vec{r})$

Dla rozważanego oscylatora $V = V(x)$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} = -kx\vec{i}$$

$$gradV = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -F_x = kx \Rightarrow V = -\int F_x dx = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + C \overset{np.}{=} \frac{1}{2}kx^2$$

Potencjał wyznaczmy zawsze z dokładnością do stałej, którą zwykle dobieramy tak by znikał w punkcie w którym znika siła

c) energia całkowita $E = T + V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

Energia całkowita jest stałą (całką ruchu), bo siła wypadkowa jest potencjalna , a potencjał nie zależy jawnie od czasu

Znalezienie ruchu oscylatora jednowymiarowego korzystając z całki energii

$$E=\frac{m}{2}v^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)}$$

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)}}=\pm dt \Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)}}dx=\pm t+C$$

C-stała dowolna

$$\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1-\frac{k}{2E}x^2\right)}}dx=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)^2}}dx=\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)$$

$$\tilde{C}=\sqrt{\frac{k}{m}}C \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)=\pm t+C \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}t+\tilde{C}\right)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$\sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t+\tilde{C}\right)=-\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\tilde{C}\right)=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\tilde{C}+\pi\right)$$

$$\varphi_0=\pi-\tilde{C}$$

Rozwiązaliśmy równanie różniczkowe rzędu pierwszego zamiast drugiego- obniżenie rzędu równania

Pęd i moment pędu dla układu złożonego z   punktów materialnych

$$\vec{p}_u = \sum_i \vec{p}_i \qquad \vec{L}_u = \sum_i \vec{L}_i$$

(sumowanie po punktach materialnych)

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Moment pędu określamy względem początku inercjalnego układu współrzędnych

Związek pędu z wypadkową siłą

$$\frac{d\vec{p}_u}{dt} = \frac{d\sum_i \vec{p}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{i,zew} + \sum_{i,j\neq i} \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_{i,zew}$ -siła działająca na i-te ciało , której źródłem są ciała spoza układu

$\vec{F}_{ij}$ -siła działająca na i-te ciało ze strony j-tego ciała

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

(III zasada dynamiki Newtona)

$$\frac{d\vec{p}_u}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,zew} + \sum_{i,j\neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{F}_{i,zew} + \sum_{i,j>i} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) =$$

$$= \sum_i \vec{F}_{i,zew} + \sum_{i,j>i} \left(\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}\right) = \sum_i \vec{F}_{i,zew} = \vec{F}_w$$

Związek momentu pędu $\vec{L}_u$ z wypadkowym zewnętrznym momentem siły $\vec{D}_{w,zew}$

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

$$\frac{d\vec{L}_u}{dt} = \frac{d\sum_i \vec{L}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i,j\neq i} \vec{D}_{ij} + \sum_i \vec{D}_{i,zew} = \sum_{i,j>i}\left(\vec{D}_{ij} + \vec{D}_{ji}\right) + \sum_i \vec{D}_{i,zew}$$

$$= \sum_{i,j>i}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}\right) + \sum_i \vec{D}_{i,zew} = \sum_{i,j>i}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}\right) + \sum_i \vec{D}_{i,zew} =$$

$$= \sum_{i,j>i}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\times\vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{D}_{i,zew} = \sum_i \vec{D}_{i,zew} = \vec{D}_{w,zew}$$

$\vec{F}_{ij} \parallel \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)$ (siła centralna)

$\vec{D}_{ij}$ -moment siły działającej ze strony ciała *j*-tego na *i-te*

$\vec{D}_{i,zew}$ -moment siły zewnętrznej działającej na ciało *i*-te

Moment pędu i moment siły muszą być określone względem nieruchomego punktu w pewnym układzie inercjalnym (lub środka masy). Wypadkowy moment siły nie jest równy momentowi siły wypadkowej

