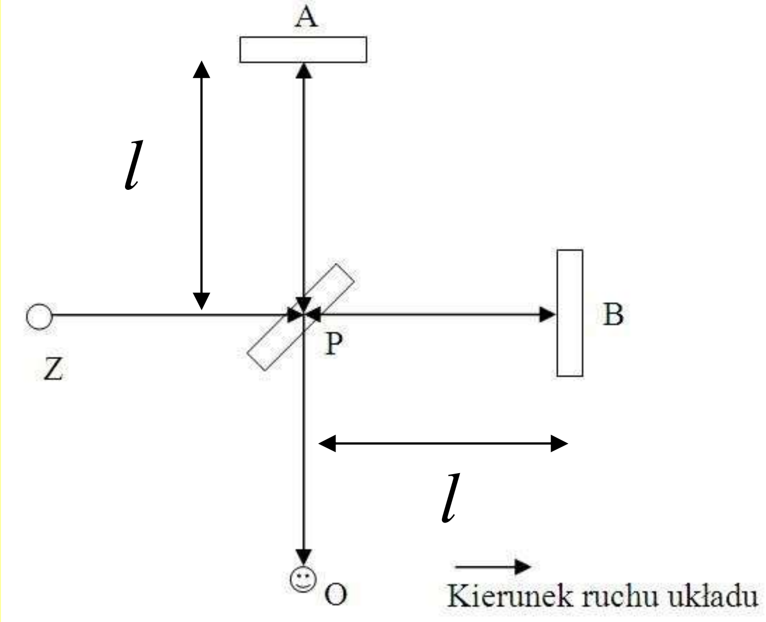
# Elementy szczególnej teorii względności
# –dodatki dla zainteresowanych

## *Doświadczenie Michelsona-Morleya*




Promień świetny wysłany przez źródło Z pozostające w spoczynku względem Ziemi ulega podziałowi na zwierciadle półprzepuszczalnym P na dwie wiązki , które dalej odbijają się od zwierciadeł A lub B i spotykają się na zwierciadle półprzepuszczalnym , by ostatecznie trafić do obserwatora O

Pomiar różnicy czasu $\Delta t = t_2 - t_1$ biegu światła odbitego od zwierciadeł A i B można przeprowadzić dokonując analizy interferencji światła biegnącego po obu drogach.

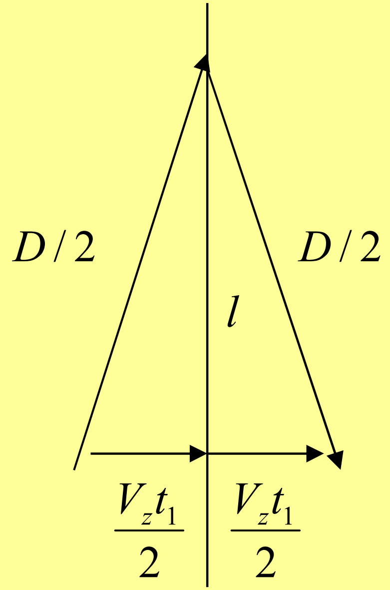
Interferencja ta jest konstruktywna gdy $n\lambda = c\Delta t$ gdzie $\lambda$-długość fali świetlnej, $n$-liczba całkowita

*W doświadczeniu Michelsona-Morleya można by oczekiwać pojawienia się różnicy czasu biegu światła odbitego od zwierciadeł A i B gdyby prawdziwe było założenie iż prędkość światła zależy od prędkości ruchu Ziemi $V_Z$ względem eteru (próżni) w której rozchodzi się światło.*

*Gdy światło biegnie wzdłuż linii równoległej do kierunku prędkości Ziemi to w zgodzie z mechanika klasyczną czas pokonania przez światło w tą i z powrotem drogi o długości l wynosi*

$$t_2 = \frac{l}{c - V_z} + \frac{l}{c + V_z} = \frac{2lc}{c^2 - V_z^2} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{V_z}{c}\right)^2}$$

*Przy ruchu w kierunku prostopadłym do ruchu Ziemi światło w układzie nieruchomym pokonuje w czasie $t_1$ drogę*




$$D = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{V_z t_1}{2}\right)^2}$$

*a czas jej pokonania spełnia relacje*

$$t_1 = \frac{D}{c} = \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{V_z t_1}{2}\right)^2}}{c} \Rightarrow t_1 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_z^2}{c^2}}}$$

*Różnica czasów*

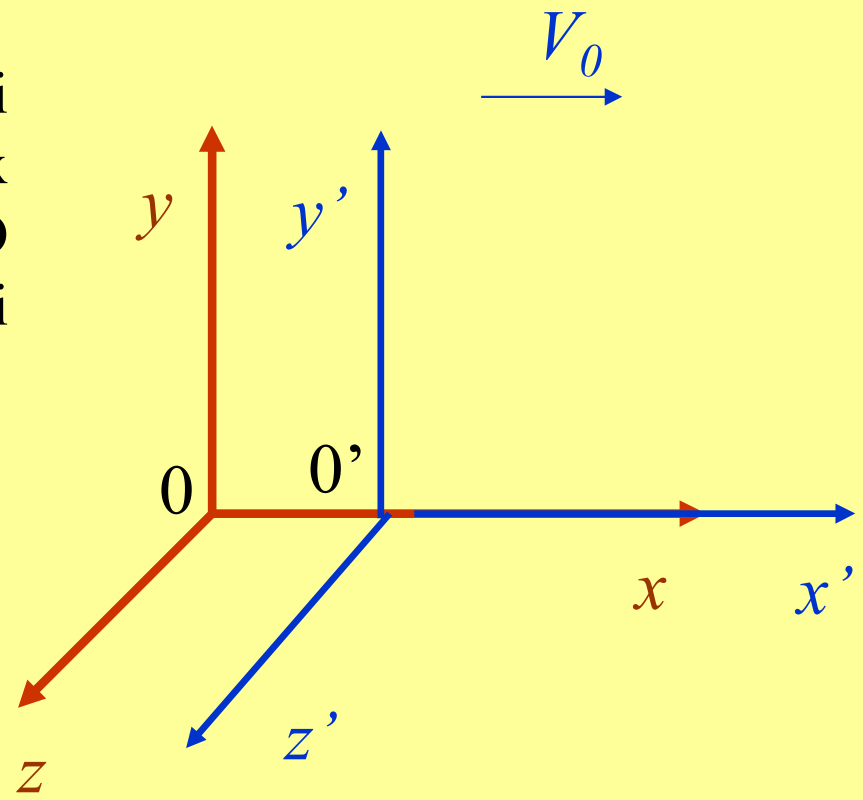
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l}{c}\left[\cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{V_z}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_z}{c}\right)^2}}\right] \overset{\frac{V_z}{c} \to 0}{\approx} \frac{LV_z^2}{c^3}$$

