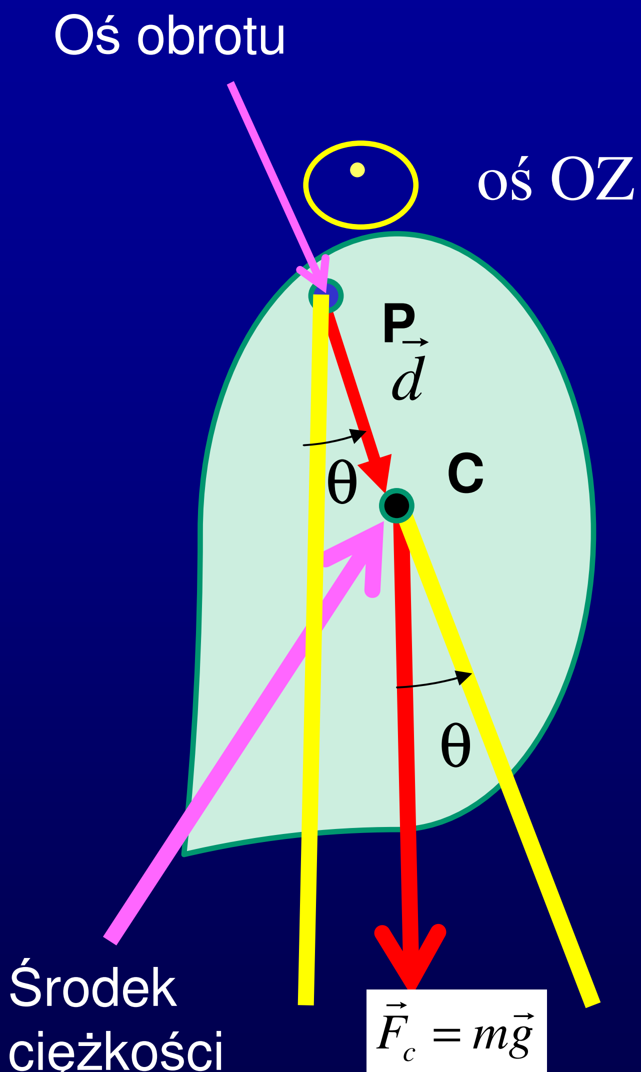
Wahadło fizyczne i matematyczne

Wahadło fizyczne



Ciało sztywne o masie *m* i dowolnym kształcie, może się obracać wokół dowolnej osi OZ nieprzechodzącej przez środek ciężkości (masy) ciała.

Po odchyleniu od położenia równowagi o kąt θ, pojawia się moment siły ciężkości dążący do przywrócenia równowagi o wartości

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times \vec{F}_c$$

$$\left|\vec{\tau}\right| = F_c d \sin(\theta) = mgd \sin(\theta)$$

Rzut momentu siły na oś OZ prostopadłą do płaszczyzny drgań

$$\tau_z = -\left|\vec{\tau}\right| = -mgd \sin(\theta)$$

Znak – gdyż moment siły ma zwrot przeciwny do zwrotu osi Oz (ustalonego przez zwrot wektora prędkości kątowej w ruchu w którym θ rośnie)

gdy $\sin(\theta) > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < \pi$

Równanie ruchu obrotowego

$$I\varepsilon = \tau_z$$

$$\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_z = \frac{d\theta}{dt}$$

Przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin(\theta)$$

I –moment bezwładności względem osi obrotu

Równanie ruchu dla małych wychyleń gdy sin(θ)≅θ

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mgd)\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

Ma ono taką samą postać jak dla ciężarka umieszczonego na sprężynie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

gdy dokonamy zamiany $k \leftrightarrow mgd, m \leftrightarrow I, x \leftrightarrow \theta$

Sprężyna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Wahadło fizyczne (dla małego kąt maksymalnego wychylenia θ_{max})

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

$$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

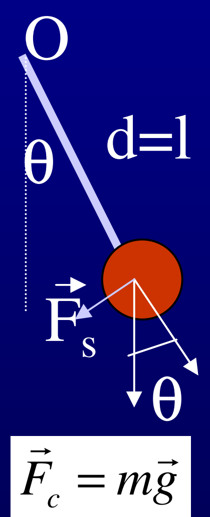
Wahadło matematyczne

Punkt materialny o masie *m* zawieszony na nici o długości *l* porusza się po okręgu o promieniu *l* .

Moment bezwładności względem osi obrotu $I = ml^2$

Odległość osi obrotu od środka ciężkości

$d = l$



Dla małego maksymalnego kata wychylenia θ_{max} spełniającego relację $\sin(\theta_{max}) \approx \theta_{max}$ mamy do czynienia z ruchem harmonicznym o okresie

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Przy małych wychyleniach okres nie zależy od masy m i amplitudy drgań

Drgania tlumione i wymuszone

Drgania harmoniczne tłumione

Oprócz siły harmonicznej występuje siła tłumiąca proporcjonalna do wartości prędkości i przeciwnie skierowana do wektora prędkości $\vec{F}_t = -b\vec{V}$ $\vec{V} = V\vec{i}$ $\vec{a} = a\vec{i}$

***b*-współczynnik tłumienia**

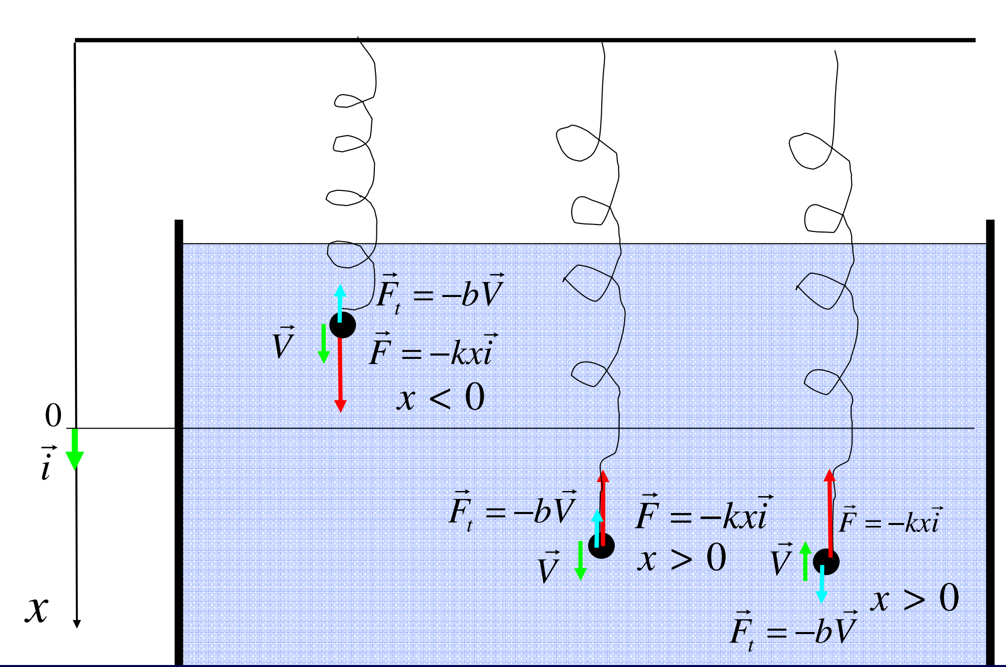
Wypadkowa siła działająca na ciało

$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F} + \vec{F}_t = \left(-kx - bV\right)\vec{i}$$