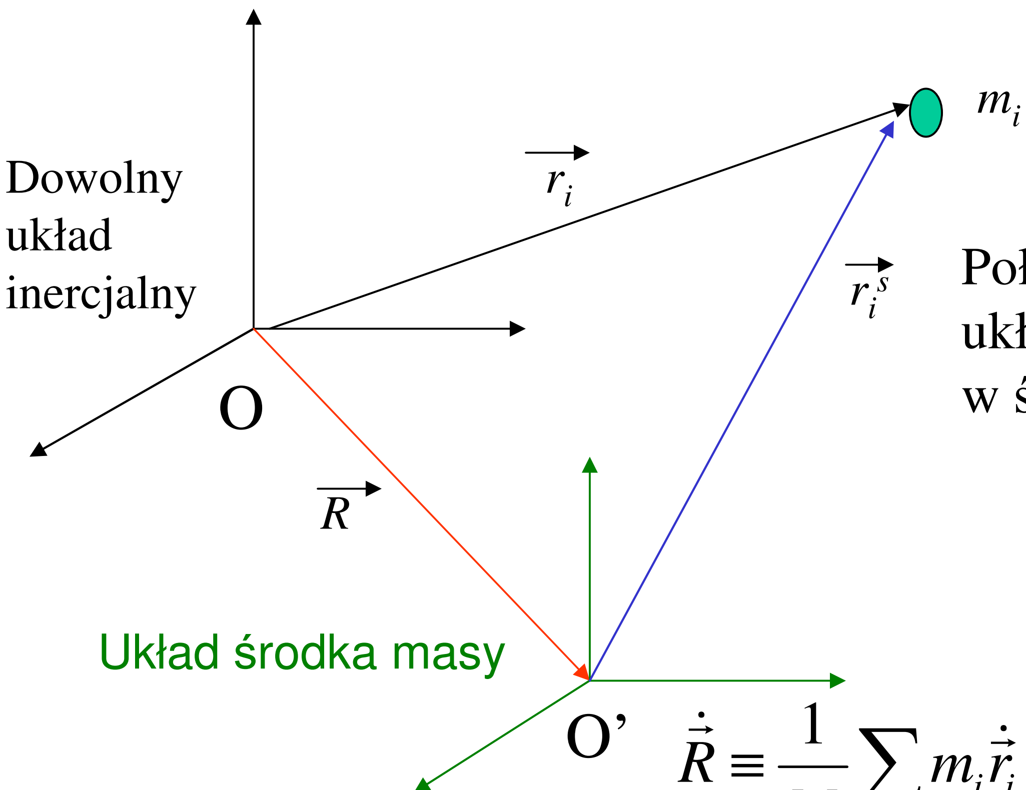
Zasada zachowania pędu i momentu pędu

$\vec{F}_w = 0 \Rightarrow \vec{p}_u = const$ zasada zachowania pędu

$\vec{D}_{w,zew} = 0 \Rightarrow \vec{L}_u = const$ zasada zachowania momentu pędu

Zapis praw mechaniki dla układu punktów materialnych w układzie środka masy

Układ środka masy



Położenie środka masy

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_i m_i$$

Położenie punktów materialnych w układzie o początku O' umieszczonym w środku masy wyznaczają wektory $\vec{r}_i^{\,s}$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,s} + \vec{R} \qquad \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i^{\,s} + \dot{\vec{R}}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}_i^{\,s} + \ddot{\vec{R}}$$