*W eksperymencie nie zaobserwowano żadnej różnicy czasów, mimo iż przyjęta technika eksperymentalna umożliwiała na zaobserwowanie wyznaczonej różnicy czasów*

# Poszukiwanie transformacji Lorentza-1 sposób (dla zainteresowanych)

Opisywane doświadczenie związane z emisją i odbiorem sygnału można uznać za sposób pomiaru czasu. Obserwowany efekt dylatacji czasu nie wiąże się ze sposobem pomiaru czasu , lecz jest prawem fizyki.

Zakładamy iż w chwili $t$=t'=0 początki układów O i O' pokrywały a układ O' porusza się wzdłuż osi Ox z prędkością $V_0$ mierzoną w układzie O Transformacje Lorentza pomiędzy tymi układami przewidujemy w postaci:




$$x = Ax' + Bt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = Et' + Fx'$$

*A,B,E,F- współczynniki do wyznaczenia*

Dla dwóch zdarzeń zachodzących w układzie O' w odstępie czasu $\Delta t' = t_2^{'} - t_1^{'}$ w odległości $\Delta x' = x_2^{'} - x_1^{'}$ wzory na odstęp czasu i odległości w układzie O przyjmują postać

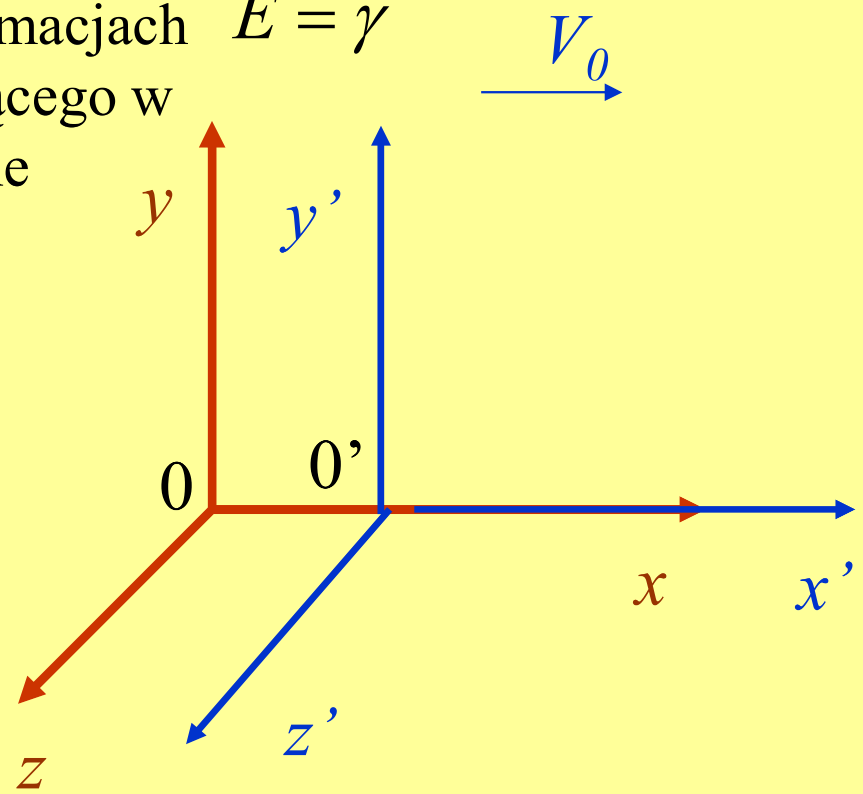
$$\Delta x = x_2 - x_1 = A\Delta x' + B\Delta t' \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = E\Delta t' + F\Delta x'$$

$$x = Ax' + Bt' \qquad \Delta x = A\Delta x' + B\Delta t'$$
$$\Rightarrow$$
$$t = Et' + Fx' \qquad \Delta t = E\Delta t' + F\Delta x'$$

*A,B,E,F- współczynniki do wyznaczenia*

1) Rozważamy 2 zdarzenia w układzie O' dla których $\Delta x' = 0$ zachodzące w punkcie *x'=0* czyli początku układu *O'* w odstępie czasu $\Delta t' = t_2' - t_1'$
Na skutek dylatacji czasu odstęp czasu miedzy tymi zdarzeniami określony w układzie *O* jest równy $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta t'$ $\gamma = 1\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}$

Relacja powyższa będzie spełniona gdy $t_1 = \gamma t_1'$ $t_2 = \gamma t_2'$
czyli trzeba przyjąć iż w zapostulowanych transformacjach $E = \gamma$
Położenie zajścia *i*-tego zdarzenia (*i*=1,2) zachodzącego w układzie O' w punkcie $x_i'=0$ w układzie O jest dane wzorem $x_i = V_o t_i$