Równanie ruchu

$$m\vec{a} = \vec{F}_{wyp} \Leftrightarrow ma = -kx - bV$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$



$$V = \frac{dx}{dt}$$ $$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Drgania tłumione- rozwiązanie dla małego tłumienia $\beta = \frac{b}{2m} < \omega_0$

- **Wychylenie z położenia równowagi**

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

- **Częstość kołowa drgań**

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

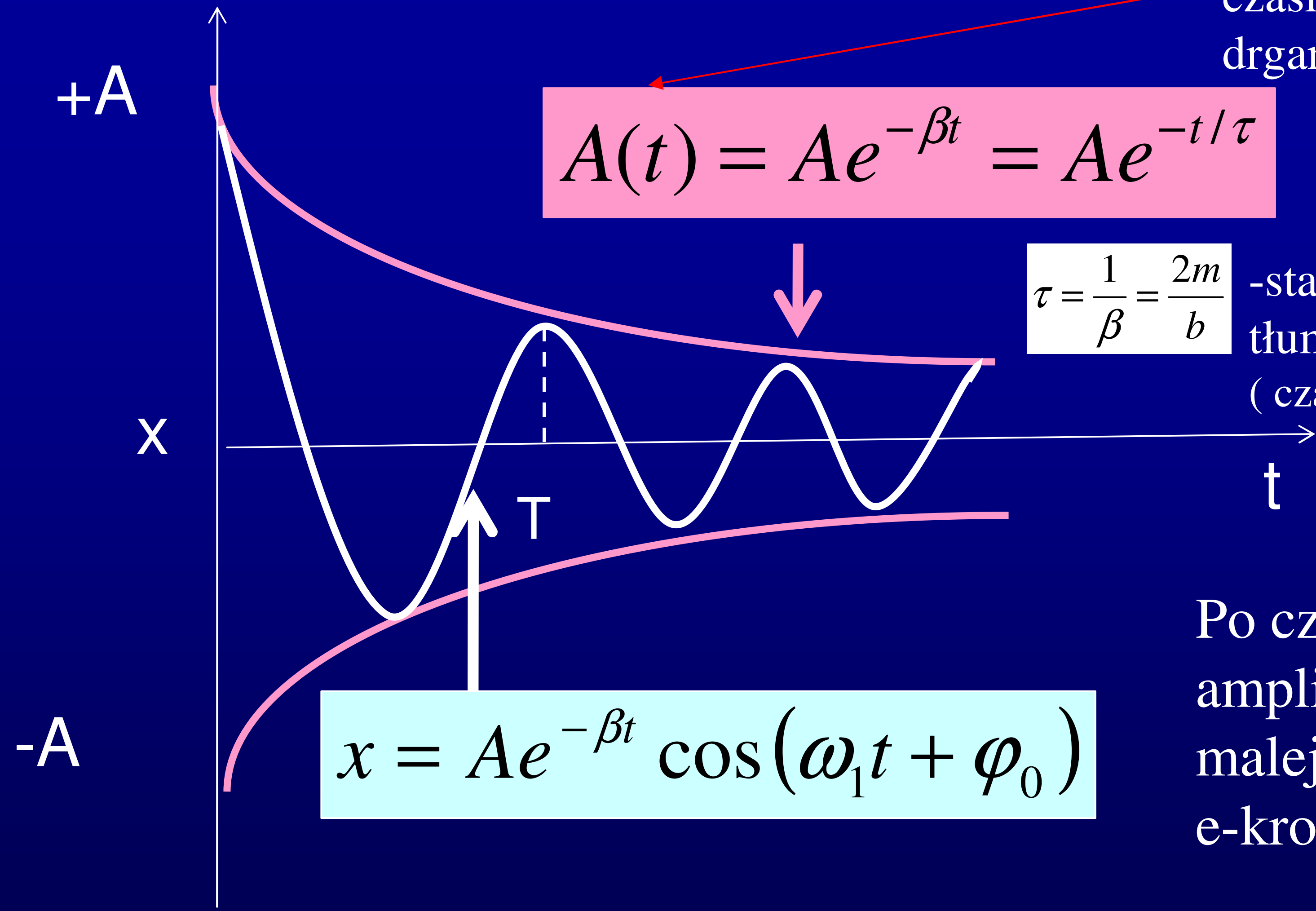
gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

częstość drgań swobodnych bez tłumienia

- Jeżeli tłumienie jest małe to ciało wykonuje drgania, ale amplituda drgań wykładniczo zanika.
- Częstość drgań jest nieznacznie mniejsza niż w przypadku braku tłumienia.

Wykres ruchu harmonicznego tłumionego $\beta < \omega_0$



Zmienna w czasie amplituda drgań

$$A(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{b}$$ -stała czasowa tłumienia drgań (czas relaksacji)

$$x = Ae^{-\beta t}\cos\left(\omega_1 t + \varphi_0\right)$$

Po czasie τ amplituda maleje e-krotnie

Uwaga: Gdy $\beta > \omega_0$ *to ruch ciała nie ma charakteru drgań. Ciało wychylone z położenia równowagi nie posiadające prędkości początkowej wraca asymptotycznie do położenia równowagi najszybciej wówczas gdy* $\beta = \omega_0$ *(ruch pełzający krytyczny)*

Drgania wymuszone

Na układ o częstości własnej drgań swobodnych ω_0 działa dodatkowo periodyczna siła wymuszająca $F_0 \cos \omega t$

Równanie ruchu

Wypadkowa siła działająca na układ

$$F_{wyp} = -kx - bV + F_0 \cos \omega t$$

$$F_{wyp} = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

W stanie ustalonym układ wykonuje drgania o częstości równej częstości siły wymuszającej $x = A\cos(\omega t - \delta)$ **. Amplituda drgań A i faza δ zależy od częstości ω i ω_0**

$$A = \frac{F_0}{mG}$$

$$\delta = arctg\,\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = arctg\,\frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

