Elektrostatyka

Opisuje oddziaływania pomiędzy spoczywającymi ładunkami elektrycznymi

- Zasada zachowania ładunku
- Prawo Coulomba
- Natężenie pola elektrycznego
- Prawo Gaussa
- Potencjał pola elektrycznego
- Kondensatory, pojemność elektryczna
- Energia pola elektrycznego

Ładunek elektryczny

Ładunek cząstek swobodnie występujących w przyrodzie jest wielokrotnością ładunku elementarnego równego co do wartości $e = 1{,}603 \cdot 10^{-19}$ C.

Ładunek równy +*e* posiadają np. protony wchodzące obok neutronów w skład jąder atomowych. Ładunek –*e* posiadają np. elektrony wchodzące w skład np. atomów.

Obojętność elektryczna atomów wynika z tego iż posiadają jednakowo liczbę protonów i elektronów

Zasada zachowania ładunku

Całkowity ładunek układu odosobnionego jest stały

Dotyczy to również procesów w których zachodzi kreacja lub anihilacja cząstek

Anihilacja pary elektron-pozyton $e + e^{+} = 2\gamma$

kreacja pary elektron-pozyton $\gamma = e + e^{+}$

e^{+}=pozyton –cząstka o ładunku +e

γ -foton kwant promieniowania elektromagnetycznego o ładunku=0

Siła elektrostatyczna –Prawo Coulomba

Oddziaływanie pomiędzy spoczywającymi ładunkami elektrycznymi
jednoimiennymi $q_1q_2>0$ (siła odpychająca) i
różnoimiennymi $q_1q_2<0$ (siła przyciągająca)

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

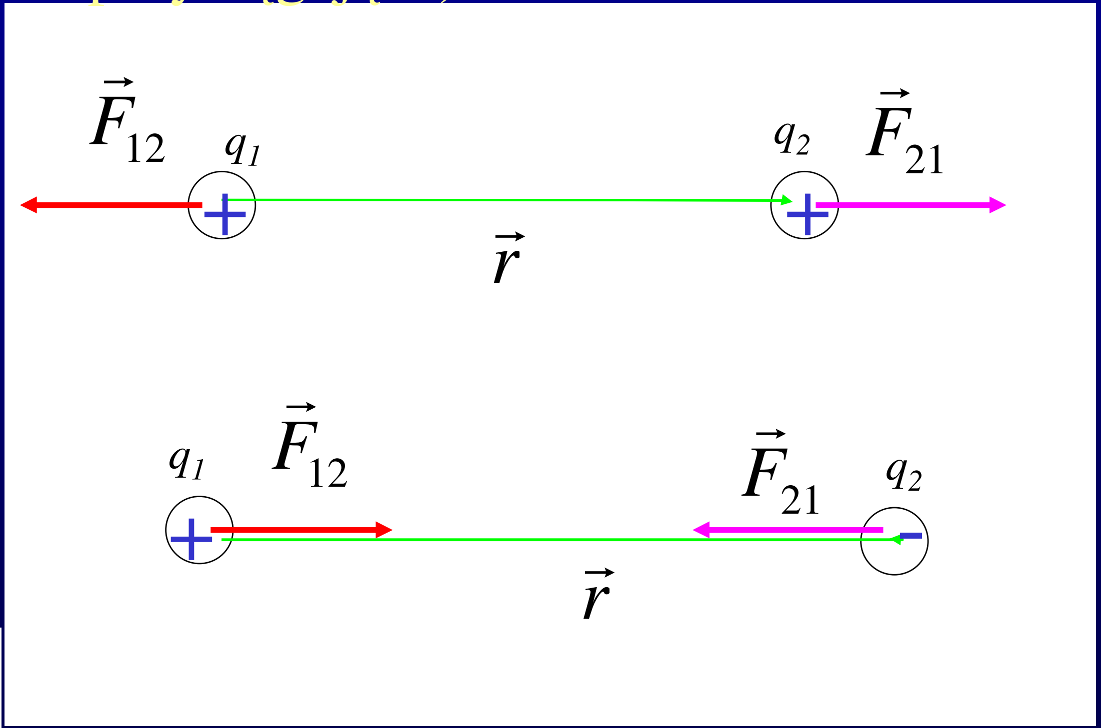
$$r = |\vec{r}|$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

ε-przenikalność elektryczna

$$\left|\vec{F}_{21}\right| = \left|\vec{F}_{12}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

W próżni $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N \cdot m^2}$

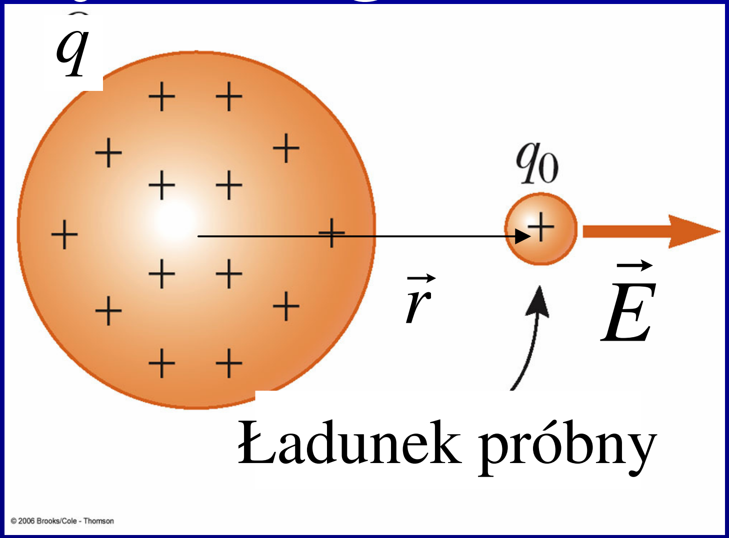


C to oznaczenie jednostki ładunku w układzie SI– kulomba

W materiale (dielektryku) o $\varepsilon>\varepsilon_0$ oddziaływanie ładunków osłabione na skutek ekranowania ładunków przez ładunki indukowane w dielektryku

Natężenie pola elektrycznego

Oddziaływanie między ładunkami jest przenoszone przez pole elektryczne. Ciało obdarzone ładunkiem wytwarza pole elektryczne . Z kolei na ciało obdarzone ładunkiem umieszczone w tym polu działa siła elektryczna



Natężenie pola to stosunek siły działającej na dodatni ładunek próbny $q_0>0$ do wartości tego ładunku

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Natężenie pola możemy mierzyć w N/C

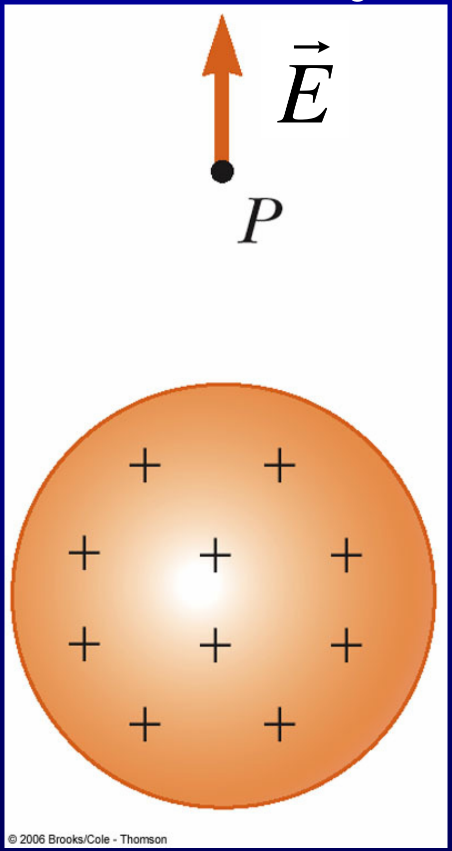
Natężenie pola w próżni pochodzącego od ładunku punktowego lub ciała o sferycznie symetrycznym rozkładzie ładunku

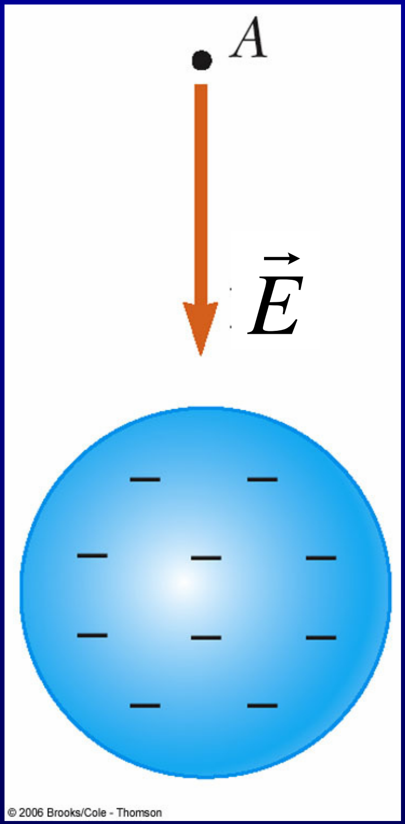
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

$$r = \left|\vec{r}\right|$$

Natężenie pola elektrycznego



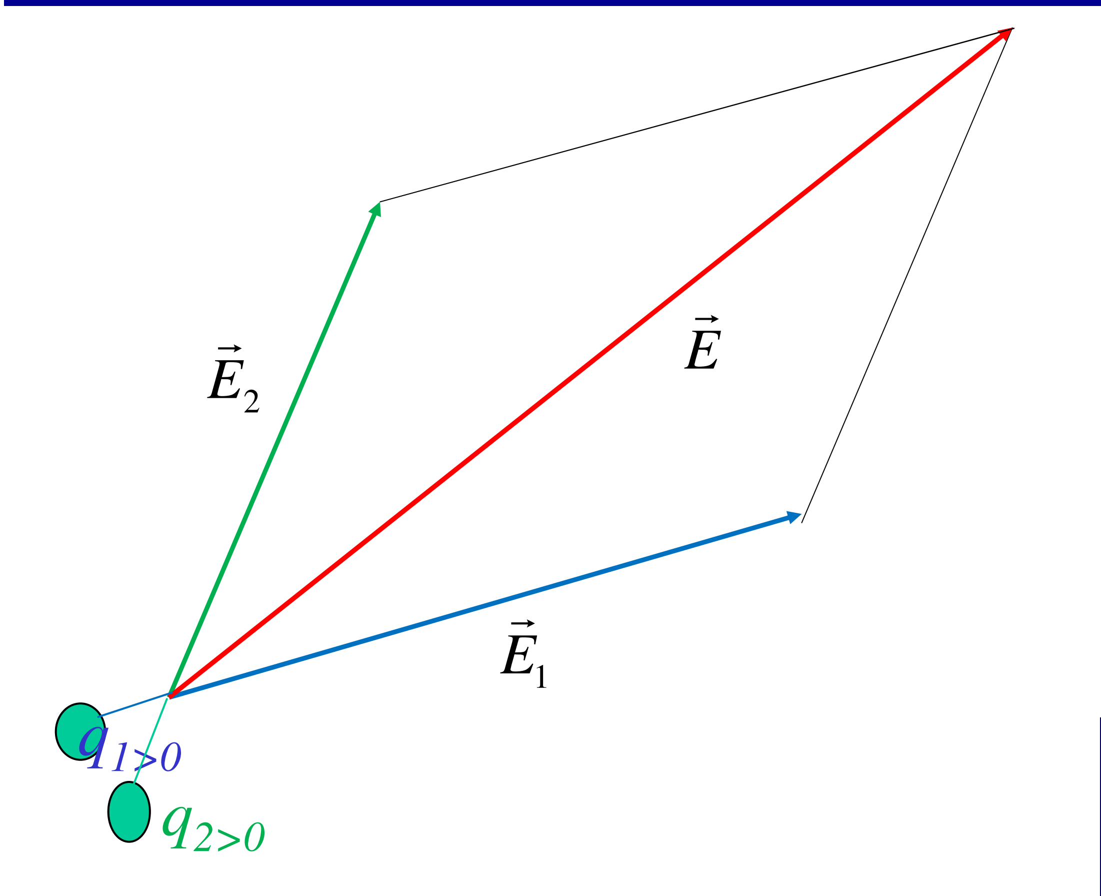


Na cząstkę o ładunku q umieszczoną w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ działa siła