Położenie to można wykorzystując zapostulowaną transformacje wyrazić też wzorem

$$x_i = Ax_i' + Bt_i' = Bt_i'$$

Z porównania obu relacji wynika iż

$$V_o t_i = Bt_i' \Rightarrow B = V_0 \frac{t_i}{t_i'} = V_0 \gamma$$

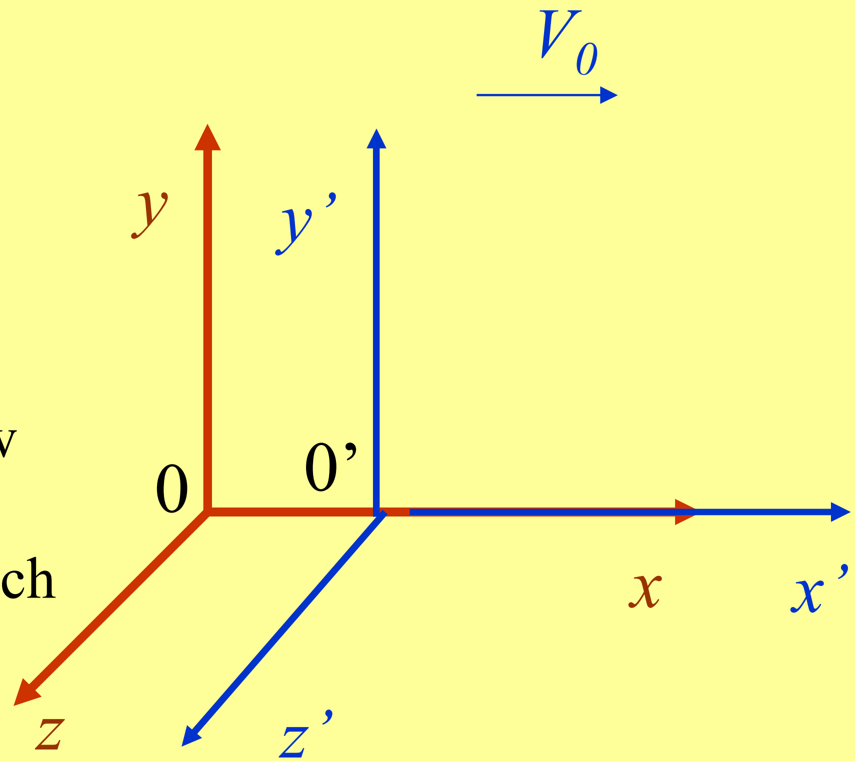
$$x = Ax' + V_0 \gamma t'$$

*A,F- współczynniki do wyznaczenia*

$$t = \gamma t' + Fx'$$

2) Rozważamy zdarzenie zachodzące w punkcie *x=0* czyli w początku układu *O* w czasie *t'* mierzonym w układzie *O'*. Położenie tego zdarzenia w układzie *O'* będzie określone wzorem $x' = -V_o t'$

A zatem uwzględniając transformacje $x = Ax' + V_0 \gamma t'$ mamy $x = -AV_o t' + V_0 \gamma t' = V_o t'(-A + \gamma)$




Ponieważ z założenia $x=0$ to $A=\gamma$

$$x = \gamma(x' + V_0 t')$$

$$t = \gamma t' + Fx'$$

3) Rozważmy sygnał świetlny wysłany w x=x'=0 w chwili $t=t'=0$ w kierunku wyznaczonym przez osie Ox=Ox' z prędkością *c*. Położenia punktów w których się on pojawi w układach O i O' po czasie odpowiednio równym odpowiednio *t* i *t'* można wyrazić wzorami $x = ct$ $\quad x' = ct'$

$$x = ct \qquad x' = ct'$$

*Po uwzględnieniu konieczności spełnienia tych relacji w zapostulowanej transformacji*

$$x = \gamma\left(x' + V_0 t'\right) \qquad t = \gamma t' + F x'$$

*otrzymujemy relacje*

$$ct = \gamma\left(ct' + V_0 t'\right) \qquad t = \gamma t' + F c t'$$

*które można zapisać w postaci*

$$ct = \gamma t'\left(c + V_0\right) \quad (1) \qquad t = t'\left(\gamma + Fc\right) \quad (2)$$

*Po podzieleniu stronami relacji (1) przez (2) otrzymujemy*

$$c = \frac{\gamma\left(c + V_0\right)}{\gamma + Fc} \Rightarrow c\gamma + c^2 F = c\gamma + V_0\gamma \Rightarrow F = \frac{V_0\gamma}{c^2}$$

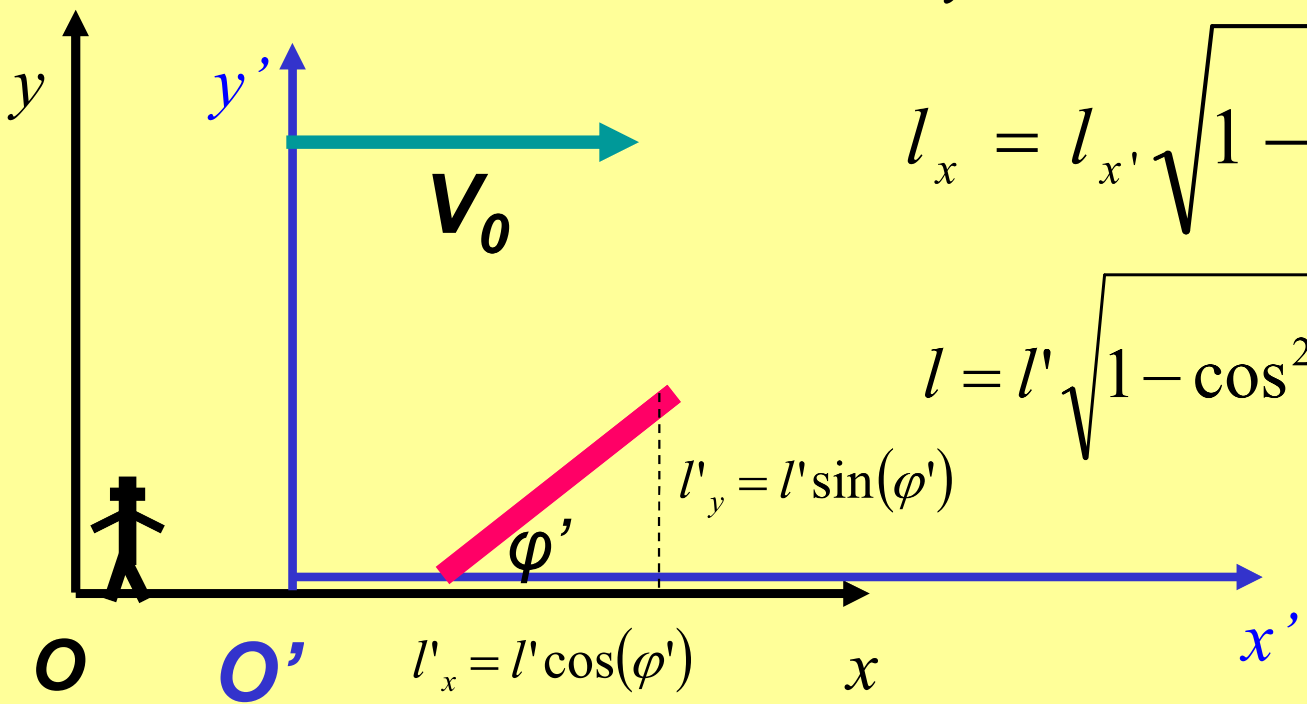
$$\begin{array}{c} x = \gamma\left(x' + V_0 t'\right) \\ t = \gamma t' + F x' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = \gamma\left(x' + V_0 t'\right) \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{V_0}{c^2} x'\right) \end{array}$$