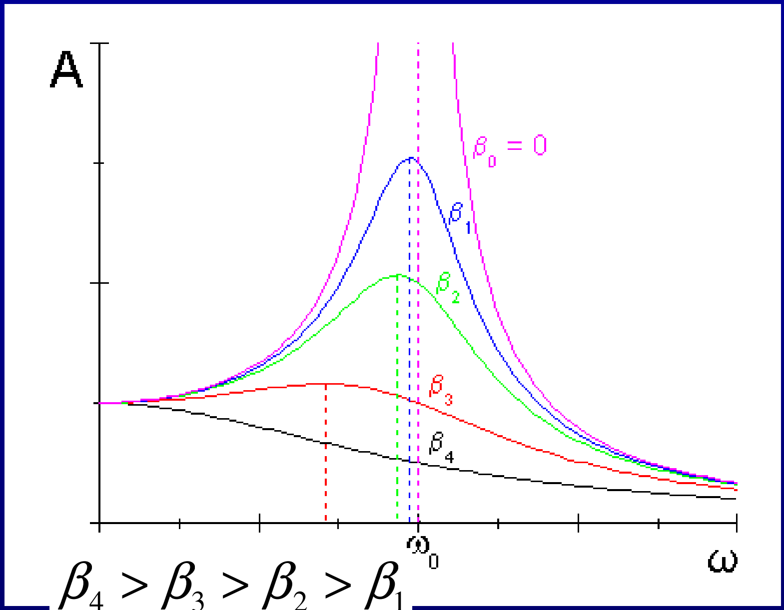
$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$G = \sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{b^2\omega^2}{m^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Drgania wymuszone. Rezonans

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \dfrac{b^2\omega^2}{m^2}}}$$



$\beta_4 > \beta_3 > \beta_2 > \beta_1$

Dla β=0 (b=0 ,brak tłumienia)

$$\omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow A \rightarrow \infty$$ **rezonans**

W obecności tłumienia amplituda rezonansowa jest skończona i tym mniejsza im większe β (czyli też b) . Częstość rezonansowa (dla której amplituda osiąga wartość maksymalną) występuje gdy $\beta = \frac{b}{2m} < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ i jest określona wzorem

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Jest ona nieco mniejsza od ω_0.

Składanie drgań

Składanie drgań harmonicznych zachodzących z tą samą częstością kołową ω w tym samym kierunku

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

Draganie wynikające ze złożenia tych drgań

$$x_w(t) = A_w\cos(\omega t + \varphi_w)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) = A_1\cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - A_1\sin(\omega t)\sin(\varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A_2\cos(\omega t)\cos(\varphi_2) - A_2\sin(\omega t)\sin(\varphi_2)$$

Na mocy zasady superpozycji

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t) = [A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)]\cos(\omega t) - [A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)]\sin(\omega t) \quad (*)$$

$$x_w(t) = A_w\cos(\omega t + \varphi_w) = A_w\cos(\omega t)\cos(\varphi_w) - A_w\sin(\omega t)\sin(\varphi_w) \quad (**)$$

Z porównania (*) i (**)

$$A_w\cos(\varphi_w) = [A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)]$$

$$A_w\sin(\varphi_w) = [A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)]$$

$$A_w \cos(\varphi_w) = [A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)]$$

$$A_w \sin(\varphi_w) = [A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2))$$

$$tg(\varphi_w) = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}$$

$$A_w^2 \left[\cos^2(\varphi_w) + \sin^2(\varphi_w)\right] = [A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)]^2 + [A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)]^2$$

$$A_w^2 = \left[A_1^2 \cos^2(\varphi_1) + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + A_2^2 \cos^2(\varphi_2)\right]$$
$$+ \left[A_1^2 \sin^2(\varphi_1) + 2A_1A_2 \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + A_2^2 \sin^2(\varphi_2)\right] =$$
$$= A_1^2\left[\cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1)\right] + A_2^2\left[\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)\right] + 2A_1A_2[\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)] =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$A_w = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

1) Amplituda drgań jest maksymalna i równa $A_w = A_1 + A_2$ wtedy

gdy $\varphi_1 - \varphi_2 = 2n\pi$ n-liczba całkowita

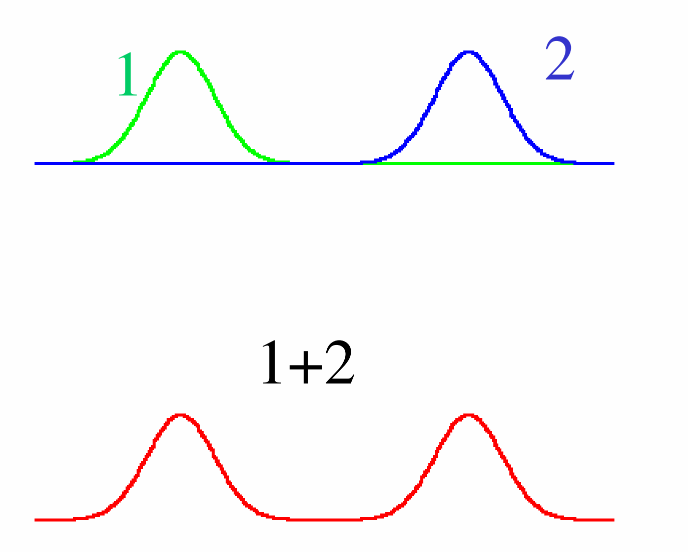
2) Amplituda drgań jest minimalna i równa $A_w = |A_1 - A_2|$ wtedy

gdy $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$ n-liczba całkowita

Interferencja fal

Zasada superpozycji

Zaburzenie wywołane w dowolnym punkcie przez dwie nakładające się fale jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez każdą z fal.