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Brooks/Cole

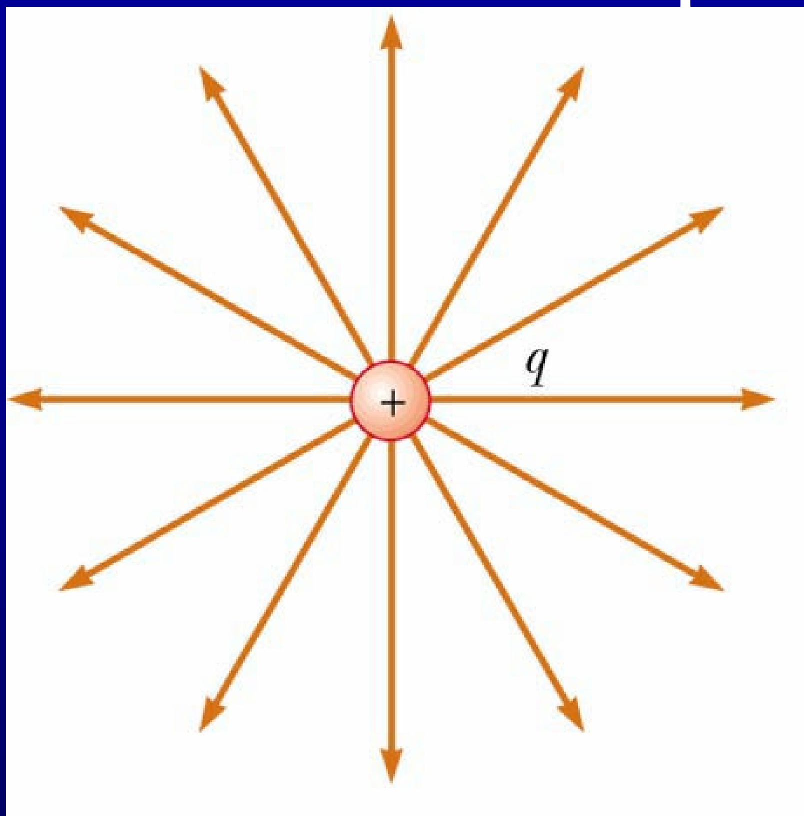
Natężenie pola elektrycznego – zasada superpozycji

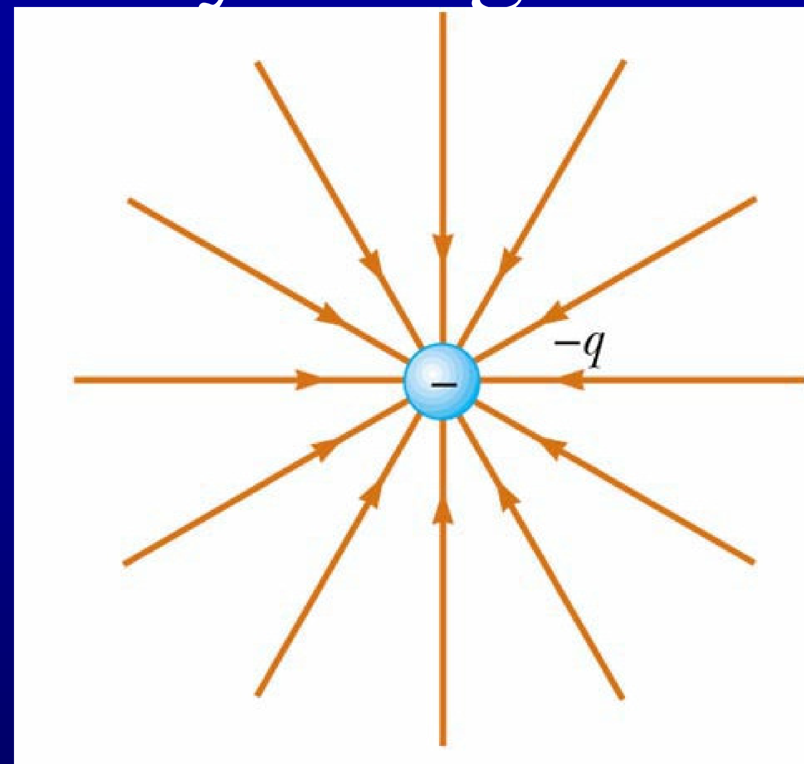


Natężenie pola wytworzonego przez kilka ładunków można określić sumując **wektorowo** natężenia pochodzące od pól wytworzonych przez każdy z ładunków.
Dla dwóch ładunków mamy

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Linie sił pola elektrycznego



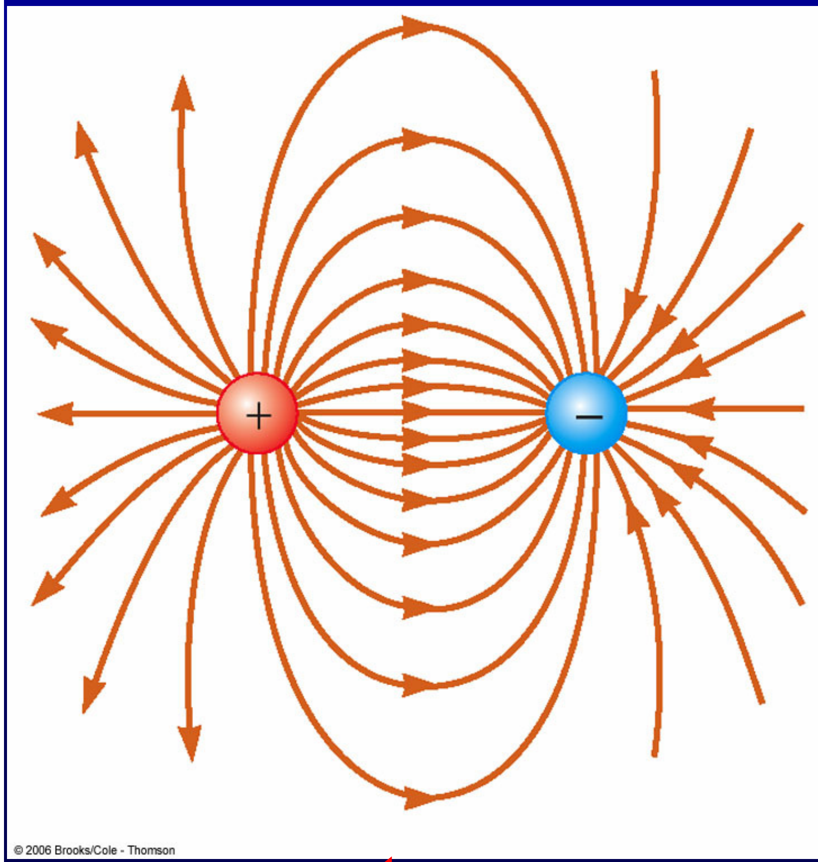


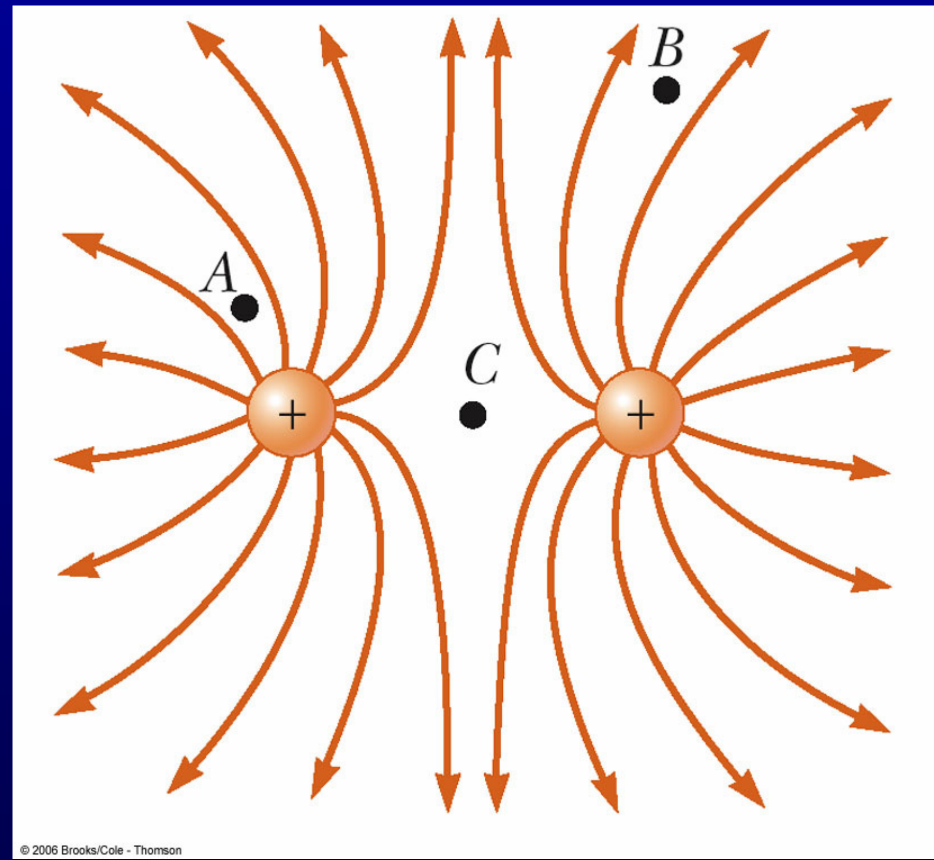
Linie sił pola są w każdym punkcie styczne do wektora natężenia pola elektrycznego. Linie pola nie przecinają się.
Często rysuje się je tak by liczba linii na jednostkę powierzchni prostopadłej do tych linii była proporcjonalna do wartości natężenia pola elektrycznego

Brooks/Cole

Linie sił pola elektrostatycznego
(wytworzonego przez spoczywające ładunki)

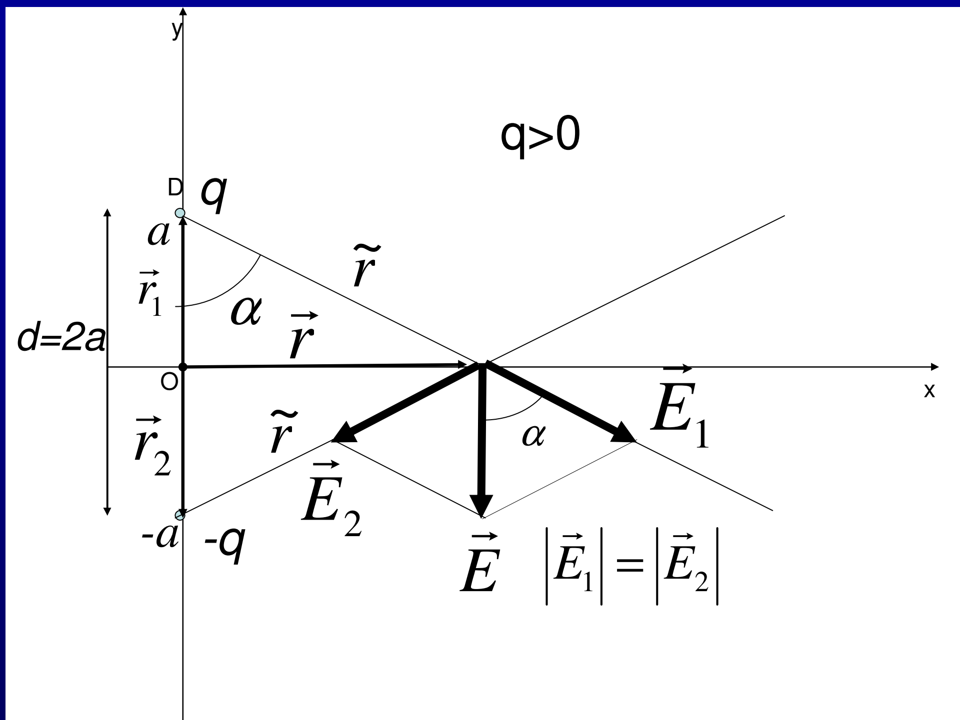
Linie pola zaczynają się na ładunkach dodatnich a kończą na ujemnych





Dipol elektryczny (układ 2 ładunków o tej samej wartości modułu ładunku
różniących się znakami położonych blisko siebie)

Przykład. Wyznaczyć natężenie pola pochodzącego do dipola elektrycznego w punkcie leżącym na prostej prostopadłej do osi dipola przechodzącej przez punkt leżący w połowie odległości między ładunkami



$$E_1 = \left|\vec{E}_1\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + a^2\right)}$$

$$E_2 = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + a^2\right)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$r = \left|\vec{r}\right|$$

$$a = \left|\vec{r}_1\right| = \left|\vec{r}_2\right|$$

$$\left|\vec{E}\right| = 2\left|E_1\right|\cos(\alpha)$$

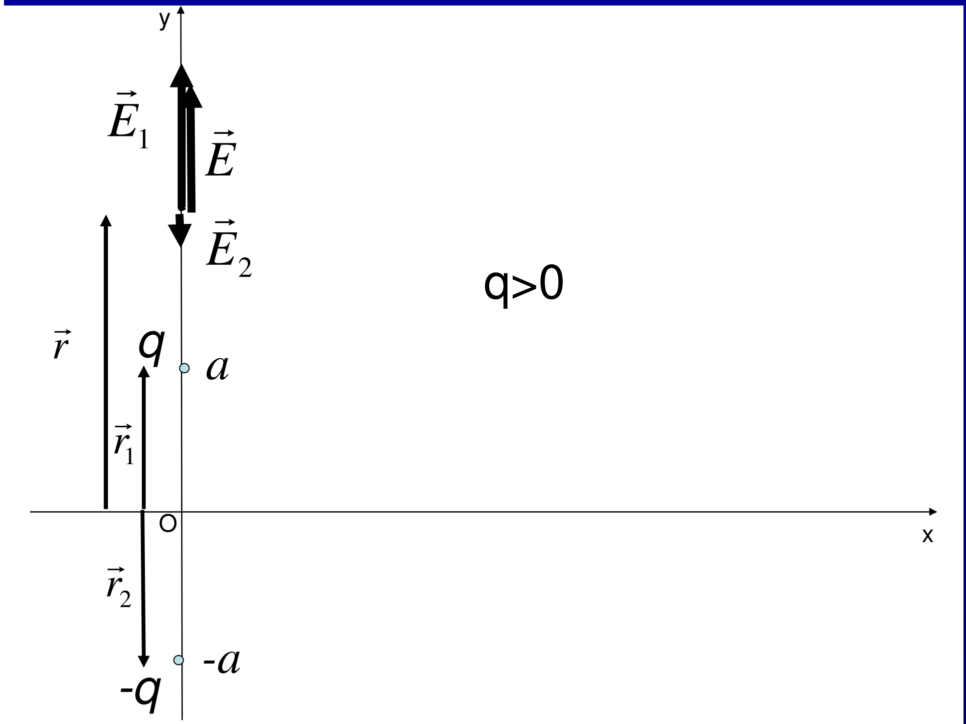
$$\left|E_1\right| = \left|E_2\right|$$

$$\left|\vec{E}\right| = 2\left|E_1\right|\cos(\alpha) = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_o(a^2 + r^2)}\cdot\frac{a}{\tilde{r}} = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_o(a^2 + r^2)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} =$$

$$= \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_o(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_o(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} \overset{r>>a}{\approx} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$p=qd$- wartość momentu dipolowego, $d=2a$-odległośc między ładunkami, r- odległość punktu obserwacji od osi dipola