## Zmiana kształtu przedmiotów przy zmianie układu inercjalnego

*W układzie nieruchomym O skróceniu ulęgają tylko te wymiary poruszających się obiektów które są równoległe do kierunku ruchu układu O'. Wymiary prostopadłe do kierunku ruchu układu nie ulegają zmianie.*

*Przykład : Względem układu O porusza się ze stałą prędkością $V_0$ wzdłuż osi x układ O'. W układzie O' znajduje się pręt o długości $l'$ tworzący kąt $\varphi'$ z osią x'. Można pokazać iż w układzie O długości $l_x, l$ oraz kąt $\varphi$ są inne niż w układzie O'.*

*Wartości tych wielkości w układzie O:*




$$l_x = l_{x'}\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}} \qquad l_y = l_y'$$

$$l = l'\sqrt{1-\cos^2(\varphi')\frac{V_0^2}{c^2}} \qquad tg\varphi = \frac{tg\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}$$

*W układzie O' rzuty długości pręta na osie Ox' i Oy' wynoszą:*

$$l_x' = l'\cos(\varphi')$$
$$l_y' = l'\sin(\varphi')$$

*W układzie O są one równe :*

$$l_x = l'\cos(\varphi')\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}$$
$$l_y = l'\sin(\varphi')$$

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{l'^2\cos^2(\varphi')\left(1-\frac{V_0^2}{c^2}\right)+l'^2\sin^2(\varphi')}$$

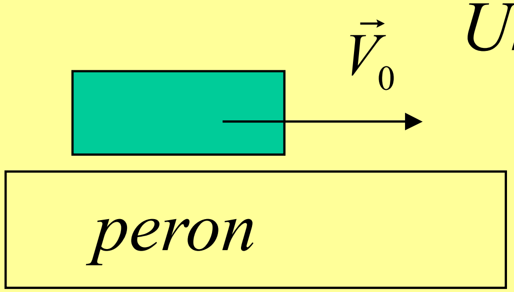
$$= \sqrt{l'^2\cos^2(\varphi') - l'^2\cos^2(\varphi')\frac{V_0^2}{c^2} + l'^2\sin^2(\varphi')} = l'\sqrt{1-\cos^2(\varphi')\frac{V_0^2}{c^2}}$$

*Kąt nachylenia pręta zmierzony w układzie O:*

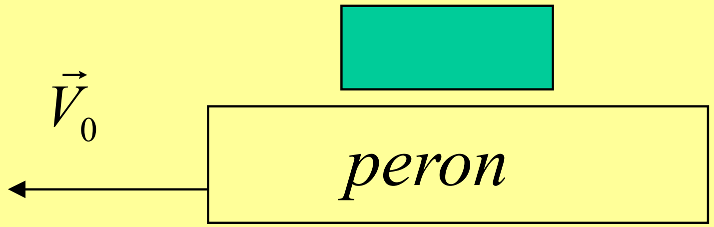
$$tg\varphi = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l'\sin\varphi'}{l'\cos\varphi'\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}} = \frac{tg\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}$$

# Związek skrócenia długości z dylatacją czasu

*Układ Jacka*




*Układ Agaty*




Przez stacje wzdłuż peronu przejeżdża pociąg z prędkością $V_0$

Układ Jacka O-układ w którym peron spoczywa a pociąg się porusza

Układ Agaty O' -układ w którym peron się porusza a pociąg spoczywa

Wyniki pomiar długości peronu i czasu przejazdu początku (lub końca) pociągu przez stację w układzie Jacka $L_0$, $\Delta t$

w układzie Agaty $L$, $\Delta t_0$

*Ze względu na dylatację czasu* $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V_0^2}{c^2}}}$

Związki między długością peronu i czasem jazdy pociągu

*w układzie Jacka* $L_0 = V_0 \Delta t$ *w układzie Agaty* $L = V_0 \Delta t_0$

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} \longrightarrow L < L_0$$

# Związek skrócenia długości z dylatacją czasu (opis sytuacji z pociągiem z poprzedniej transparencji)

Przez stacje przejeżdża pociąg wzdłuż peronu z prędkością $V_0$

1) Pomiar długości peronu wykonany przez Jacka w układzie w którym peron spoczywa daje wynik $L_0$

2) Agata mierzy długość peronu w układzie związanym z pociągiem rejestrując czasy, kiedy pociąg mija początek i koniec peronu i otrzymuje wynik $L<L_0$

3) Agata mierzy czas jazdy pociągu przez stację jako różnicę czasów dwóch zdarzeń: mijania przez nią początku i końcu peronu uzyskując wynik $\Delta t_0$, jest to czas własny gdyż oba te zdarzenia w jej układzie zaszły w tym samym miejscu