Zaburzenie wywołane przez 1 falę

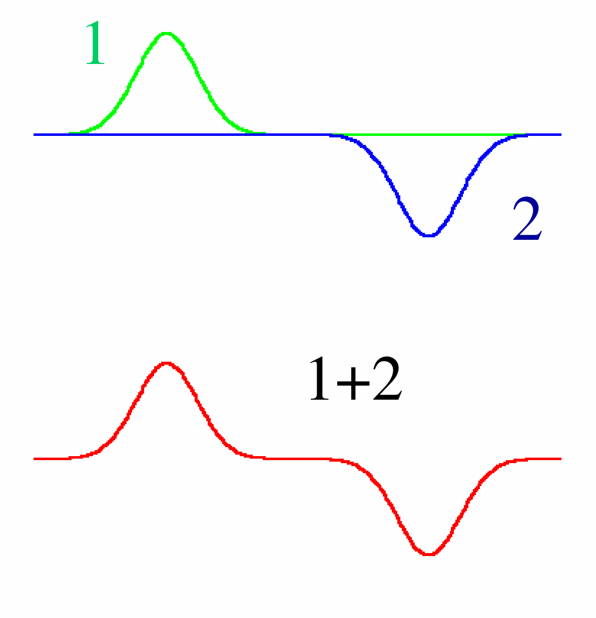
$$D_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Zaburzenie wywołane przez 2 falę

$$D_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Zaburzenie wypadkowe

$$D(t) = D_1(t) + D_2(t)$$



Interferencja fal

Zjawisko nakładania się zaburzeń (drgań) pochodzących od różnych fal o tej samej częstości kołowej $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ nazywamy zjawiskiem interferencji fal.
Zaburzenie wywołane w dowolnym punkcie przez dwie nakładające się fale jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez każdą z fal.

$$D_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad D_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$D(t) = D(1) + D(2) = A_w \cos\left(\omega t + \varphi_w\right)$$

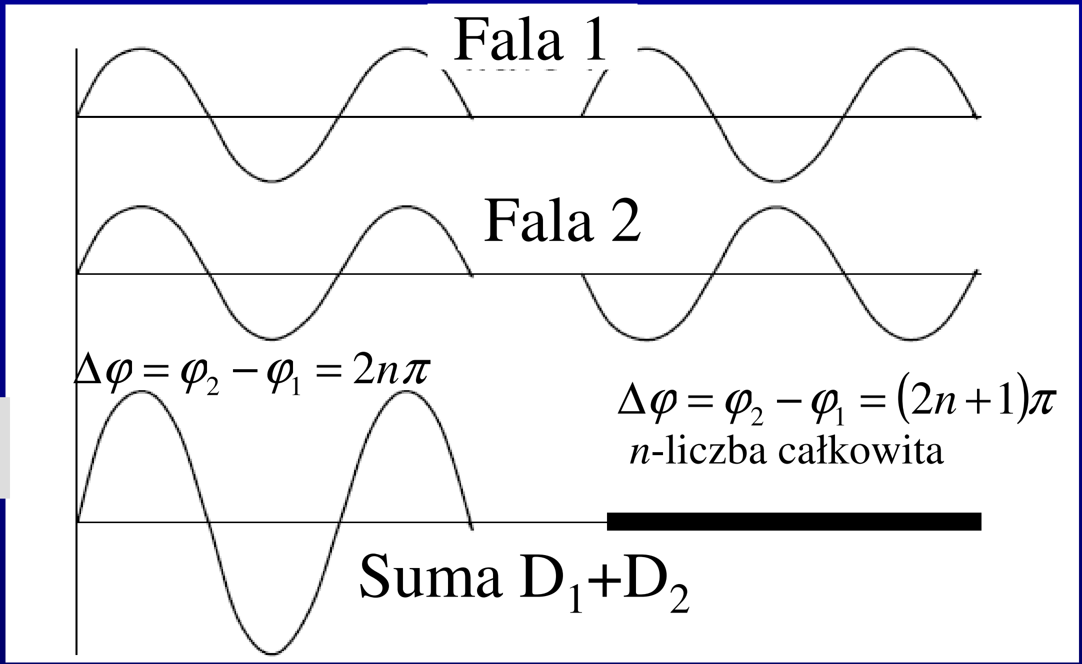
Amplituda drgań powstałych w wyniku interferencji dwóch fal wywołujących drgania zachodzące w tym samym kierunku zależy od amplitudy drgań wywołanych przez obie fale osobno A_1 i A_2 odpowiednio oraz różnicy faz początkowych tych drgań

$$A_w = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

Superpozycja fal o jednakowych częstościach propagujących z jednakową prędkością w tym samym kierunku wywołujących drgania w tym samym kierunku

Wypadkowe zaburzenie jest sumą zaburzeń wywołanych przez obie fale

$$D(x,t) = D_1(x,t) + D_2(x,t)$$



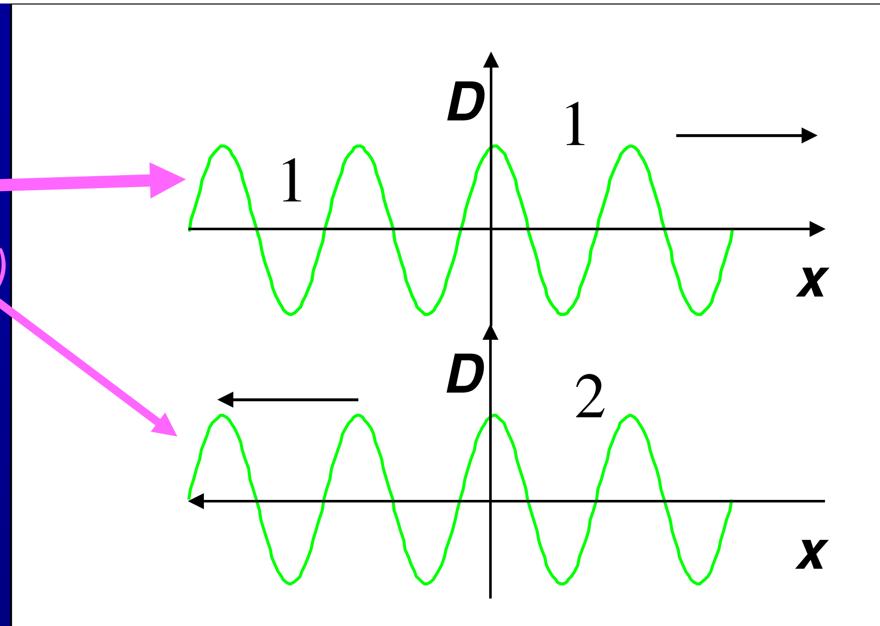
Interferencja konstruktywna Interferencja destruktywna

Rysunek dla fal o tych samych amplitudach równych A. W wyniku interferencji tych fal powstaje fala o tej samej częstości i amplitudzie A_W z zakresu od 0 do $2A$ (rysunek przedstawia sytuacje gdy A_w=$2A$ i A_w=0) a wiec o amplitudzie większej od A (interferencja konstruktywna) lub mniejszej od A (interferencja destruktywna) w zależności od różnicy faz drgań $\Delta\varphi$ wywołanych przez obie fale.
Uwaga: W przypadku gdy fale propagują w różnych kierunkach różnica faz może zależeć od położenia punktów w których obserwujemy interferencje fal.