Przykład. Wyznaczyć natężenie pola pochodzącego do dipola elektrycznego na osi dipola



$$E_1 = \left|\vec{E}_1\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-a)^2}$$

$$E_2 = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+a)^2}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$r = \left|\vec{r}\right|$$

$$a = \left|\vec{r}_1\right| = \left|\vec{r}_2\right|$$

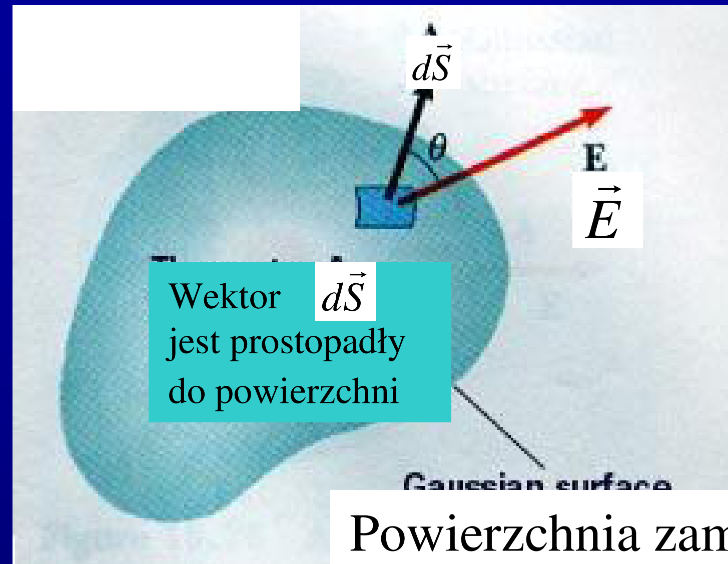
$$E = \left|\vec{E}\right| = E_1 - E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+a)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(r+a)^2-(r-a)^2}{(r-a)^2(r+a)^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4ra}{(r^2-a^2)^2}\right] = \frac{2qa}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r}{(r^2-a^2)^2}\right] \overset{d=2a}{=} \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r}{(r^2-a^2)^2}\right] \overset{p=qd}{=} \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r}{(r^2-a^2)^2}\right] \overset{r>>a}{\approx} \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Gdy rozważamy dowolne punkty leżące daleko od dipola to natężenie pola zależy w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do trzeciej potęgi odległości od dipola

Prawo Gaussa (w próżni)

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

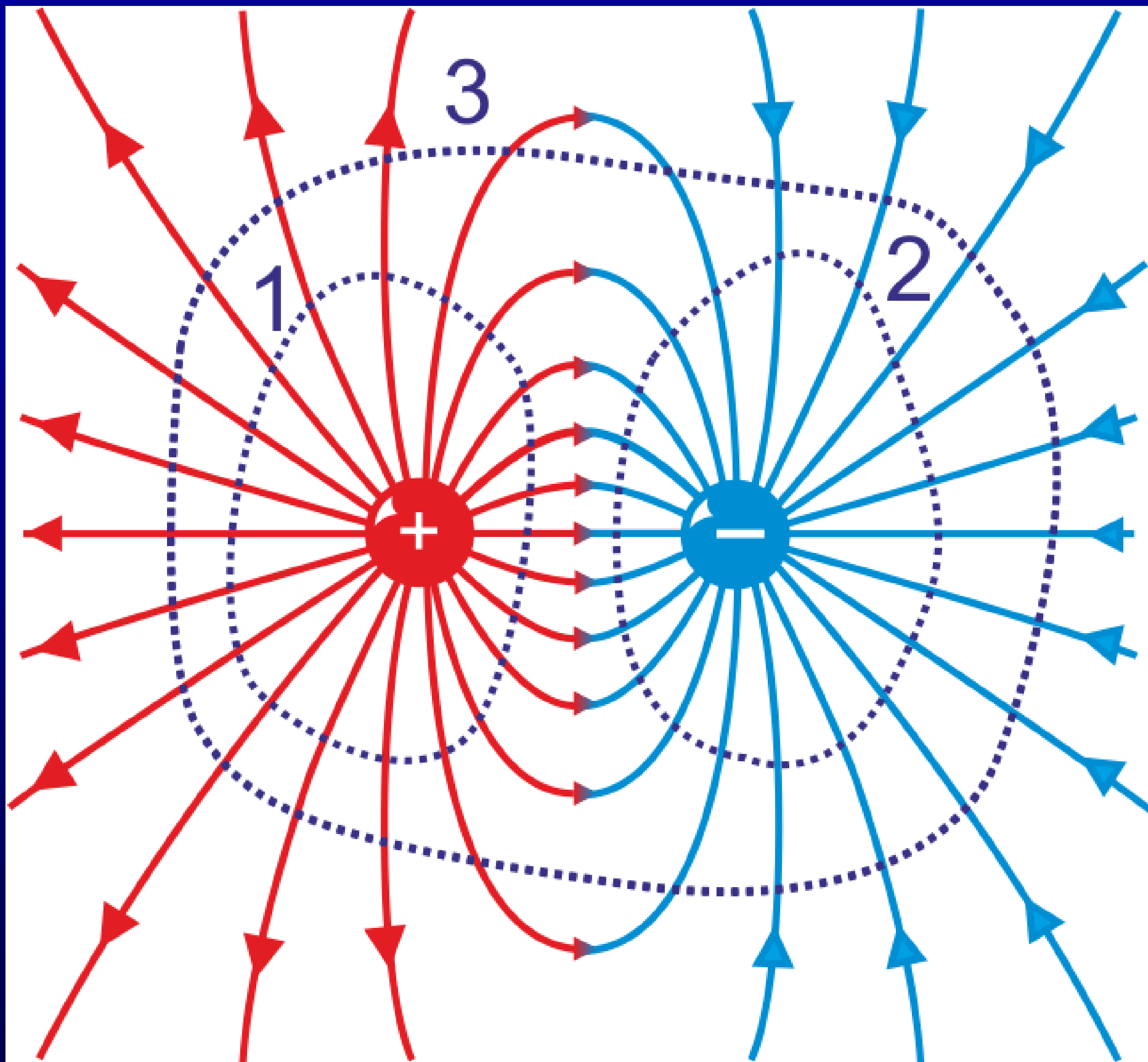


Strumień pola elektrycznego przechodzący przez powierzchnie zamkniętą otaczającą ładunek Q jest równy wartości tego ładunku podzielonemu przez przenikalność elektryczną próżni . W celu policzenia strumienia należy całą powierzchnię S podzielić na elementarne (nieskończenie małe) powierzchnie płaskie , w obrębie których można traktować $\vec{E}$ jako stałe i zsumować strumienie przechodzące przez te powierzchnie. Strumień przez powierzchnię elementarną o polu równym dS jest równy

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = EdS\cos\theta$$

gdzie $E = \left|\vec{E}\right|$

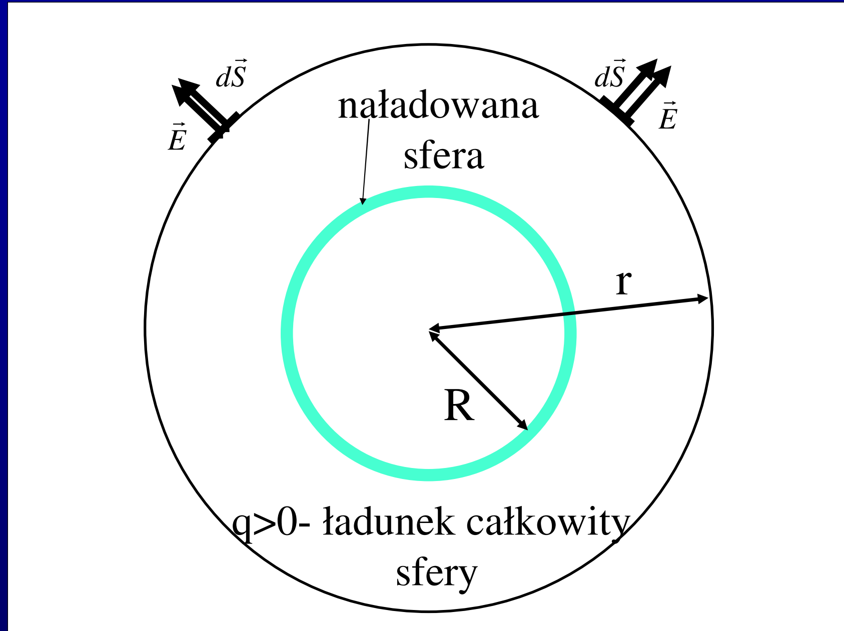
$d\vec{S}$ -wektor prostopadły do powierzchni elementarnej o długości $dS = \left|d\vec{S}\right|$ równej polu tej powierzchni . W przypadku liczenia strumienia przez powierzchnię zamkniętą wektor $d\vec{S}$ jest skierowany na zewnątrz tej powierzchni



Strumień pola elektrycznego przez powierzchnie 1 jest dodatni, przez powierzchnie 2 ujemny , a przez powierzchnie 3 równy zeru

Przykład wykorzystania prawa Gaussa do określenia natężenia pola na zewnątrz jednorodnie naładowanej sfery o promieniu *R* i ładunku *q>0*

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Za powierzchnię zamkniętą przyjmujemy sferę o promieniu *r>R* o środku leżącym w środku sfery naładowanej

$$\theta = 0$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

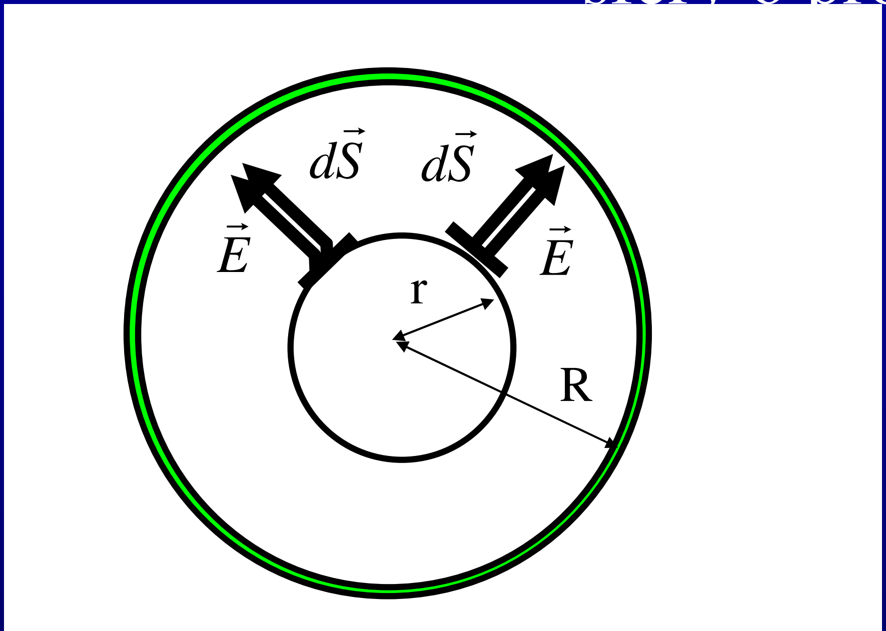
Na powierzchni sfery *E* jednakowe

Ładunek zawarty wewnątrz powierzchni zamkniętej $Q = q$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Pole pochodzące od sfery określone na zewnątrz sfery jest takie same jak pole wytworzone przez ładunek punktowy równy ładunkowi sfery umieszczony w jej środku

Przykład wykorzystania prawa Gaussa do wyznaczenia natężenia pola wewnątrz pustej równomiernie naładowanej sfery o promieniu *R*



Promień sfery obranej jako powierzchnię zamkniętą jest mniejszy od promienia sfery naładowanej *r*<*R*. Wewnątrz powierzchni zamkniętej nie znajduje się żaden ładunek