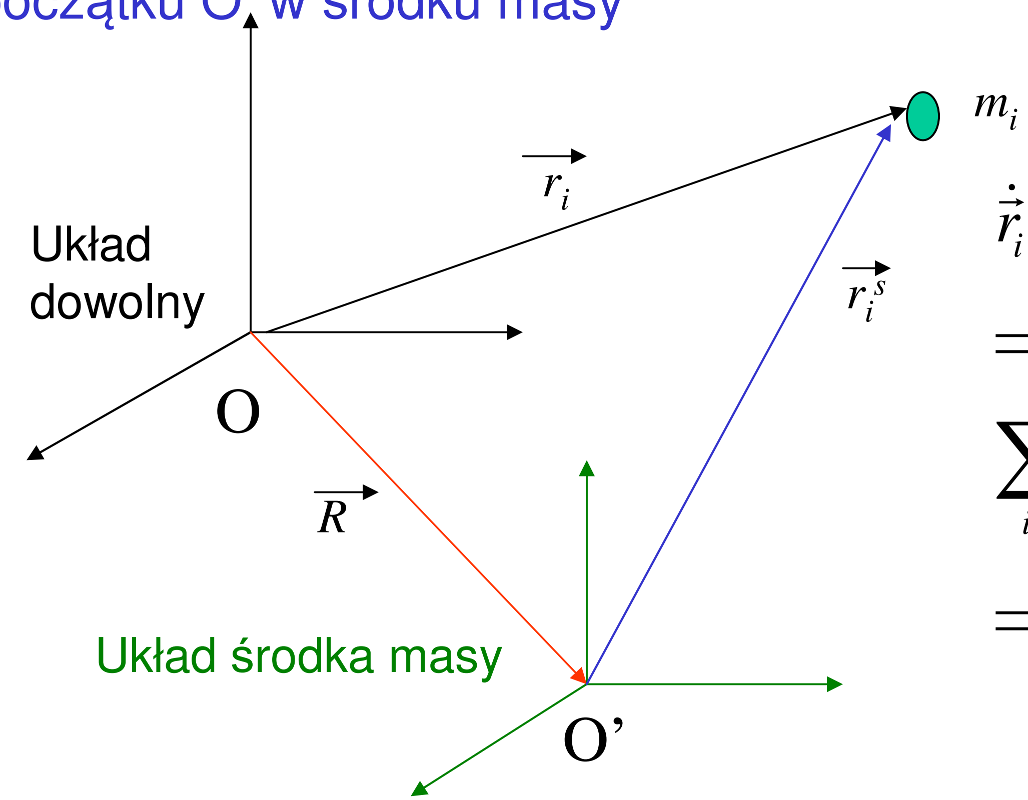
$$\dot{\vec{R}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{p}_u}{M} \rightarrow \vec{p}_u = M\dot{\vec{R}}$$

Pęd układu $\vec{p}_u$ równy sumie wektorowej pędów wszystkich ciał wchodzących w skład układu jest równy pędowi ciała o masie równej sumie mas wszystkich ciał wchodzących w skład układu poruszającego się tak jak środek masy układu

W układzie inercjalnym
$$\dot{\vec{p}}_u = \vec{F}_w \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \frac{\dot{\vec{p}}_u}{M} = \frac{\vec{F}_w}{M}$$

Gdy $\vec{F}_w = 0 \Rightarrow \vec{p}_u = const \Rightarrow \dot{\vec{R}} = const$
środek masy można przyjąć za początek nieobracającego się układu inercjalnego

Pęd układu punktów materialnych w układzie dowolnym i w układzie o początku O' w środku masy



$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^{\,s} + \dot{\vec{R}} \Rightarrow m_i\dot{\vec{r}}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,s} + m_i\dot{\vec{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_i^{\,s} + m_i\dot{\vec{R}} \Rightarrow$$

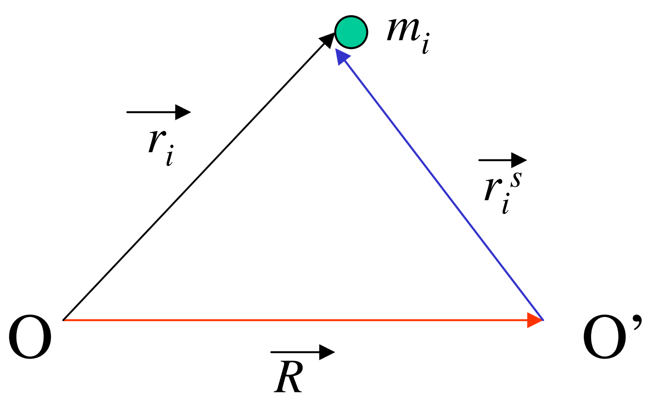
$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{p}_i^{\,s} + \sum_i m_i\dot{\vec{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p}_u = \vec{p}_u^{\,s} + M\dot{\vec{R}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}_u = \vec{p}_u^{\,s} + M\dot{\vec{R}} \\ \vec{p}_u = M\dot{\vec{R}}\end{array}\right. \Rightarrow \vec{p}_u^{\,s} = 0$$