*4)* Jacek mierzy czas jazdy pociągu przez stacje w układzie w którym pociąg się porusza z prędkością $V_0$ jako różnice czasów zajścia zdarzeń związanych z mijaniem przez Agatę początku i końca peronu uzyskując w wyniku $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}$

Nie jest to czas własny procesu przejazdu pociągu przez stacje gdyż oba zdarzenia zachodzą w jego układzie w rożnych miejscach

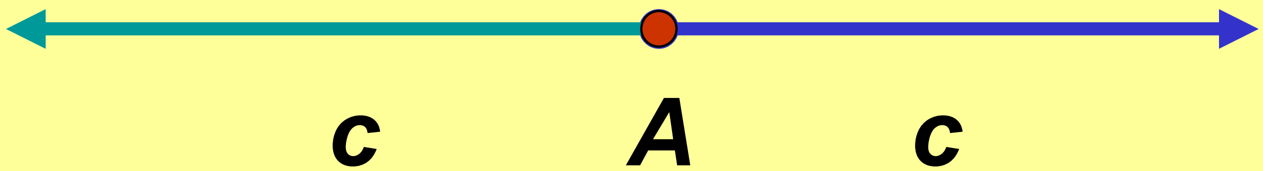
## Związki między długością peronu i czasem jazdy pociągu

*w układzie Jacka* $L_0 = V_0 \Delta t$ *w układzie Agaty* $L = V_0 \Delta t_0$

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}} \longrightarrow L < L_0$$

***Przykład*** *wskazujący na niezależność prędkości światła od inercjalnego układu odniesienia*

*Dwa fotony zostały wyemitowane z punktu A w przeciwnych kierunkach. Znaleźć ich prędkość względną.*




$V_x = -c$ *Prędkość fotonu "zielonego" w układzie nieprimowanym*

$V_0 = c$ *Układ primowany wiążemy z fotonem "niebieskim" , który porusza się w prawo z prędkością światła*

$$V_x' = \frac{V_x - V_0}{1 - \frac{V_x' V_0}{c^2}} = \frac{-c-c}{1 - \frac{(-c)(c)}{c^2}} = -c$$

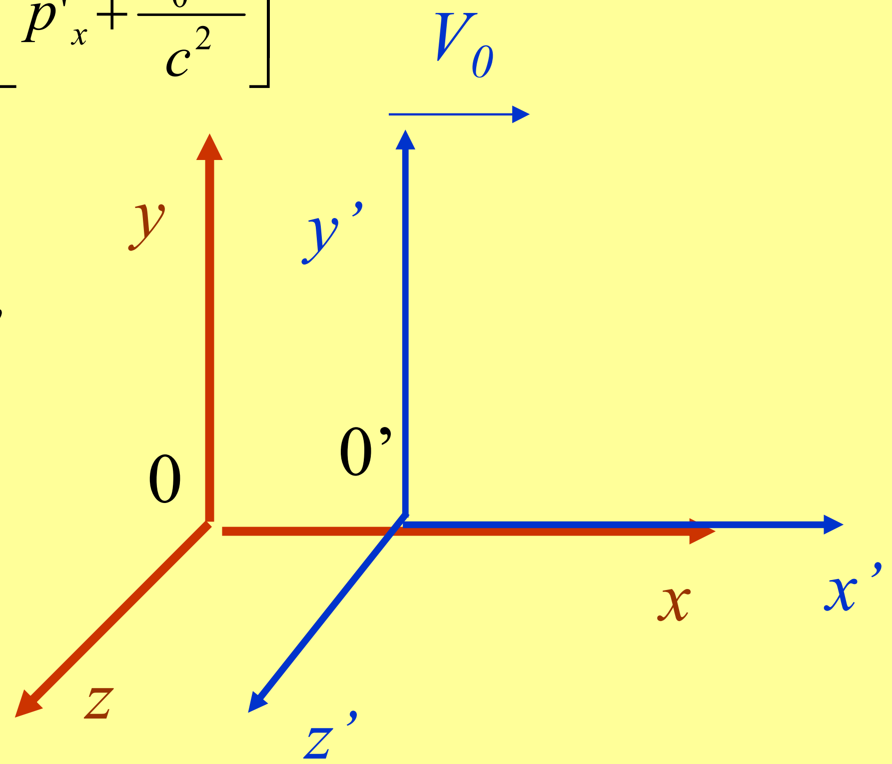
*Prędkość fotonu ,'zielonego" w układzie primowanym*

# Transformacje Lorentza dla energii całkowitej i pędu

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[p_x - \frac{V_0 E}{c^2}\right] \qquad p_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[p'_x + \frac{V_0 E'}{c^2}\right]$$

$$p'_y = p_y \qquad p_y = p'_y$$

$$p'_z = p_z \qquad p_z = p'_z$$




$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[E - V_0 p_x\right] \qquad E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[E' + V_0 p'_x\right]$$

## Wyprowadzenie transformacji Lorentza dla energii i pędu (układ primowany porusza się względem nieprimowanego wzdłuż osi Ox z prędkością $V_0$ )

*Dowód relacji* $$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\frac{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Wiadomo iż
$$V_x'=\frac{V_x-V_0}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\qquad V_y'=\frac{V_y\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\qquad V_z'=\frac{V_z\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_x'^2+V_y'^2+V_z'^2}{c^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(V_x-V_0)^2+\left(1-\frac{V_0^2}{c^2}\right)(V_y^2+V_z^2)}{\left(1-\frac{V_0V_x}{c^2}\right)^2c^2}}}=\frac{\left(1-\frac{V_0V_x}{c^2}\right)c}{\sqrt{c^2-2V_0V_x+\frac{V_0^2V_x^2}{c^2}-V_x^2+2V_0V_x-V_0^2-\left(1-\frac{V_0^2}{c^2}\right)(V_y^2+V_z^2)}}=$$

$$\frac{\left(1-\frac{V_0V_x}{c^2}\right)c}{\sqrt{c^2-V_0^2-V_x^2\left(1-\frac{V_0^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{V_0^2}{c^2}\right)(V_y^2+V_z^2)}}=\frac{\left(1-\frac{V_0V_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}-\left(1-\frac{V_0^2}{c^2}\right)\frac{(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}{c^2}}}=\frac{\left(1-\frac{V_0V_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}{c^2}}}$$

$$E=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\qquad p_x=\frac{m_o V_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\qquad p_y=\frac{m_o V_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\qquad p_z=\frac{m_o V_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