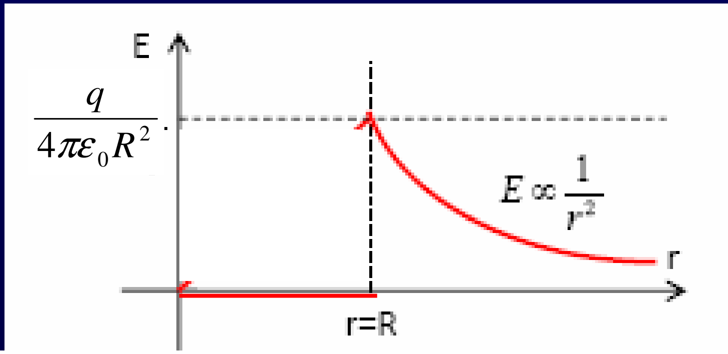
$$Q = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2$$

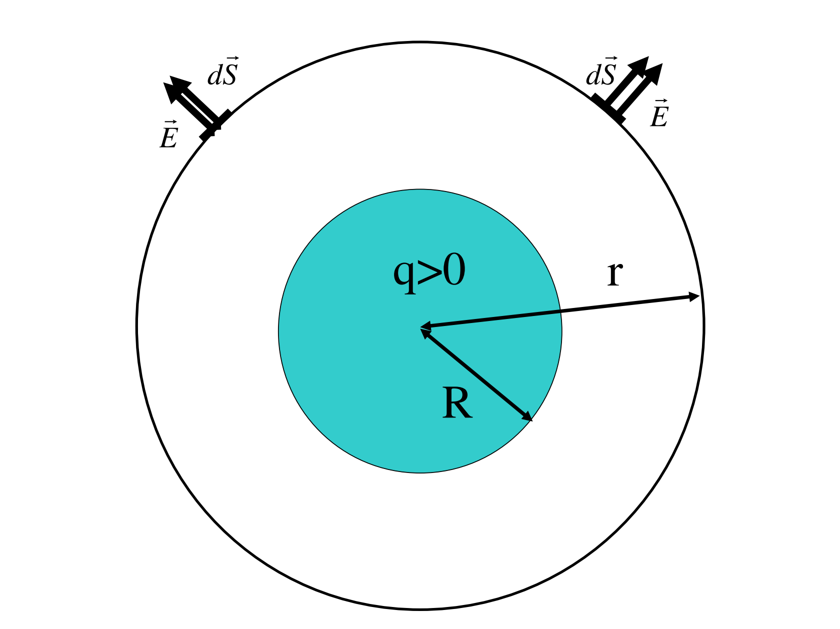
$$E = 0$$

Pole elektrostatyczne pochodzące od kuli metalicznej jest takie samo jak pole pochodzące od sfery naładowanej. W stanie równowagi, w którym ładunki pozostają w spoczynku pole elektryczne wewnątrz kuli metalicznej zawsze znika, gdyż inaczej powodowało by powstanie siły działającej na ładunki i ich przemieszczenie. Cały ładunek gromadzi się na powierzchni kuli metalicznej.



Przykład wykorzystania prawa Gaussa do określenia natężenia pola na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu *R* i ładunku *q*

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Za powierzchnię zamkniętą przyjmujemy sferę o promieniu *r*>*R* o środku leżącym w środku kuli

$\theta = 0$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

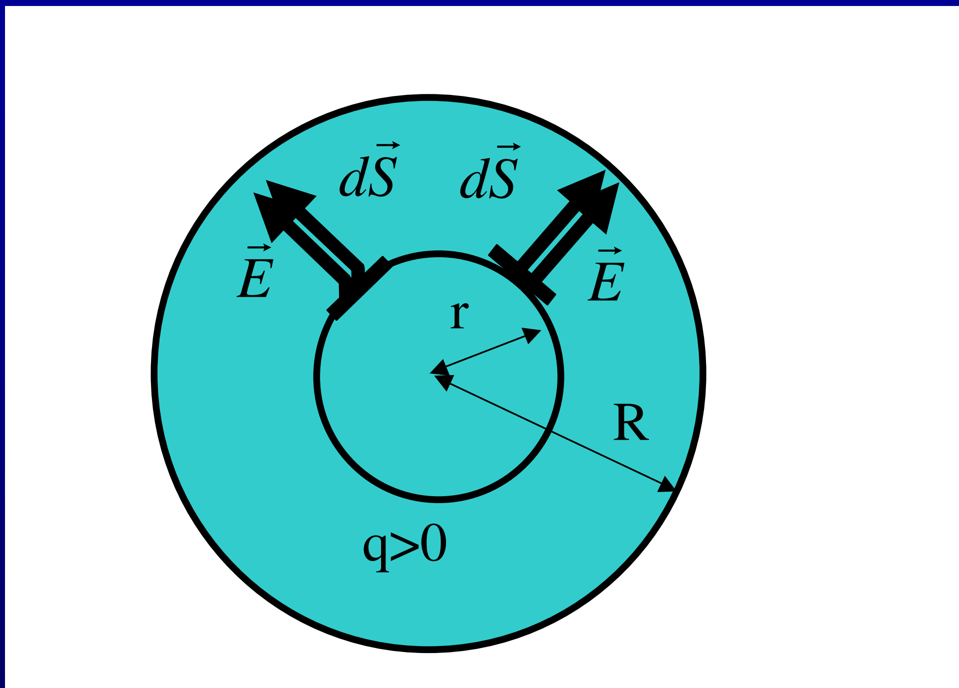
Na powierzchni sfery *E* jednakowe

Ładunek zawarty wewnątrz powierzchni zamkniętej $Q = q$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Pole pochodzące od kuli określone na zewnątrz kuli jest takie same jak pole wytworzone przez ładunek punktowy równy ładunkowi kuli umieszczony w jej środku

Przykład wykorzystania prawa Gaussa do wyznaczenia natężenia pola wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu *R*



Powierzchnia zamknięta w kształcie sfery

Promień sfery r jest mniejszy od promienia kuli $r<R$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

objętość wnętrza sfery

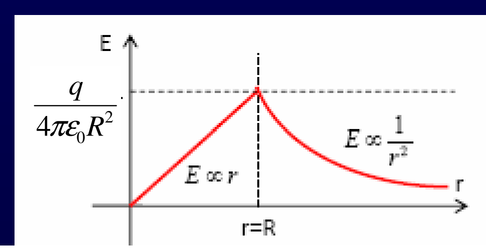
gęstość ładunku kuli

$$Q = V\rho = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}\cdot\boxed{\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}} = \frac{r^3}{R^3}q$$

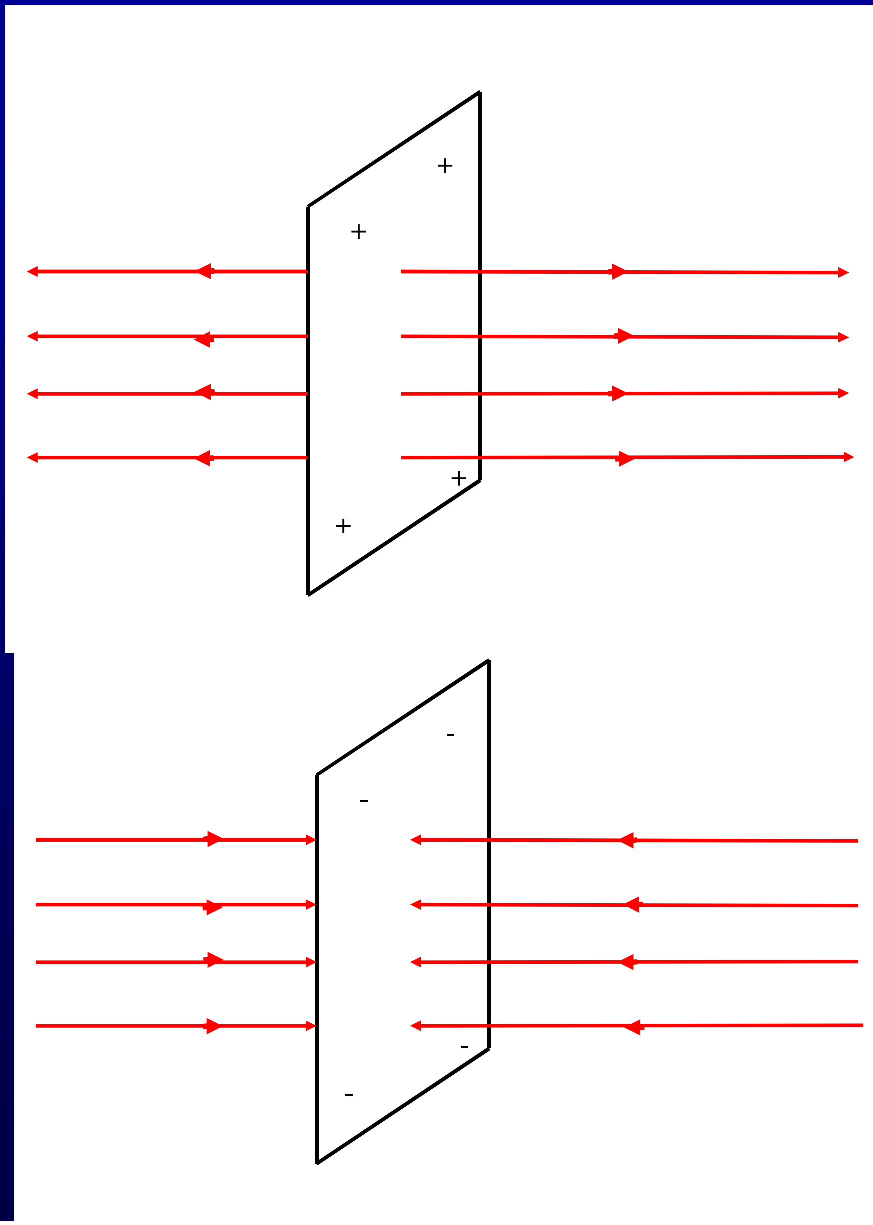
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{r^3 q}{R^3 \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



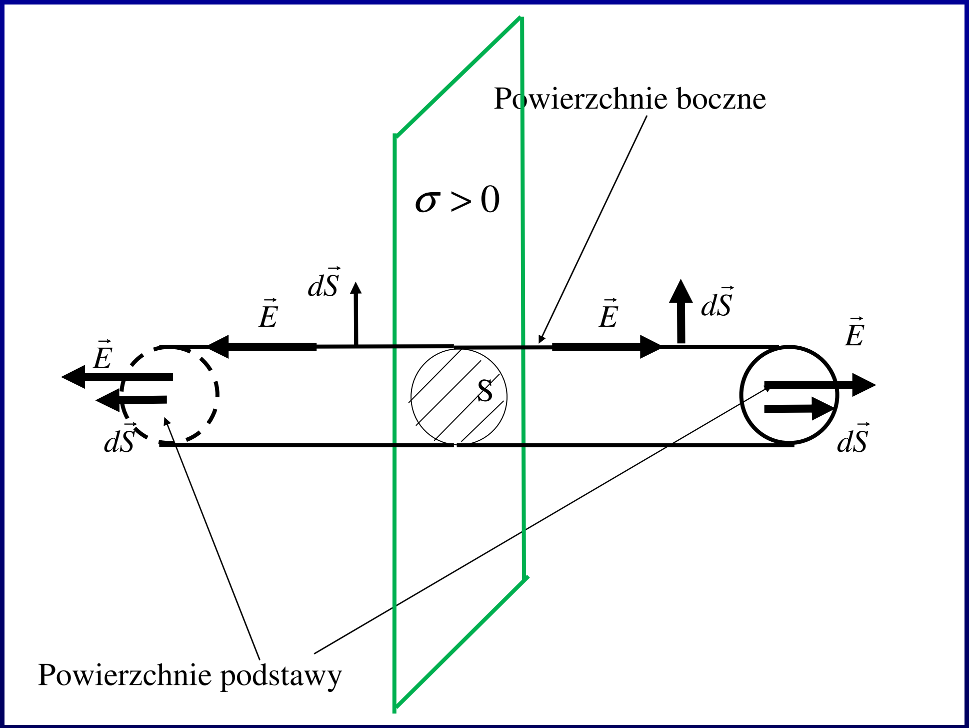
Linie sił pola elektrycznego- naładowana płaszczyzna



Linie sił pola pochodzące od płaszczyzny naładowanej ze stałą gęstością ładunku są prostopadłe do tej płaszczyzny (z dala od jej brzegów).