Pęd układu określony względem jego środka masy jest równy zeru

Moment pędu w układzie dowolnym $\vec{L}_u$ i w układzie o początku O’ w środku masy $\vec{L}_u^s$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,s} + \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^{\,s} + \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{L}_u^s \equiv \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times \vec{p}_i^{\,s} = \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,s}$$

$$\vec{L}_u = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i^{\,s}\right) \times m_i \dot{\vec{r}}_i =$$

$$= \vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{R} \times \vec{p}_u + \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,s}\right) =$$

$$= \vec{R} \times \vec{p}_u + \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,s} = \vec{R} \times \vec{p}_u + \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \dot{\vec{R}} + \vec{L}_u^s,$$

$$\sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times m_i \dot{\vec{R}} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,s}\right) \times \dot{\vec{R}} = \left(\sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}\right)\right) \times \dot{\vec{R}} = \left(M\vec{R} - M\vec{R}\right) \times \dot{\vec{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_u = \vec{R} \times \vec{p}_u + \vec{L}_u^s}$$

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i,$$

Moment siły w układzie dowolnym $\vec{D}_w$ i w układzie środka masy $\vec{D}_w^s$

$$\vec{D}_w^s \equiv \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times \vec{F}_i$$

(zakładamy iż siła nie zależy od wyboru układu współrzędnych)

$$\vec{F}_w = \sum_i \vec{F}_i$$

- wypadkowa siła działająca na układ punktów materialnych

$$\vec{D}_w = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i^{\,s}\right) \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i^{\,s} \times \vec{F}_i$$

$$\Rightarrow \vec{D}_w = \vec{R} \times \vec{F}_w + \vec{D}_w^s$$

Gdy $\vec{F}_w = 0$ to $\vec{D}_w = \vec{D}_w^s$

Gdy siła wypadkowa znika to moment siły nie zależy od punktu względem którego się go określa

Związek między momentem pędu i momentem siły w dowolnym układzie inercjalnym i układzie środka masy

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_u}{dt} = \vec{D}_w}$$

$$\frac{d\vec{L}_u^s}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \times \vec{p}_u\right) = \vec{R} \times \vec{F}_w + \vec{D}_w^s \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_u^s}{dt} = \vec{D}_w^s}$$

Relacja obowiązuje również wtedy gdy środek masy nie spoczywa w układzie inercjalnym

$$\frac{d\vec{p}_u}{dt} = \vec{F}_w \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \times \vec{p}_u\right) = \dot{\vec{R}} \times \vec{p}_u + \vec{R} \times \dot{\vec{p}}_u = \frac{1}{M}\vec{p}_u \times \vec{p}_u + \vec{R} \times \vec{F}_w = \vec{R} \times \vec{F}_w$$

Energia kinetyczna w układzie dowolnym T i środka masy T_s

$$T_s = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i^{\,s}\right)^2$$

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,s}\right)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i^{\,s}\right)^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^{\,s}$$

$$\sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i^{\,s} = \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,s} = \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}\right) = \dot{\vec{R}} \cdot \left(M\dot{\vec{R}} - M\dot{\vec{R}}\right) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 = \tfrac{1}{2}\dot{\vec{R}}^2 \sum_i m_i = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

$$\dot{\vec{R}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow T = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T_s$$

Energia kinetyczna układu punktów materialnych określona w układzie dowolnym jest równa sumie energii kinetycznej tego układu w układzie o początku w środku masy i energii kinetycznej punktu materialnego o masie równej sumie mas punktów materialnych poruszającego się z prędkością równą prędkości środka masy