*gdzie*

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}$$

$$E'=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}\qquad p_x^{'}=\frac{m_o V_x^{'}}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}\qquad p_y^{'}=\frac{m_o V_y^{'}}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}\qquad p_z^{'}=\frac{m_o V_z^{'}}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}$$

$$V'=\sqrt{V_x^{'2}+V_y^{'2}+V_z^{'2}}$$

Wiadomo iż

$$V_x^{'}=\frac{V_x-V_0}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\qquad V_y^{'}=\frac{V_y\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\qquad V_z^{'}=\frac{V_z\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}$$

Wcześniej pokazano iż

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\frac{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

A zatem

$$E'=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\frac{V_0 m_o V_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[E-V_0p_x\right]$$

$$p_x^{'}=\frac{m_o V_x^{'}}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[\frac{m_0 V_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\frac{m_0 V_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[p_x-\frac{V_0E}{c^2}\right]$$

$$p_y^{'}=\frac{m_o V_y^{'}}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}=\frac{m_0 V_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=p_y$$

# Dowód niezmienniczości zasady zachowania pędu i energii przy przechodzeniu między inercjalnymi układami współrzędnych

Załóżmy iż układ składający się z *n* ciał jest izolowany od otoczenia a zatem pęd układu i całkowita energia układu nie ulega zmianie w czasie.

W układzie O zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ix} = A \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{iy} = B \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{iz} = C \qquad \sum_{i=1}^{n} E_i = D \qquad A,B,C,D \text{ -stałe}$$

W układzie ruchomym O' poruszającym się względem układu O ze stałą prędkością $V_0$=const skierowaną równolegle do osi Ox zachodzi

$$E_i^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[E - V_0 p_{ix}\right] \qquad p_{ix}^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[p_x - \frac{V_0 E}{c^2}\right] \qquad p_{iy}^{'} = p_{iy} \qquad p_{iz}^{'} = p_{iz}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ix}^{'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left(\left[p_{ix} - \frac{V_0 E_i}{c^2}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ix} - \frac{V_0}{c^2}\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left(A - \frac{V_0}{c^2} D\right) = const$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[E_i - V_0 p_{ix}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[\sum_{i=1}^{n} E_i - V_0 \sum_{i=1}^{n} p_{ix}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}\left[D - V_0 A\right] = const$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{iy}^{'} = \sum_{i=1}^{n} p_{iy}^{'} = B = const \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{iz}^{'} = \sum_{i=1}^{n} p_{iz}^{'} = C = const$$

# Wyprowadzenie wzoru na energię kinetyczną w szczególnej teorii względności

Dla ruchu cząstki będącej punktem materialnym wzdłuż osi *Ox* pod wpływem wypadkowej siły o wartości *F* stycznej do toru ruchu mamy

$$\Delta E_k = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int \frac{d(mV)}{dt} dx = \int V d(mV)$$

Uwzględniając to iż

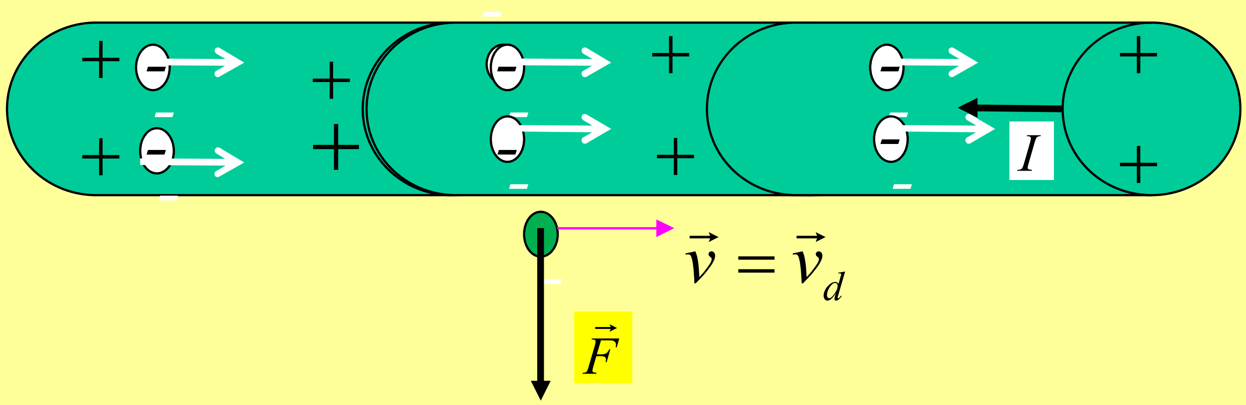
$$d(mV) = d\left(\frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \frac{d\left(\frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)}{dV} dV = m_0 \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-3/2} dV$$

otrzymujemy wzór określającej przyrost energii kinetycznej ciała przy wzroście jego prędkości od $V_p$ do $V_k$

$$\Delta E_k = \int V d(mV) = \int_{V_p}^{V_k} m_0 V \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-3/2} dV = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_k^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_p^2}{c^2}}}\right)$$

Przyjmując w ostatnim wzorze $V_p=0$ i uwzględniając to iż ciało spoczywające nie posiada energii kinetycznej otrzymujemy wzór relatywistyczny na energie kinetyczną ciała.