Pole po obu stronach płaszczyzny jest jednorodne (natężenie pola jest jednakowe w każdym punkcie)

Przykład wykorzystania prawa Gaussa do wyznaczenia natężenia pola od jednorodnie naładowanej płaszczyzny



σ- gęstość powierzchniowa ładunku, σ=*const*

$$Q = \sigma S$$

$$\oint_{pow.bocz.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{pow.bocz.} EdS \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

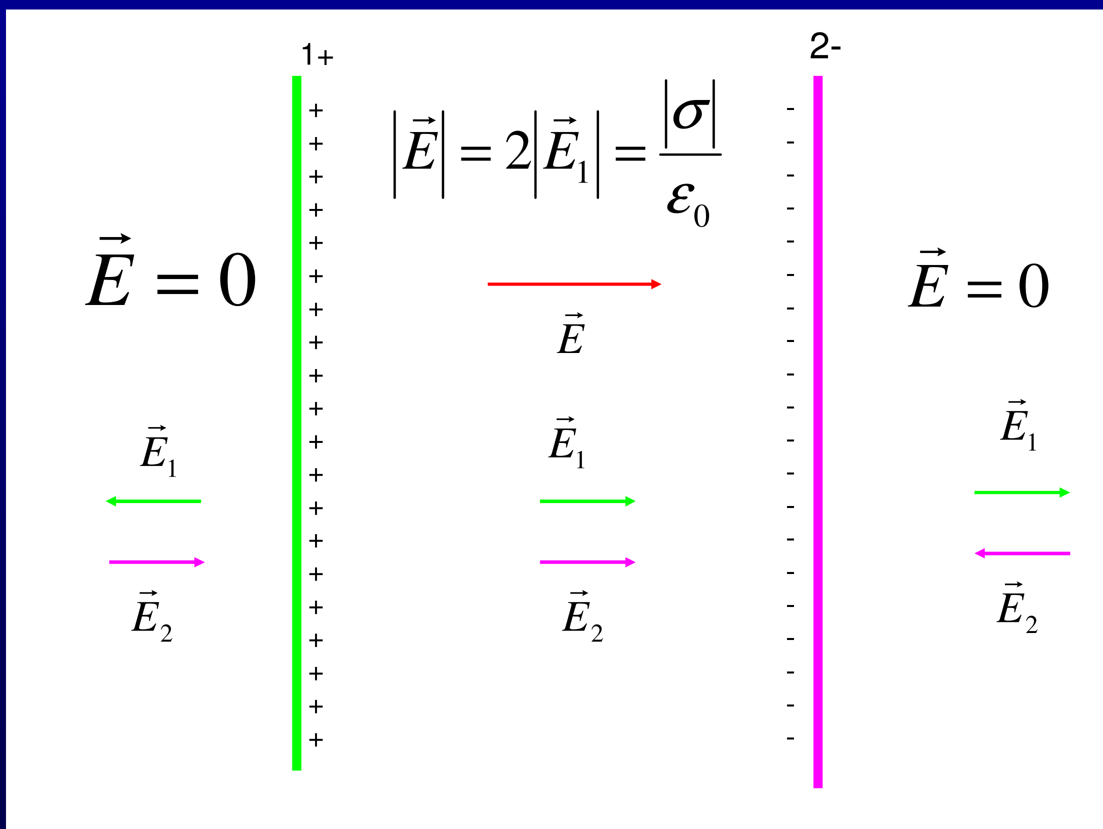
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES\cos(0) + ES\cos(0) + \oint_{pow.bocz.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES + ES + 0 = 2ES$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Powierzchnia zamknięta Gaussa w kształcie walca o polu podstawy S i osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny

Zasada superpozycji-Natężenie pola pochodzącego od dwóch płaszczyzn naładowanych ładunkiem o przeciwnym znaku (jednakowych co do modułu)



Z zasady superpozycji

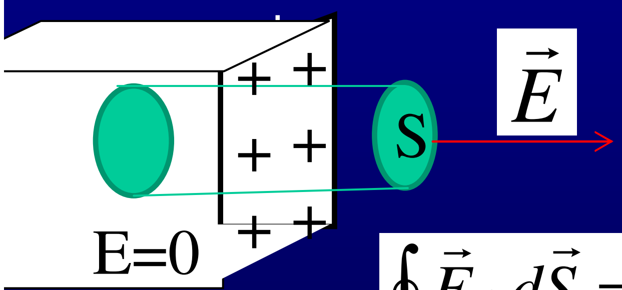
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

$$\left|\vec{E}\right| = 2\left|\vec{E}_1\right| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$

Prawo Gaussa-Natężenie pola w pobliżu przewodnika

Natężenie pola wewnątrz przewodnika (metalu) musi być równe zeru, gdyż inaczej prowadziłoby do ruchu ładunku w przewodniku. Z tego samego powodu na powierzchni przewodnika (i w punktach leżących nieskończenie blisko tej powierzchni) wektor natężenia pola jest prostopadły do tej powierzchni .
Za powierzchnię zamkniętą Gausa wybieramy powierzchnię nieskończenie krótkiego walca o osi symetrii prostopadłej do powierzchni przewodnika obejmującego część tej powierzchni



Ładunek zawarty wewnątrz powierzchni zamkniętej Gaussa

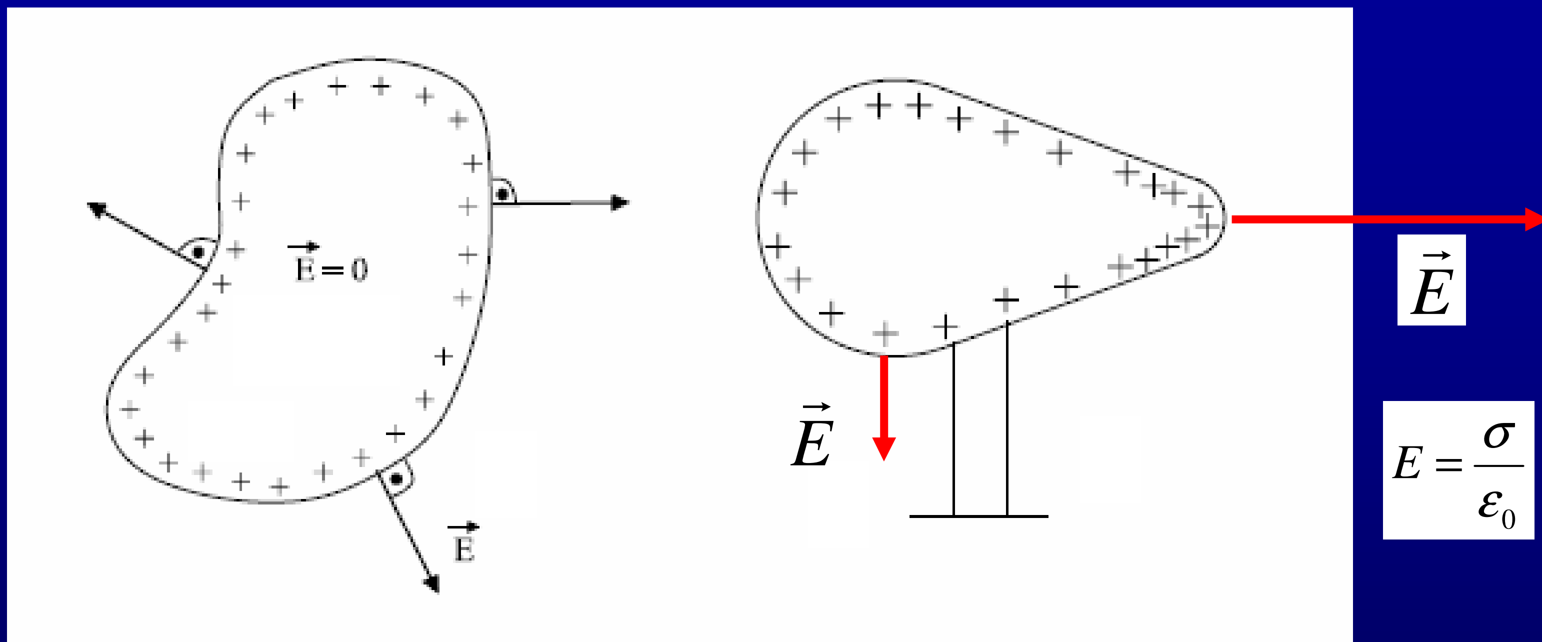
$$Q = \sigma S$$

σ- gęstość powierzchniowa ładunku

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES\cos(0) + \oint_{pow.bocz. + pow.w\ przewodniku} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES + 0 = ES$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Natężenie pola w pobliżu przewodnika



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

W stanie równowagi ładunek elektryczny gromadzi się na powierzchni przewodnika.
Największa gęstość ładunku występuje na silnie zakrzywionych powierzchniach przewodnika i wokół takich powierzchni natężenie pola jest największe.

Potencjał pola elektrostatycznego

Potencjał -wielkość skalarna służąca do opisu pola elektrostatycznego (pola elektrycznego stałego w czasie wytworzonego przez spoczywające ładunki). Siła wywołana przez takie pole jest zachowawcza.

Różnicę potencjałów w punktach A i D pola elektrostatycznego można powiązać z pracą $W_{A\to D}$ wykonaną przez siłę wywołaną przez pole elektryczne działającą na ładunek próbny q_o przy jego przemieszczaniu od punktu A do D (po dowolnym torze). Siłę te można w każdym punkcie toru powiązać z natężeniem pola elektrycznego $\vec{F} = q_0\vec{E}$ co pozwala na przestawienie różnicy potencjałów jako całki krzywoliniowej z natężenia pola wzdłuż toru ruchu ładunku próbnego.

$$V_D - V_A = -\frac{W_{A\to D}}{q_0} = -\frac{\int\limits_{\Gamma(A\to D)} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}{q_0} = -\int\limits_{\Gamma(A\to D)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Można ją określić dzieląc tor na nieskończenie krótkie odcinki prostoliniowe i sumując wkłady do całki od każdego odcinka równe $\vec{E}\cdot d\vec{l}$

$d\vec{l}$ -wektor określający przemieszczenie ładunku wzdłuż odcinka toru

Praca przy przesuwaniu ładunku między dwoma punktami nie zależy od kształtu toru, gdyż siła wywołana przez pole elektrostatyczne jest zachowawcza, a zatem można kształt toru łączącego punkty A i D wybrać dowolnie.

Praca takiej siły przy przesunięciu dowolnego ładunku q_1 od A do D jest równa

$$W_{A\to D} = -q_1(V_D - V_A) = q_1(V_A - V_D)$$

Gdy $V_A = V_D$ to $W_{A\to D} = 0$

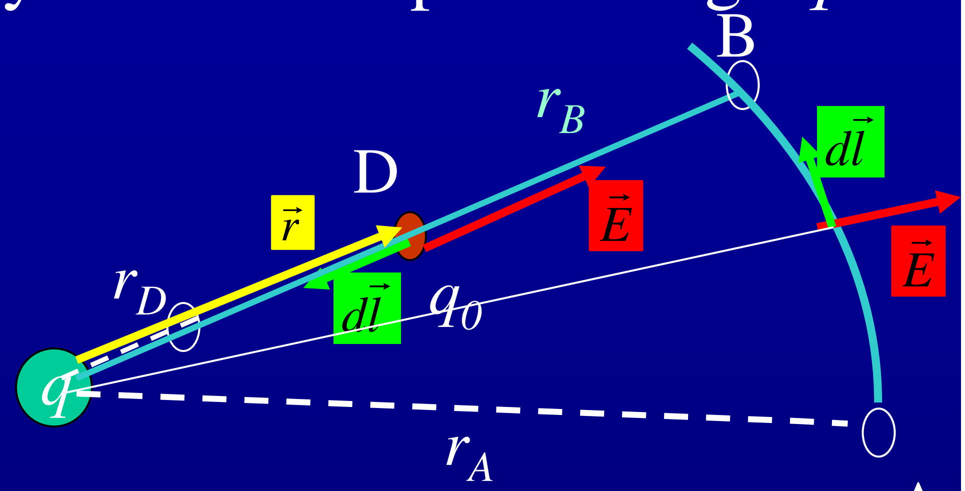
Jednostką potencjału jest $1V$ (wolt) $V = J/C$

Jeżeli przy przesunięciu ładunku 1C pomiędzy dwoma punktami praca wykonana przez siłę wywołaną przez pole elektrostatyczne równa jest 1J to różnica potencjałów pomiędzy tymi dwoma punktami jest równa 1V.