Fale stojące

1 $D_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

2 $D_2(x,t) = A\cos(-kx - \omega t) = A\cos(kx + \omega t)$



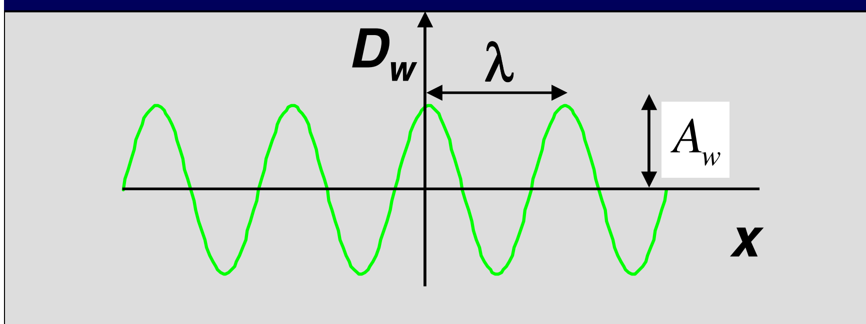
Fala stojąca powstaje np. w wyniku interferencji jednakowych fal 1 i 2 propagujących w przeciwnych kierunkach

Fala wypadkowa

$$D_w(x,t) = D_1(x,t) + D_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t)$$
$$= 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = \pm A_w \cos(\omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

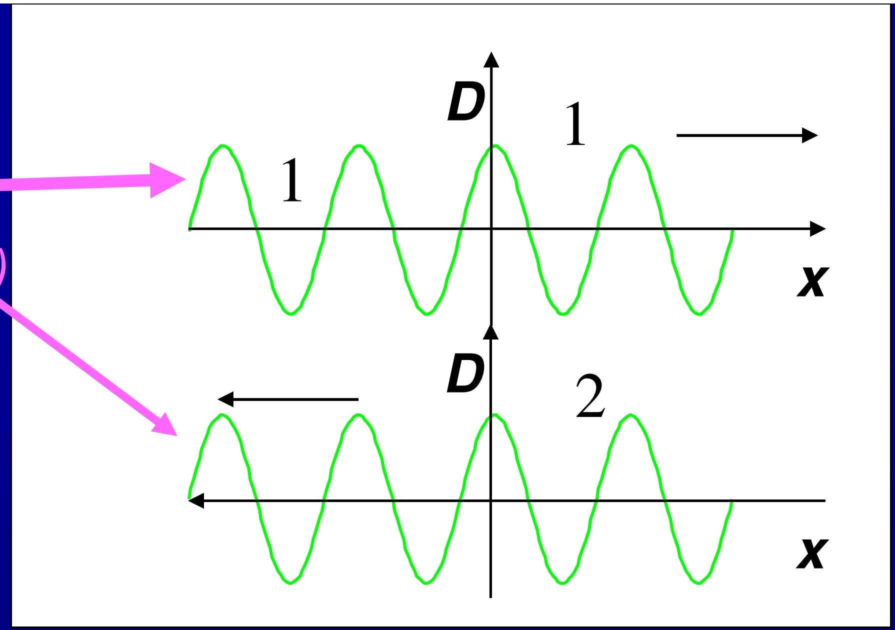


Wszystkie punkty wykonują drgania w tej samej fazie . Fali stojącej nie towarzyszy propagacja energii , choć z falą tą jest związana energia drgań punktów ośrodka

Fale stojące

1 $D_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

2 $D_2(x,t) = A\cos(-kx - \omega t) = A\cos(kx + \omega t)$



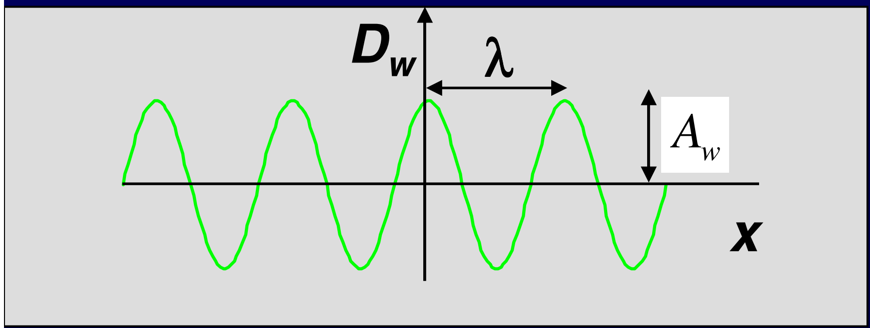
Fala stojąca powstaje np. w wyniku interferencji jednakowych fal 1 i 2 propagujących w przeciwnych kierunkach

Fala wypadkowa

$$D_w(x,t) = D_1(x,t) + D_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t)$$
$$= 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = \pm A_w \cos(\omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$



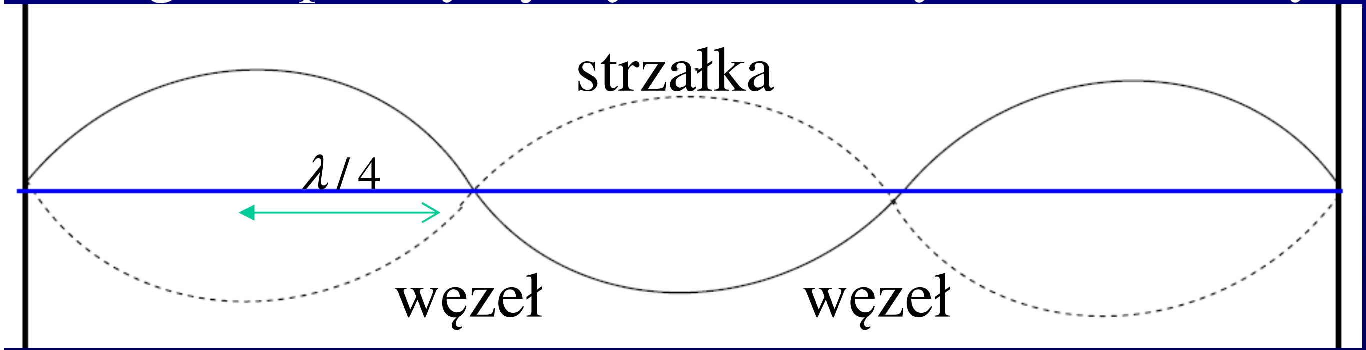
Wszystkie punkty wykonują drgania w tej samej fazie (lub fazie przeciwnej). Fali stojącej nie towarzyszy propagacja energii , choć z falą tą jest związana energia drgań punktów ośrodka

$$D_w(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = \pm A_w \cos(\omega t) \qquad (*)$$

amplituda drgań w fali stojącej
zależy od położenia punktu w przestrzeni

$$A_w = 2A\left|\cos(kx)\right| = 2A\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$$

Cechą fali stojącej jest to, iż można wyróżnić punkty, w których amplituda drgań jest maksymalna i równa *2A* nazywane strzałkami fali oraz punkty, w których drgania nie występują nazywane węzłami fali. Odległość pomiędzy sąsiednimi węzłem i strzałką fali jest równa λ/4 .