## Związek miedzy wartościami siły Lorentza działającej na cząstkę poruszającą się wzdłuż przewodnika z prądem z prędkością równa prędkości dryfu ujemnych nośników prądu w układzie związanym z cząstką i w układzie nieruchomym



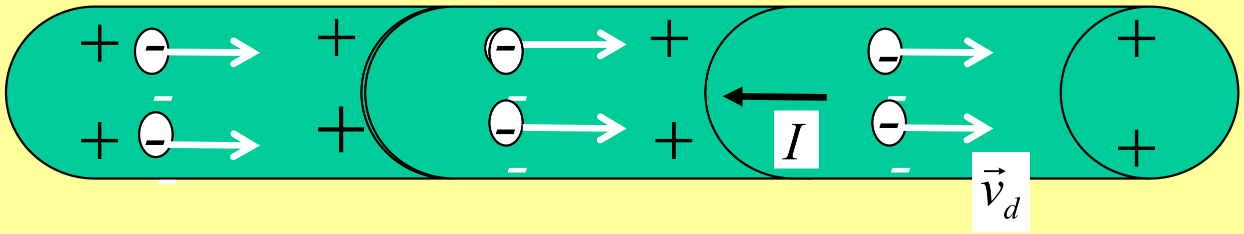

Cząstka o ładunku $q$ porusza się w kierunku równoległym do długiego przewodnika z prądem o przekroju $S$ z prędkością równą co do wartości $v_d$ - prędkości dryfu ładunków ujemnych w przewodniku (dla uproszczenia rozumowania) w kierunku przeciwnym do umownego kierunku przepływu prądu.

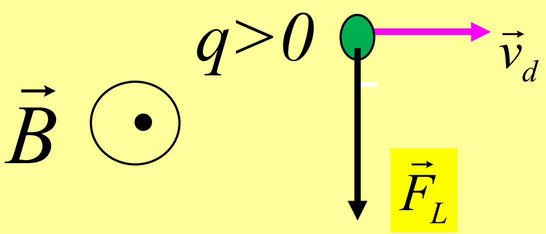
Można pokazać iż po wprowadzeniu transformacji Lorentza na cząstkę poruszającą się w kierunku równoległym do przewodnika przez który płynie prąd, siła Lorentza

$$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

działa zarówno w układzie nieruchomym jak i w układzie poruszającym się z prędkością równą prędkości cząstki choć wartości obu sił nie są jednakowe

# Opis zjawiska w układzie nieruchomym




$\rho_-$ -gęstość ładunku elektronów będących nośnikami prądu w przewodniku poruszających się z prędkością dryfu $v_d$

*Przez przewodnik płynie prąd o natężeniu* $I = jS = \rho_- v_d S$

*W odległości r od osi przewodnika ( daleko od jego końców) występuje pole magnetyczne o indukcji* $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 \rho_- v_d S}{2\pi r}$

*Na cząstkę o ładunku q działa siła Lorentza* $\vec{F}_L = q\vec{v}_d \times \vec{B}$

*ze strony pola magnetycznego o wartości* $F_L = qv_d B = \dfrac{\mu_0 \rho_- q v_d^2 S}{2\pi r}$ *skierowana w kierunku prostopadłym do przewodnika*

*W tym układzie wokół przewodnika z prądem nie występuje pole elektryczne, gdyż przewodnik jest elektrycznie obojętny*

## Opis zjawiska w układzie ruchomym (primowanym) poruszającym się z prędkością dryfu ujemnych nośników prądu

*W układzie poruszającym się z prędkością* $v_d$ *cząstka o ładunku q spoczywa a zatem nie działa na nią siła Lorentza ze strony pola magnetycznego.*
*Źródłem siły jest pole elektryczne przewodnika w którym następuje wzrost gęstości ładunku dodatniego i spadek gęstości ładunku ujemnego na skutek efektu skrócenia długości przewodnika*

*Gęstość ładunku dodatniego* $$\rho_+^{'} = \frac{q_+}{S\Delta l'} = \frac{q_+}{S\Delta l\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}}$$

*Z uwagi na to iż w układzie ruchomym ładunek ujemny spoczywa, a w układzie nieruchomym porusza się z prędkością* $v_d$

*gęstość ładunku ujemnego* $$\rho_-^{'} = \rho_-\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}} = \rho\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}$$
*( w układzie nieruchomym* $\rho_+ = \rho_- = \rho$*)*

*Wypadkowa gęstość ładunku przewodnika*

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_+ = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} - \rho\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}} = \frac{\rho v_d^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}}$$

*Łatwo można pokazać (w oparciu o prawo Gaussa) iż w odległości r od osi przewodnika pojawia się pole elektryczne o natężeniu*

$$E' = \frac{\rho' S}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho v_d^2 S}{2\pi\varepsilon_0 r c^2\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}}$$

*W polu tym na cząstkę o ładunku q działa siła*

$$F'_{el} = qE' = \frac{q\rho v_d^2 S}{2\pi\varepsilon_0 r c^2\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} \overset{c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}{=} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q\rho v_d^2 S}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} = \frac{F_l}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}}$$

*którą jak widać można wyrazić przez siłę Lorentza działającą na cząstkę w układzie nieruchomym*

$$F_{el}' = qE' = \frac{F_l}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}}$$

*Obecność czynnika* $1/\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}$ *wynika z faktu iż siłę mierzymy obecnie w układzie ruchomym.*

*Składową i-tą siły działającej w kierunku prostopadłym do prędkości układu ruchomego w obu układach wiąże relacja*

$$F_i = F_i' \sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}$$

*gdyż*

$$F_i' = \frac{dp_i'}{dt'} = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta p_i'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_i}{\Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}}} F_i$$

*Po uwzględnieniu transformacji do układu nieruchomego mamy zatem*

$$F_{el} = F_{el}' \sqrt{1-\frac{v_d^2}{c^2}} = F_L$$

**Widać iż analiza oddziaływana cząstki z przewodnikiem dokonana w obu układach odniesienia w oparciu o uniwersalne prawa fizyki prowadzi do zgodnych wyników.** Podobne rozumowanie ( nieco bardziej złożone rachunkowo) można też przeprowadzić przy założeniu dowolnej wartości prędkości *v* poruszającej się cząstki ( można pokazać iż w tym układzie $\rho' = \rho_+' - \rho_+' = \frac{\rho v v_d}{c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ J. Orear)