Potencjał w próżni pochodzący od ładunku punktowego q

$$r = |\vec{r}|$$

Na rysunku $q>0$, wzory słuszne dla dowolnego znaku ładunku



Początek układu współrzędnych umieszczamy w miejscu położeniu ładunku q

Tor od punktu A do D po którym porusza się ładunek q_0 dzielimy na 2 odcinki

a) odcinek AB biegnący wzdłuż obwodu okręgu o środku w punkcie położenia ładunku q i promieniu $r_A = r_B$

W dowolnym punkcie toru zachodzi $\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$

(gdyż tor jest prostopadły w każdym punkcie do wektora $\vec{E}$)

co zapewnia ta iż całka $\int_{\Gamma(A \to B)} \vec{E} \cdot \vec{dl}$ określona wzdłuż tego odcinka toru

jest równa zeru $\int_{\Gamma(A \to B)} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$

b) odcinek BD biegnący wzdłuż promienia okręgu o środku w punkcie gdzie znajduje się ładunek q

Dla dowolnego odcinka toru BD

$$d\vec{l} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\Delta r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}dr$$

przy czym zmiana odległości miedzy ładunkami q i q_o dr jest dodatnia $dr>0$ gdy w trakcie przemieszczenia rośnie odległość między ładunkami , $dr<0$ gdy odległość ta maleje (sytuacja przedstawiona na rysunku)

Otrzymujemy

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

gdyż

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{r}|^2\cos(0)}{|\vec{r}|^2} = 1$$

Całka krzywoliniowa po torze ruchu sprowadza się do całkowania po zmiennej r określającej odległość między ładunkami

$$\int\limits_{\Gamma(A\to D)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{\Gamma(A\to B)}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int\limits_{\Gamma(B\to D)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{\Gamma(B\to D)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r_B}^{r_D}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_B}^{r_D}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot dr =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Bigg|_{r_B}^{r_D} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_D}-\frac{1}{r_B}\right] \overset{r_B=r_A}{=} -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_D}-\frac{1}{r_A}\right]$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2}$$

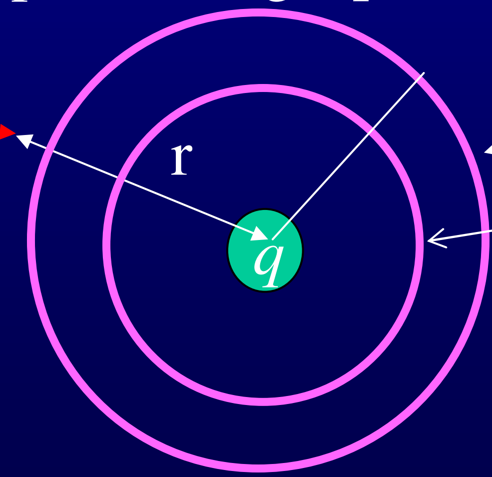
Potencjał pola elektrostatycznego wytworzonego przez ładunek punktowy

$$V_D - V_A = -\int_{\Gamma(A \to D)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_D}-\frac{1}{r_A}\right)$$

r_A(r_D) –odległość punktu *A(D)* od miejsca położenia ładunku *q*

Zwykle zakładamy iż potencjał jest równy zeru, w miejscu nieskończenie odległym od źródła pola.
Przy tym założeniu przyjmując $r_A \to \infty$ oraz $V_A \to 0$ otrzymujemy wzór na potencjał $V=V_D$ w odległości $r=r_D$ od miejsca położenia ładunku punktowego q

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

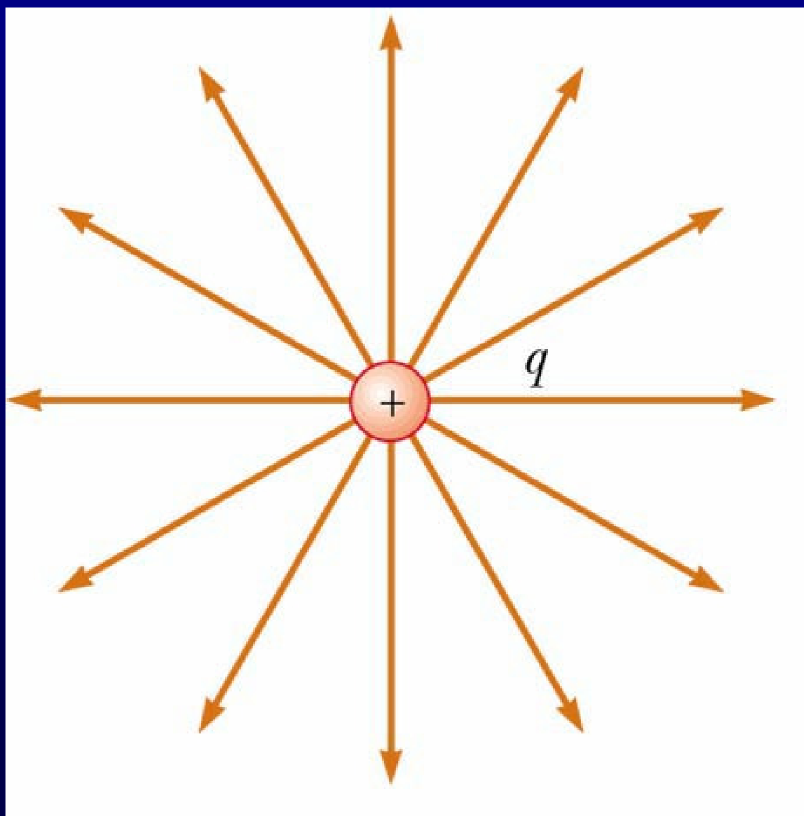


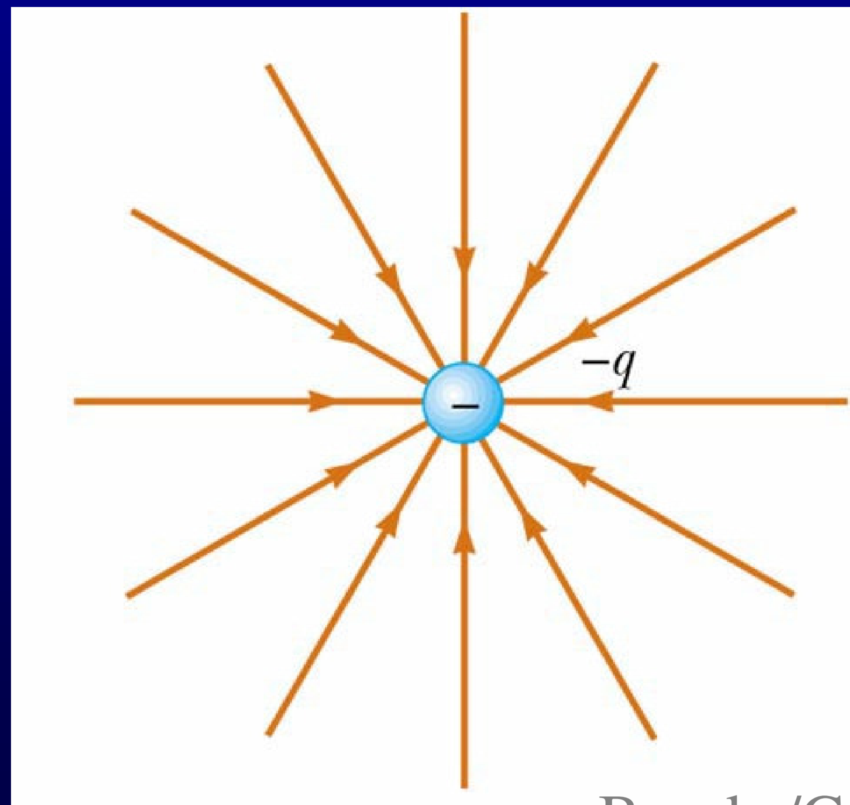
Powierzchnie stałego potencjału (ekwipotencjalne) mają postać współśrodkowych sfer

W ośrodku o przenikalności elektrycznej ε $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$

Widać iż $V>0$ gdy $q>0$ oraz $V<0$ gdy $q<0$. Potencjał w każdym z punktów przestrzeni zależy tylko od odległości tego punktu od miejsca w którym znajduje się ładunek punktowy q.

Linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki punktowe





Energia potencjalna układu złożonego z punktów materialnych obdarzonych ładunkami *q* oraz *q'* położonych w odległości *r* od siebie

$$E_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$$

Energia potencjalna jest dodatnia gdy znak obu ładunków jest jednakowy i ujemna gdy znak ładunków przeciwny.

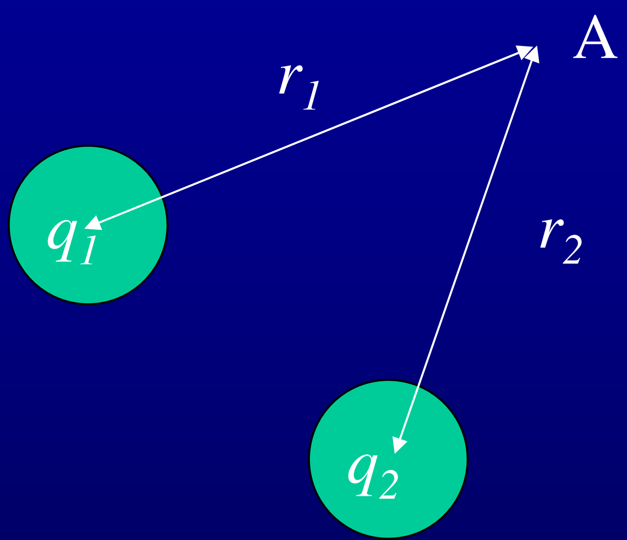
Energię taką zyskuje układ powyższy w trakcie jego tworzenia z początkowo pozostających w nieskończonej odległości od siebie ładunków. Można ją wyznaczyć jako pracę siły $\vec{F}_z = -\vec{F} = -q'\vec{E}$ równoważącej siłę elektryczną z jaką ładunek *q* działa na ładunek *q'* przy przemieszczeniu ładunku *q'* z nieskończoności do punktu odległego o *r* od ładunku *q* .

Energię tą można wyrazić jako iloczyn potencjału pola wytworzonego przez ładunek jednego z punktów materialnych (np. obdarzonego ładunkiem *q*) i ładunku *q'* drugiego punktu materialnego

$$E_{pot} = V(r)q'$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Potencjał wytworzony przez kilka ładunków punktowych jest równy sumie skalarnej potencjałów wytworzonych przez każdy ładunek z osobna.



Potencjał w punkcie A

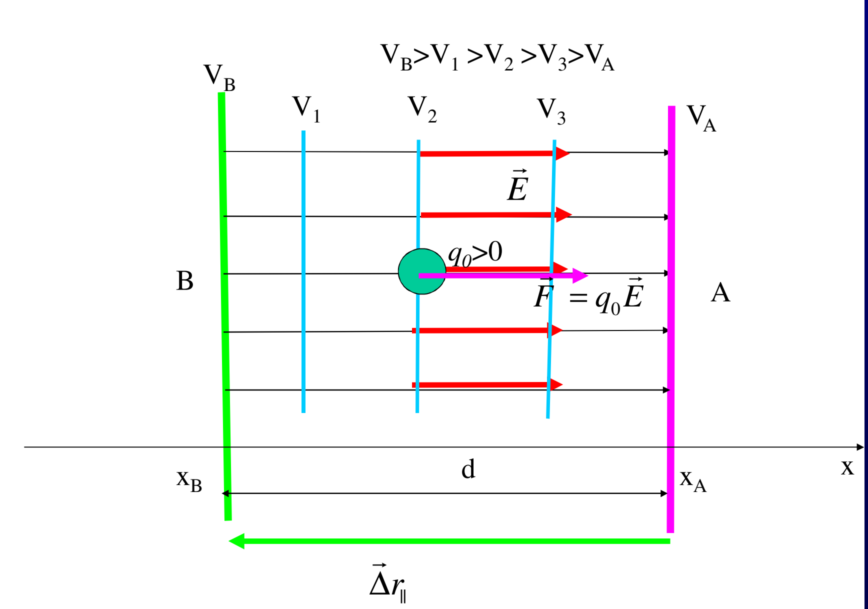
$$V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

Pole jednorodne-związek natężenia z potencjałem

Załóżmy że wektor natężenia pola jest skierowany wzdłuż osi Ox i natężenie pola jest jednakowe we wszystkich punktach w przestrzeni. Powierzchnie stałego potencjału (ekwipotencjalne) są płaszczyznami prostopadłymi do linii sił pola elektrycznego (osi Ox). Praca siły pola elektrostatycznego przy przesunięciu dodatniego ładunku próbnego pomiędzy punktami leżącymi na powierzchniach ekwipotencjalnych A i B o $x=x_A$ i $x=x_B$ odpowiednio od powierzchni ekwipotencjalnej A do B

$$W_{A\to B} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = q_o\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = q_o\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}_{\parallel} = q_0\left|\vec{E}\right|d\cos(\pi) = -q_0\left|\vec{E}\right|d$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_{\parallel} + \Delta\vec{r}_{\perp}$$



Podczas przesunięcia ładunku o wektor $\Delta\vec{r}_{\perp}$ prostopadły do linii sił pola wykonywana praca jest równa zeru gdyż $\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}_{\perp} = 0$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{W_{A\to B}}{q_0} = \left|\vec{E}\right|d$$

Potencjał wyznaczamy z dokładnością do stałej.