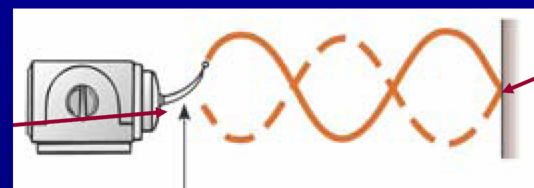


Dla fali stojącej opisanej wzorem (*) strzałki fali występują w punktach, w których: $x = m\frac{\lambda}{2}$,
zaś węzły dla punktów, w których: $x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$,gdzie *m*-liczba całkowita.

Fale stojące na strunie

W strunie o długości *L* zamocowanej na dwóch końcach o może pojawić się fala stojąca, gdy na obu końcach struny znajdzie się węzeł fali stojącej. Wynika stąd warunek

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$ n=1,2,3…..



Zmiana fazy przy odbiciu

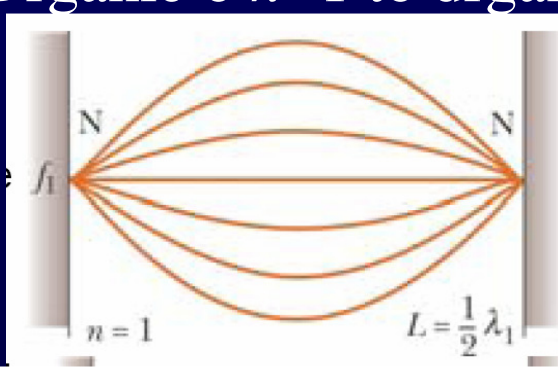
skąd wynika iż długości fali i częstość rozchodzących się fal muszą spełniać warunki

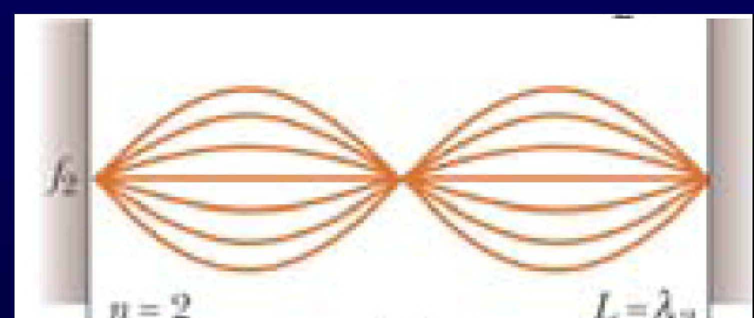
$$\lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{nV}{2L}$$

V-wartość prędkości fal rozchodzących się w strunie

Drganie o n=1 to drganie podstawowe





Równanie falowe

Ogólnie falę płaską (niekoniecznie harmoniczną) propagującą wzdłuż osi Ox w kierunku zgodnym ze zwrotem osi Ox z prędkością o wartości V opisuje funkcja

$$D(x,t) = f(x - Vt)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -V\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$f(x - Vt)$ -dowolna funkcja argumentu x-Vt

Np. dla rozważanej fali harmonicznej $D(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - Vt - \frac{\lambda\delta_0}{2\pi})\right)$

Ogólnie falę płaską propagującą wzdłuż osi Ox w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Ox z prędkością o wartości V można opisać funkcją

$$D(x,t) = f(x + Vt)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = V\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Funkcję opisujące te fale spełniają równanie falowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ -pochodna (cząstkowa) funkcji f po zmiennej t (czasie)

Równanie falowe w trzech wymiarach

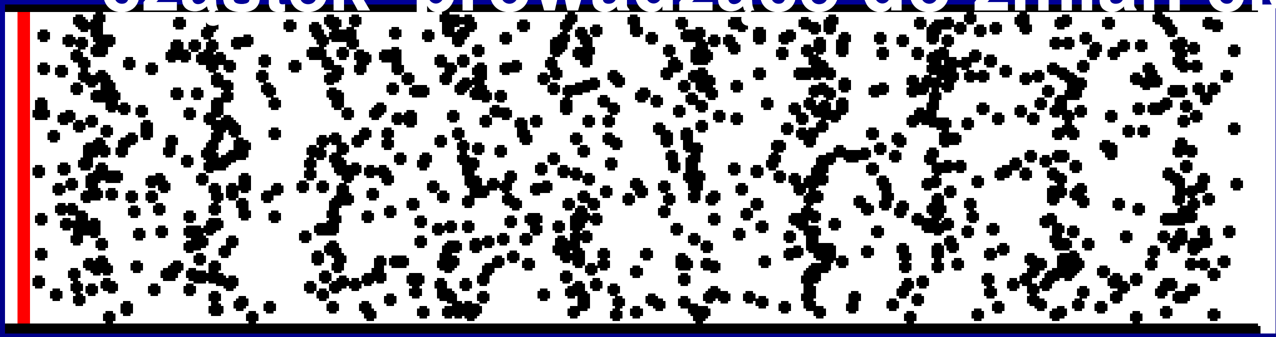
$$\nabla^2 D(x,y,z,t) - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 D(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0$$

Operator Laplace'a (laplasjan)

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Fale akustyczne
Efekt Dopplera

Fala akustyczna– podłużne przemieszczenia cząstek prowadzące do zmian ciśnienia



Fala ta może się rozchodzić się w gazach, cieczach i ciałach stałych

Wychylenie cząstek od położenia równowagi

$$D(x_{eq},t) = x - x_{eq} = A\cos(kx_{eq} - \omega t - \delta_0)$$

Zmiana ciśnienia w stosunku do ciśnienia średniego

$$p - p_{atm} = \Delta p_{\max}\sin(kx_{eq} - \omega t - \delta_0) = \Delta p_{\max}\cos(kx_{eq} - \omega t - \delta_0 - \pi/2)$$

Zmiana ciśnienia jest równa zeru w miejscach gdzie wychylenie cząstek jest maksymalne. Jest ono mała 10^{-5}Pa-20 Pa w stosunku do średniego ciśnienia atmosferycznego 10^5 Pa $Pa = \frac{N}{m^2}$

Prędkość fali akustycznej (dźwiękowej)