# Paradoks bliźniąt

1) Układ inercjalny O wiążemy z bliźniakiem A. W układzie tym bliźniak B podróżuje w jednym kierunku w trakcie czasu $\Delta t_1$=5 lat z prędkością $V_{1x}$=0.8c pokonując drogę $x=V_{1x}\Delta t_1$. Czas trwania podróży bliźniaka B w tym układzie zmierzony przez bliźniaka A nie jest czasem własnym.
2) Układ inercjalny O' wiążemy z bliźniakiem B. Czas trwania podróży w tym układzie $\Delta\tau_1$ zmierzony przez bliźniaka B jest czasem własnym (początek i koniec podroży w tym samym miejscu) w związku z czym ulega skróceniu w stosunku do czasu podroży w układzie O

$$\Delta\tau_1 = \frac{\Delta t_1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{V_{1x}^2}{c^2}}\Delta t_1 = 3 lata$$

3) Po osiągnięciu celu bliźniak B wraca do punktu startu poruszając się z prędkością $V_{2x}$=-0.8c w czasie równym $\Delta t_2$=5 lat zmierzonym przez bliźniaka A .
4) Podczas podróży powrotnej układ O'' wiążemy z bliźniakiem B poruszającym się z prędkością $V_{2x}$=-0.8c. W tym układzie czas trwania podróży jest równy

$$\Delta\tau_2 = \frac{\Delta t_2}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{V_{2x}^2}{c^2}}\Delta t_2 = 3 lata$$

5) Przy liczeniu czasu trwania całej podróży zaniedbujemy czas zawracania

Czas trwania całej podróży zmierzony przez bliźniaka B $\Delta\tau = \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 = 6 lat$

Czas trwania całej podróży zmierzony przez bliźniaka A $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 10 lat$

Różnica wieku obu bliźniaków po podróży $\Delta t - \Delta\tau = \Delta t\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V_{1x}^2}{c^2}}\right) = 4 lata$

Efekt dylatacji czasu w ruchu pojazdu w jedną stronę można też określić wyznaczając dla podróży w jednym kierunku wielkość interwału czasoprzestrzennego dla zdarzeń związanych z rozpoczęciem i końcem podróży w jednym kierunku.

W układzie S' dla ruchu przed zawróceniem mamy np. $\Delta S'^2 = c^2\Delta\tau_1^2 - \Delta x_1^{2'} = c^2\Delta\tau_1^2$

Dla tego samego ruchu w układzie S mamy

$$\Delta S^2 = c^2\Delta t_1^2 - \Delta x_1^2 = c^2\Delta t_1^2 - V_{1x}^2\Delta t_1^2 = c^2\Delta t_1^2\left(1 - \frac{V_{1x}^2}{c^2}\right)$$

Ponieważ interwał nie zależy od wyboru układu to mamy

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2 \rightarrow c^2\Delta t_1^2\left(1 - \frac{V_{1x}^2}{c^2}\right) = c^2\Delta\tau_1^2 \rightarrow \Delta t_1^2\left(1 - \frac{V_{1x}^2}{c^2}\right) = \Delta\tau_1^2$$

6) Opis całej podróży przeprowadziliśmy nie zmieniając układu inercjalnego O związanego z bliźniakiem A. Przeprowadzenie analogicznego rozumowania traktując jako układ inercjalny układ związany z bliźniakiem B w którym to bliźniak A podróżuje prowadziłoby do sprzeczności co do wieku obu bliźniaków. Przeprowadzenie jednak opisu całej podróży w układzie inercjalnym związanym z bliźniakiem B nie jest jednak możliwe z uwagi na to iż w czasie zmiany kierunku ruchu zmienia on inercjalne układy odniesienia, a szczególna teoria względności odnosi się do opisu ruchów w układach inercjalnych.

# Wyjaśnienie paradoksu bliźniąt z wykorzystaniem efektu Dopplera

1) W trakcie podróży każdy z braci wysyła sygnały świetlne z częstotliwością równą $f_0=1/rok$ mierząc czas w swoim układzie odniesienia .
2) Bliźniak podróżujący B w trakcie podróży trwającej zgodnie z jego pomiarem czasu przez czas $\Delta\tau=6$ *lat* odbiera od swego zegara $N_B=f_0\Delta\tau=6$ impulsów
3) Częstotliwość sygnału docierającego do bliźniaka B od zegara bliźniaka A jest równa

a) w trakcie oddalania się bliźniaków trwającego $\Delta\tau_1=3$ *lata*

$$f_{od}=f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

b) w trakcie zbliżania się bliźniaków trwającego $\Delta\tau_2=\Delta\tau_1=3$ *lata*

$$f_{zb}=f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

4) Bliźniak B w ciągu całej drogi odebrał od zegara bliźniaka A następującą liczbę impulsów

$$N_a=f_{od}\Delta\tau_1+f_{zb}\Delta\tau_2=f_0\Delta\tau_1\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)=f_0\frac{\Delta x_1^{'}}{V_{1x}}\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)$$

gdzie droga pokonana przez bliźniaka B w trakcie podróży w jedną stronę jest równa

$$\Delta x_1^{'}=\frac{\Delta x_1}{\gamma}=\sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x_1$$

( skrócenie długości)

A zatem

$$N_a=f_0\frac{\Delta x_1}{V_{1x}}\sqrt{1-\beta^2}\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)=f_0\frac{\Delta x_1}{V_{1x}}(1-\beta+1+\beta)=2f_0\frac{\Delta x_1}{V_{1x}}=f_0t_c=10\,impulsów$$

Taką samą liczbę impulsów od własnego zegara odbiera bliźniak A. Z obliczeń wynika iż bliźniak B odebrał 4 impulsy mniej od własnego zegara niż od zegara bliźniaka A , a zatem bliźniak A po podróży jest starszy 4 lata.