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{|\Delta V|}{d}$$

Zwrot wektora $\vec{E}$ w kierunku malejącego potencjału

Natężenie pola możemy mierzyć w V/m

Pole niejednorodne-związek natężenia z potencjałem

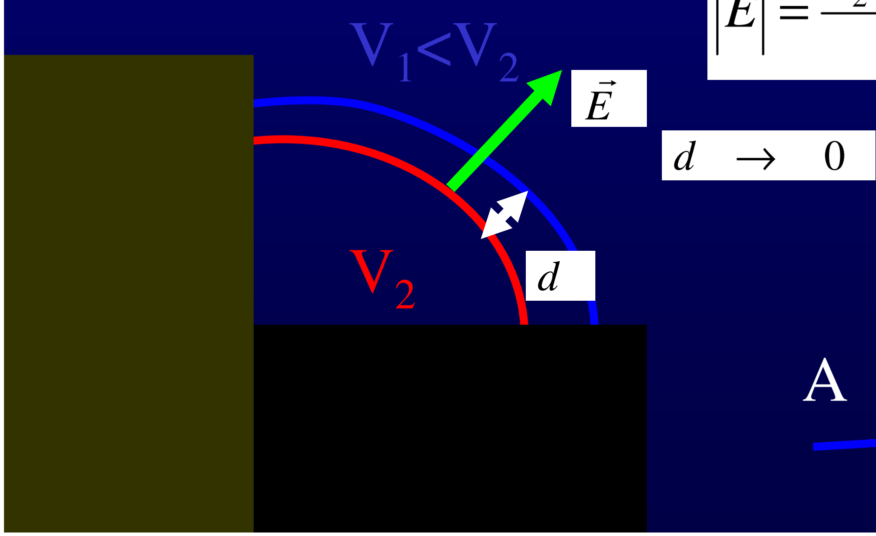
$$\vec{E} = \left[E_x, E_y, E_z\right] = -gradV = \left[-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

$$V = V(x, y, z)$$

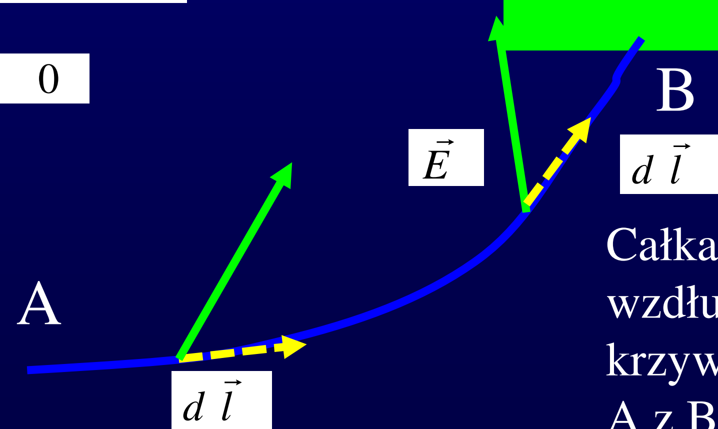
pochodne (cząstkowe) po składowych wektora wodzącego określającego położenie punktu w którym określamy pole (licząc pochodną po jednej zmiennej inne traktujemy jak stałe)

Wektor natężenia pola w danym punkcie jest zawsze prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej przechodzącej przez ten punkt i jest on skierowany w kierunku w którym potencjał maleje.
Wartość natężenia jest równa stosunkowi różnicy potencjałów w dwóch punktach położonych nieskończenie blisko siebie na prostej stycznej do wektora $\vec{E}$ do odległości tych punktów od siebie

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{V_2 - V_1}{d}$$



$$V_B - V_A = -\int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Całka krzywoliniowa wzdłuż dowolnej krzywej łączącej punkt A z B

W polu o symetrii sferycznej, w którym potencjał w danym punkcie zależy tylko od odległości tego punktu od początku układu współrzędnych $V = V(r)$ mamy $\vec{E} = E\dfrac{\vec{r}}{r}$ $r = |\vec{r}|$

$$V(B) - V(A) = -\int_{r_A}^{r_B} E\,dr$$

r_A, r_B - odległości punktów A i B od początku układu współrzędnych

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

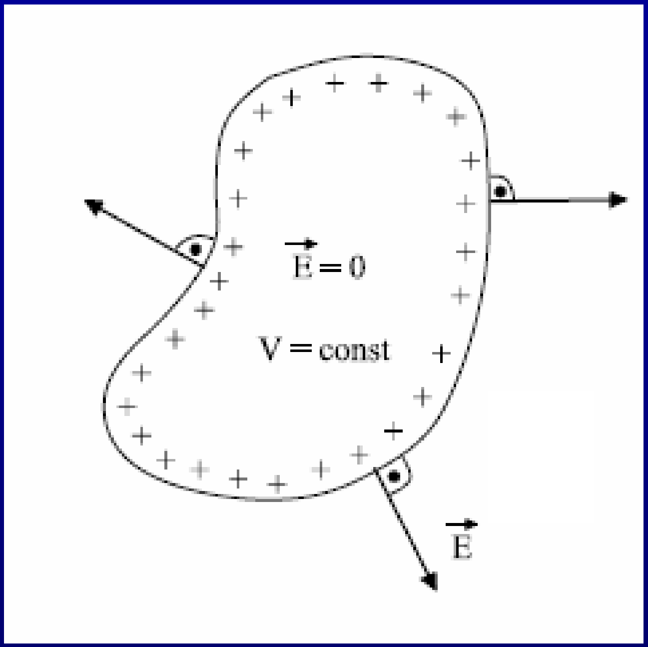
Dla ładunku punktowego (lub naładowanej kuli o promieniu *R* z gęstością ładunku o symetrii sferycznej) umieszczonego w próżni w początku układu współrzędnych pole w obszarze poza miejscem rozmieszczenia ładunku (czyli dla *r*>*R*)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Potencjał wewnątrz przewodnika

W obszarze w którym natężenie pola jest równe zeru (np. wewnątrz przewodnika przez który nie płynie prąd) potencjał jest stały (jest taki sam w każdym punkcie) i równy potencjałowi na jego powierzchni

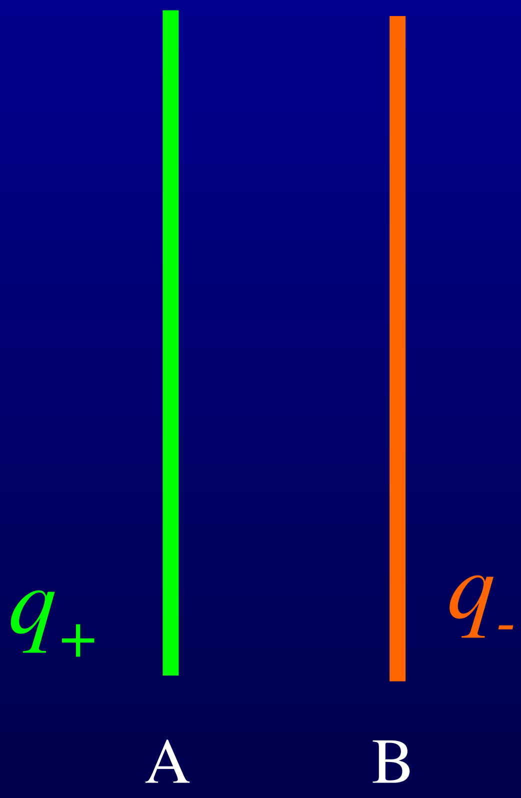


W przypadku kuli o promieniu *R* wykonanej z przewodnika, w obszarze kuli natężenie pola elektrycznego jest równe zeru i a potencjał w obszarze kuli jest stały i równy $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

gdzie *q*-ładunek elektryczny kuli gromadzący się w całości na jej powierzchni

Kondensator

Składa się z dwóch odizolowanych od siebie przewodników
Kondensator można ładować ładunkami elektrycznymi o jednakowej wartości i przeciwnych znakach



Pojemność kondensatora *C*

$$\boxed{C = \frac{q}{U}}$$

$$\boxed{q_+ = -q_- = q}$$

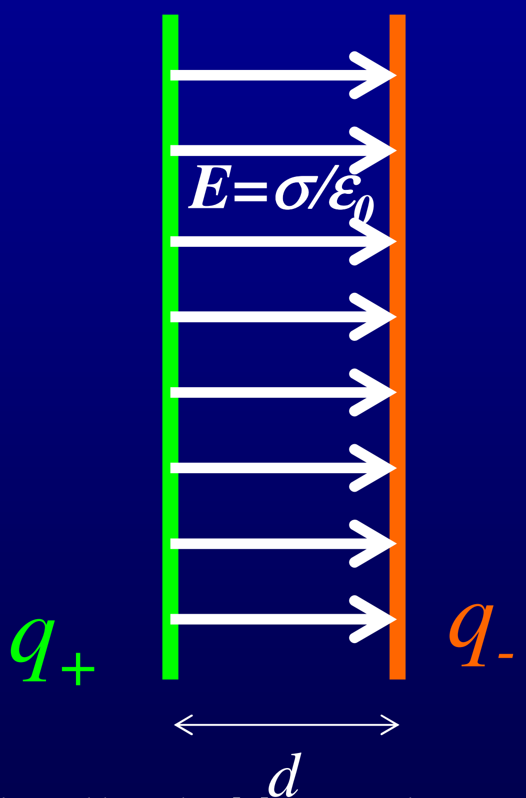
$$\boxed{U = V_A - V_B}$$

U-napięcie między okładkami kondensatora równe różnicy potencjałów okładek będących powierzchniami ekwipotencjalnymi

Pojemność kondensatora mierzymy w faradach [F]=[C/V]

Kondensator płaski próżniowy

Przewodniki (okładki kondensatora) mają postać płaszczyzn (mogą mieć one skończoną grubość ale ładunek i tak gromadzi się na powierzchniach sąsiadujących z wnętrzem kondensatora)



d-odległość między okładkami

$$q = \sigma S$$

σ>0 - gęstość powierzchniowa ładunku

S - pole okładek kondensatora

Natężenie pola między okładkami

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Napięcie między okładkami (pole między okładkami jednorodne)

$$U = \left|\vec{E}\right| d$$

Pojemność kondensatora

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Dielektryki, polaryzacja

Dielektryki - ciała które nie przewodzą ładunków

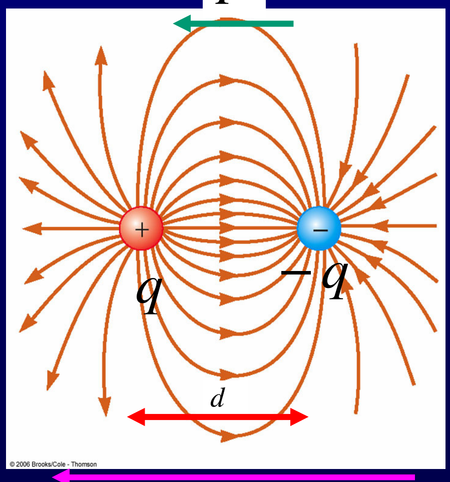
Pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego $\vec{E}_z$ następuje w dielektryku niewielka zmiana położenia ładunków w wyniku którego następuje

a) porządkowanie się ustawienia osi istniejących dipoli elektrycznych wzdłuż kierunku pola elektrycznego (dielektryki polarne)

bądź

b) indukowanie się dipoli elektrycznych (układu ładunków różniących się wyłącznie znakiem rozsuniętych nieznacznie w przestrzeni)

$\vec{p}$



$\vec{E}_z$

Do opisu dipola służy moment dipolowy elektryczny $\vec{p}$

$$|\vec{p}| = |q|d$$

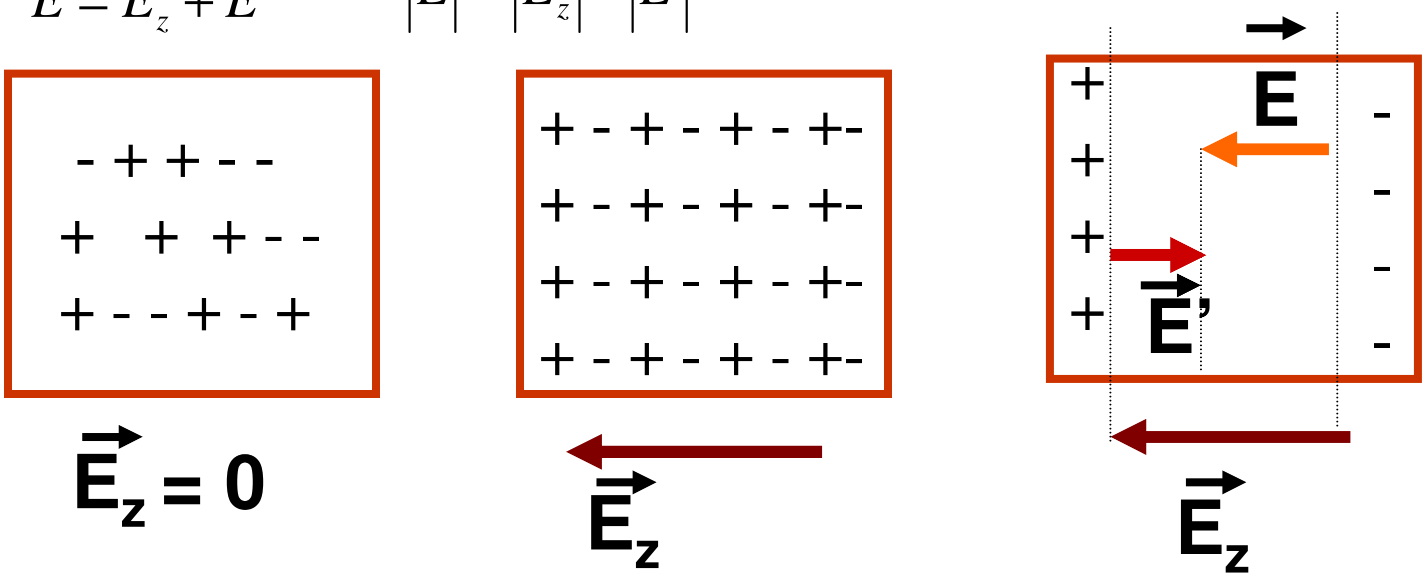
Kierunek wektora $\vec{p}$ równoległy do osi dipola, a zwrot od ładunku ujemnego do dodatniego

Moment dipolowy przypadający na jednostkę objętości V dielektryka określa jego wektor polaryzacji $\vec{P}$. Jest on równy sumie wektorowej momentów dipolowych elektrycznych zawartych w jednostce objętości dielektryka.