Wartość prędkości dźwięku w gazie

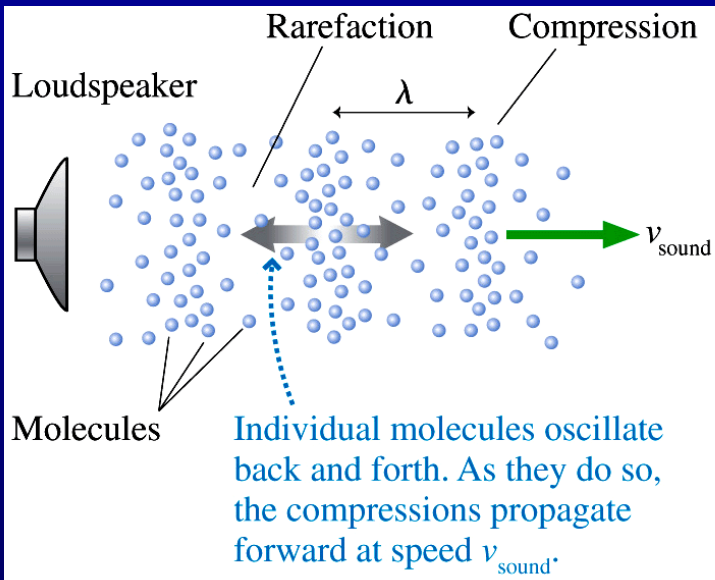


TABLE 20.1 The speed of sound

Medium	Speed (m/s)
Air (0°C)	331
Air (20°C)	343
Helium (0°C)	970
Ethyl alcohol	1170
Water	1480
Granite	6000
Aluminum	6420

$$V = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$$

ρ- gęstość gazu

B- moduł ściśliwości $B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$

p - ciśnienie gazu,

$\kappa = C_p/C_v$ (stosunek ciepła molowego przy stałym ciśnieniu do ciepła molowego przy stałej objętości

$\Delta V / V$ -względna zmiana objętości wywołana przez zmianę ciśnienia Δp

Natężenie fali akustycznej

Natężenie fali *I* – energia fali przenoszona w jednostce czasu (moc) przez jednostkową powierzchnie prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali

$$I = \frac{E}{S\Delta t} = \frac{1}{2} V \rho \omega^2 A^2$$

V-wartość prędkości rozchodzenia się fali

ρ- gęstość ośrodka w którym fala się rozchodz

Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy *A* i kwadratu częstości kołowej *ω*. W przypadku fali akustycznej zwykle rejestrowanej przez człowieka natężenie zawiera się w zakresie od 10^{-12} W/m^2 do 1W/m^2 (czemu odpowiada *A* z zakresu od 10^{-11}m do 10^{-5}m) .

Dowód . Przez rozpatrywaną powierzchnie o polu *S* przedostanie się w ciągu czasu *Δt* energia związana z drganiami cząsteczek zawartych w objętości

$$\Delta V_{ob} = Sl = SV\Delta t$$

o masie

$$\Delta m = \rho \Delta V_{ob} = \rho S V \Delta t$$

Energia ta jest równa

$$E = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho S V \Delta t \omega^2 A^2$$

Poziom natężenia dźwięku

Poziom ten dla fali akustycznej o natężeniu I wyrażony w decybelach można określić ze wzoru:

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

gdzie

$$I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$$

Dźwiękowi o natężeniu $I=I_0=10^{-12}\ W/m^2$ (próg słyszalności) odpowiada $L=0\ dB$, zaś dźwiękowi o natężeniu $I=1W/m^2$ odpowiada $L=120\ dB$.

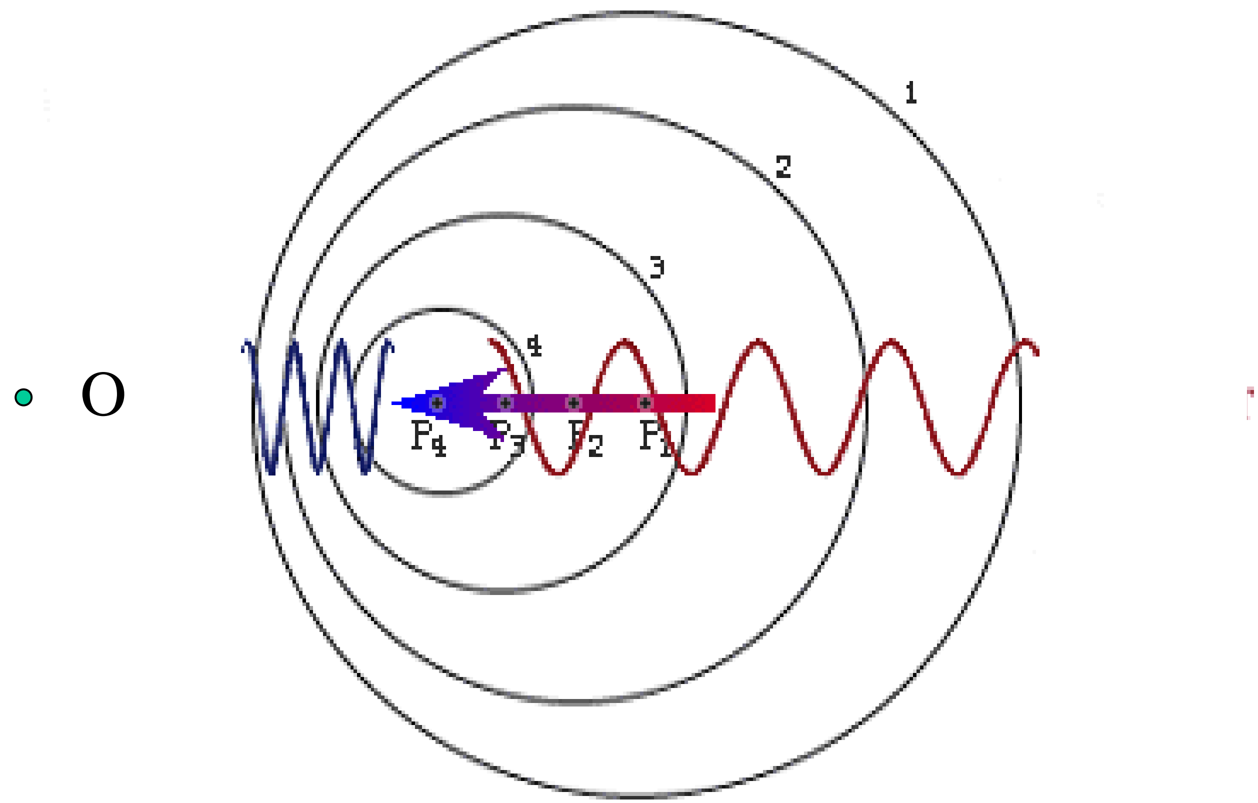
Efekt Dopplera dla fal akustycznych

Odbierana częstość dźwięku zależy od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła

Źródło Z porusza się względem nieruchomego obserwatora O-

- efekt skrócenia długości fali gdy źródło zbliża się do obserwatora
- efekt wydłużenia długości fali gdy źródło oddala się od obserwatora

Źródło wysyła falę harmoniczną kulistą. Okręgi obrazują powierzchnie falowe oddalone o długość fali i poruszające się z prędkością o wartości *V* mierzoną względem ośrodka w którym fala się rozchodzi



Przy braku ruchu źródła względem obserwatora długość fali

$$\lambda = VT_z = \frac{V}{f_Z}$$

gdzie f_Z- częstotliwość fali równa częstotliwości drgań źródła

Efekt Dopplera. Źródło przybliża się do obserwatora O

Podczas jednego okresu drgań T_z źródło przesuwa się o odcinek

$$V_Z T_Z = \frac{V_Z}{f_Z}$$

gdzie V_z- prędkość źródła mierzona w układzie w którym fala się rozchodzi

Długość fali ulega skróceniu o ten odcinek. Długość fali dochodzącej do nieruchomego w rozważanym układzie obserwatora

$$\lambda' = \frac{V}{f_Z} - \frac{V_z}{f_Z}$$

Odbierana przez niego częstotliwość fali

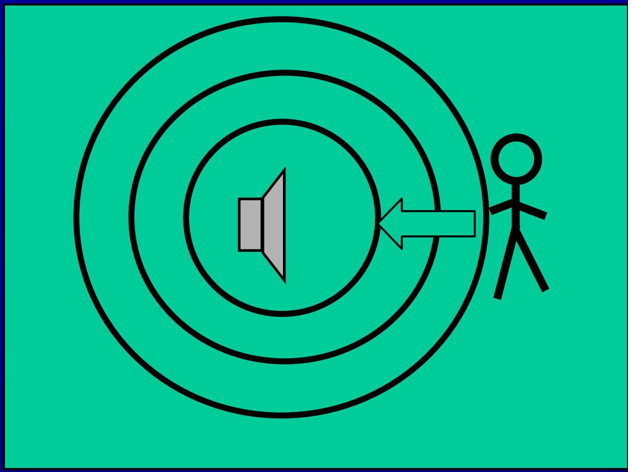
$$f_o = \frac{V}{\lambda'} = \frac{Vf_Z}{V - V_Z} = f_Z \frac{1}{1 - \frac{V_Z}{V}}$$

Zbliżanie się źródła dźwięku powoduje wzrost częstotliwości (V_Z>0) (skrócenie długości fali)

Oddalanie się źródła – zmniejszenie częstotliwości (V_Z<0) (zwiększenie długości fali)

Efekt Dopplera- Obserwator porusza się względem nieruchomego źródła

Źródło wysyła falę kulistą. Okręgi obrazują powierzchnie falowe (grupujące punkty w których drgania zachodzą w tej samej fazie) oddalone o λ i poruszające się z prędkością *V*. Jeśli obserwator by się nie poruszał to w ciągu czasu *t* rejestrowałby Vt/λ powierzchni falowych (przecinał by tyle okręgów na rysunku)



Ponieważ porusza się w stronę źródła z prędkością V_0 to w tym samym czasie *t* rejestruje on V_0t/λ dodatkowych powierzchni falowych. Częstotliwość odbierana przez obserwatora jest równa liczbie powierzchni falowych odbieranych w jednostce czasu

$$f_o = \left(\frac{Vt}{\lambda} + \frac{V_o t}{\lambda}\right)\frac{1}{t} = \frac{V+V_o}{\lambda} = \frac{(V+V_o)f_z}{V} = f_z\left(1+\frac{V_o}{V}\right)$$

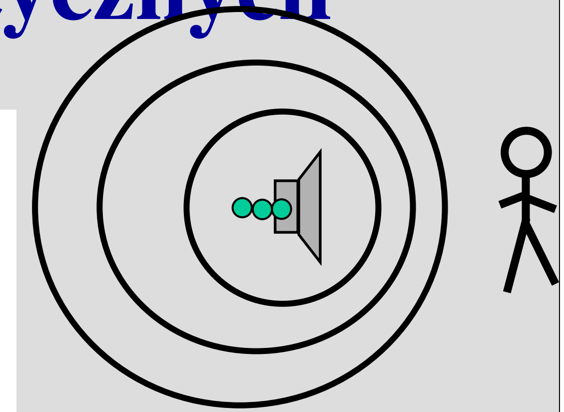
Gdy obserwator się zbliża częstotliwość odbierana jest większa,
Gdy się oddala - mniejsza

Efekt Dopplera dla fal akustycznych

- Jeżeli źródło się porusza
  - **w kierunku obserwatora** ⇒ częstotliwość rośnie
  - **oddalając się od obserwatora** ⇒ częstotliwość maleje

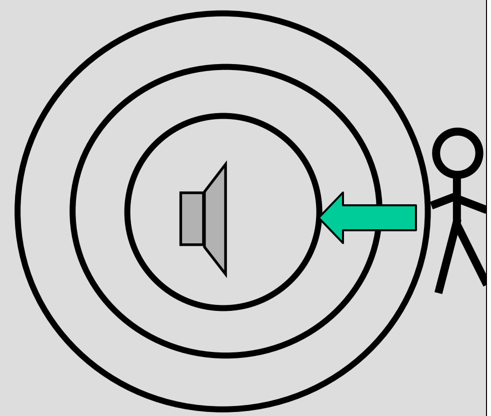
$$f_o = \frac{f_z}{1-\frac{V_z}{V}}$$

$$f_o = \frac{f_z}{1+\frac{V_z}{V}}$$



- **Obserwator porusza się**
  - **w kierunku źródła ⇒ częstotliwość rośnie**
  - **oddala się od źródła ⇒ częstotliwość maleje**

$$f_0 = \left(1+\frac{V_0}{V}\right) f_Z$$



$$f_0 = \left(1-\frac{V_0}{V}\right) f_Z$$

$\frac{V_z}{V} = 0,1 \Rightarrow f_o = 1,111 f_z$ $\frac{V_o}{V} = 0,1 \Rightarrow f_o = 1,1 f_z$ $\frac{V_z}{V} = -0,1 \Rightarrow f_o = 0,909 f_z$ $\frac{V_o}{V} = -0,1 \Rightarrow f_o = 0,9 f_z$