Dielektryk w zewnętrznym polu elektrycznym

Pole elektryczne w dielektryku $\vec{E}$ jest osłabione na skutek wytwarzania pola $\vec{E}'$ o przeciwnym kierunku (zwrocie) do pola zewnętrznego przez ładunki powierzchniowe. Powstają one w wyniku zmiany orientacji lub powstania indukowanych momentów dipolowych w dielektryku.

$$\vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}' \qquad \left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E}_z\right| - \left|\vec{E}'\right| \qquad \vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$



$\vec{E}_0$ – natężenie pola elektrycznego zewnętrznego

$\vec{E}'$ – natężenie pola wytworzonego przez ładunki powierzchniowe

$\vec{E}$ – natężenie pola wypadkowego

Prawo Gaussa w przestrzeni wypełnionej dielektrykiem

Ładunek indukowany w dielektryku można wyznaczyć wykorzystując standardową postać Prawa Gaussa w którym licząc ładunek Q zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa trzeba uwzględnić zarówno ładunek swobodny q na okładkach kondensatora jak i ładunek indukowany q_{ind} na powierzchni dielektryka

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{q + q_{ind}}{\varepsilon_0}$$

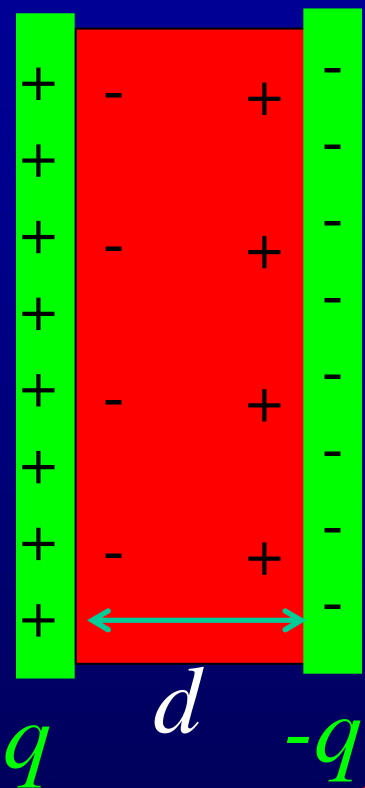
Gdy chcemy zapisać Prawo Gausa gdy powierzchnia Gaussa leży w dielektryku bez uwzględnienia ładunku indukowanego możemy posłużyć się wzorem

$$\oint_S \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ładunek swobodny zawarty wewnątrz powierzchni zamkniętej Gaussa (bez ładunku indukowanego w dielektryku)

ε_r –względna przenikalność elektryczna dielektryka

Pojemność kondensatora płaskiego wypełnionego dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej ε_r



Wypełnienie dielektrykiem przestrzeni między okładkami kondensatora odłączonego od źródła napięcia prowadzi do zmniejszenia natężenia pola między okładkami ε_r krotnie na skutek indukowania się ładunku na powierzchni dielektryka

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

gdzie ε_r –względna przenikalność elektryczna dielektryka

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

-natężenie pola w kondensatorze bez dielektryka

Ładunek swobodny q na okładkach kondensatora nie ulega zmianie

Napięcie między okładkami

$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}$$

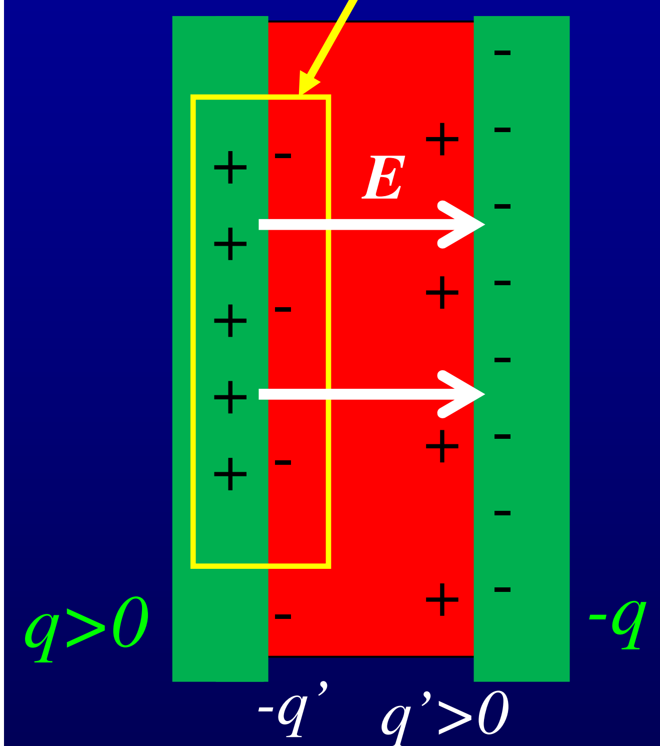
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{qd}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$$

Pojemność kondensatora rośnie ε_r krotnie

Ładunek powierzchniowy indukowany w dielektryku

Na lewej powierzchni dielektryka indukuje się ładunek $q_{ind}=-q'$ $(q'<q)$, którego wartość można określić z prawa Gaussa

Powierzchnia całkowania (prostopadłościan) w prawie Gaussa



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{q-q'}{\varepsilon_o}$$

$$ES = \frac{q-q'}{\varepsilon_o}$$

$$q' = q - \varepsilon_0 ES$$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}$$

$$q' = q\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Ładunek indukowany w dielektryku jest źródłem pola elektrycznego przeciwnie skierowanego do pola wytworzonego przez ładunki na okładkach

$$\left|\vec{E}'\right| = E_0 - E = E_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{q}{S\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{q'}{S\varepsilon_0} = \frac{q'd}{Sd\varepsilon_0} = \frac{\left|\vec{p}\right|}{Sd\varepsilon_0} = \frac{\left|\vec{P}\right|}{\varepsilon_0}$$

Energia pola elektrycznego kondensatora

Praca siły zewnętrznej przy przeniesieniu ładunku *dq'* >0 pomiędzy okładkami kondensatora naładowanymi ładunkami *q' i –q'* od okładki naładowanej ładunkiem ujemnym do okładki naładowanej ładunkiem dodatnim

$$dW = U dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Praca ta zależy od ładunku zgromadzonego na okładkach

Energia po naładowaniu kondensatora ładunkiem *q* jest równa sumie prac wykonanych przy ładowaniu kondensatora od ładunku równego *q'*=0 do ładunku *q'*=*q*

$$\mathrm{W} = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \left.\frac{(q')^2}{2C}\right|_0^q = \frac{q^2}{2C}$$

Można wyrazić ją poprzez napięcie *U* między okładkami kondensatora

$$\mathrm{W} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C^2 U^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$$

Energie kondensatora próżniowego płaskiego można wyrazić poprzez natężenie pola elektrycznego między okładkami

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

V=Sd- objętość obszaru miedzy okładkami kondensatora

E-natężenie pola elektrycznego, d-odległość między okładkami

Gęstość energii pola elektrycznego

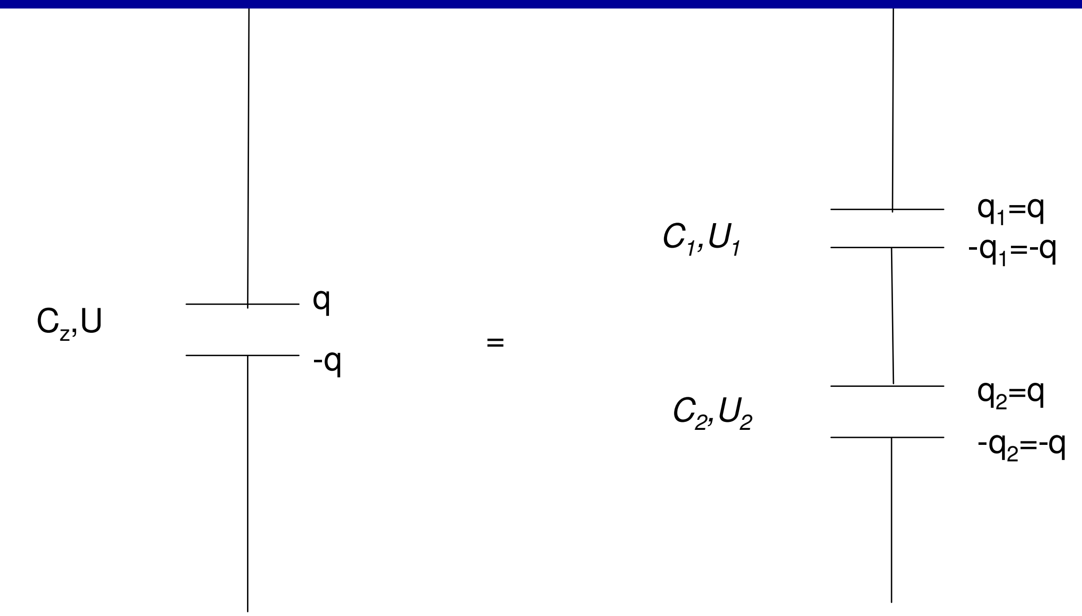
$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Wzór słuszny w próżni dla dowolnego pola elektrycznego.
W ośrodku o przenikalności elektrycznej $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

ε_r *–względna przenikalność elektryczna ośrodka*

Szeregowe łączenie kondensatorów



$$U = \sum_i U_i = U_1 + U_2$$

$$q = q_i = q_1 = q_2$$

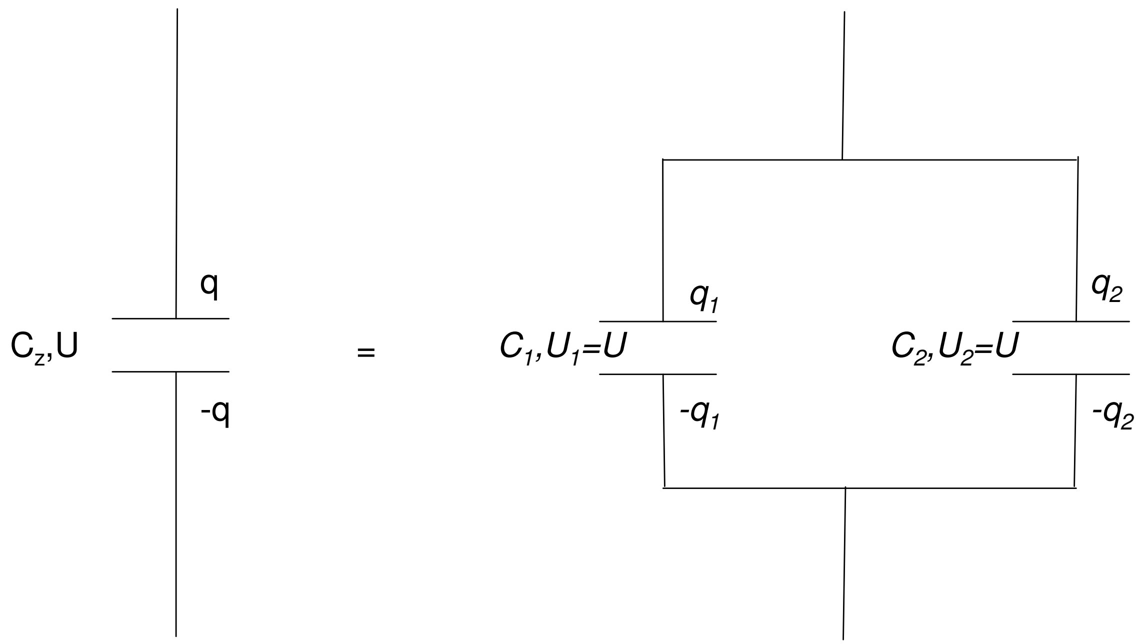
$$\longrightarrow \quad \frac{q}{C_z} = \sum_i \frac{q_i}{C_i} = \sum_i \frac{q}{C_i} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_z} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Ładunek zgromadzony na każdym z kondensatorów o pojemności C_i (i=1,2) jednakowy

Odwrotność pojemności kondensatora zastępczego 1/C_z jest równa sumie odwrotności pojemności kondensatorów połączonych szeregowo

Równoległe łączenie kondensatorów



$$q=\sum_i q_i = q_1+q_2 \longrightarrow UC_z=\sum_i U_iC_i=\sum_i UC_i = UC_1+UC_2$$

$$U=U_i=U_1=U_2 \qquad C_z=\sum_i C_i = C_1+C_2$$

Spadek napięcia na każdym z kondensatorów o pojemności C_i (i=1,2) jednakowy

Pojemność kondensatora zastępczego C_z jest równa sumie pojemności kondensatorów połączonych równolegle