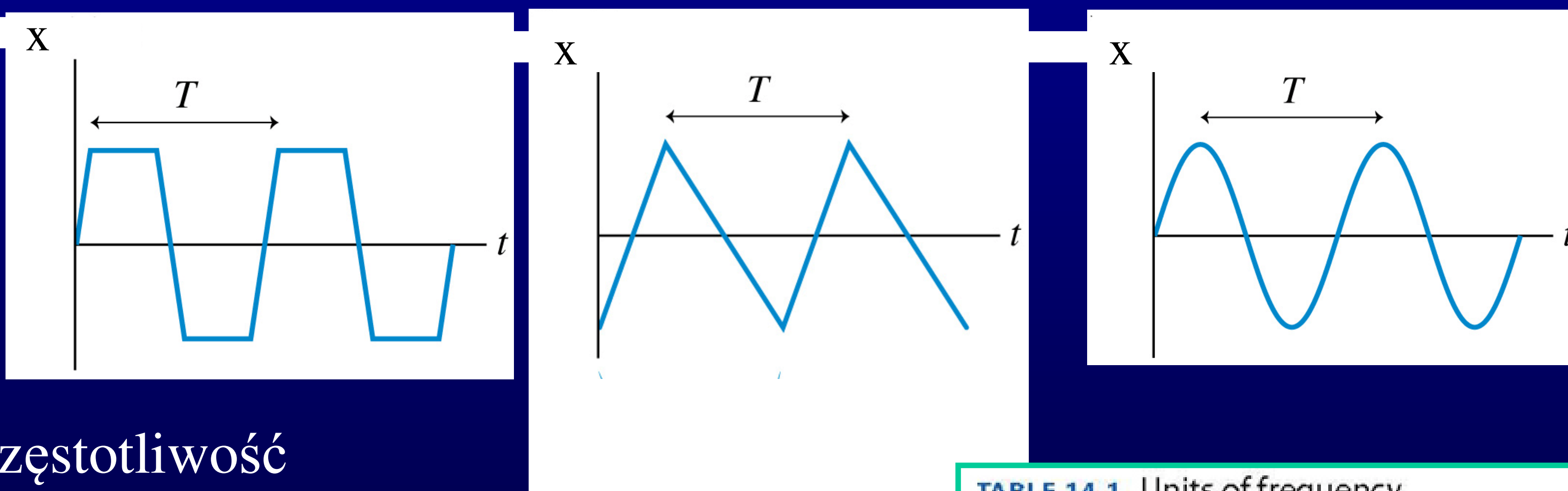
Ruch drgający i fale

Drgania

Ruch drgający jest ruchem okresowym. Układ znajduje się w tym samym położeniu w jednakowych odstępach czasu

$x(t)=x(t+T)$ dla dowolnego t T- okres drgań



f –częstotliwość
Ilość drgań w jednostce czasu

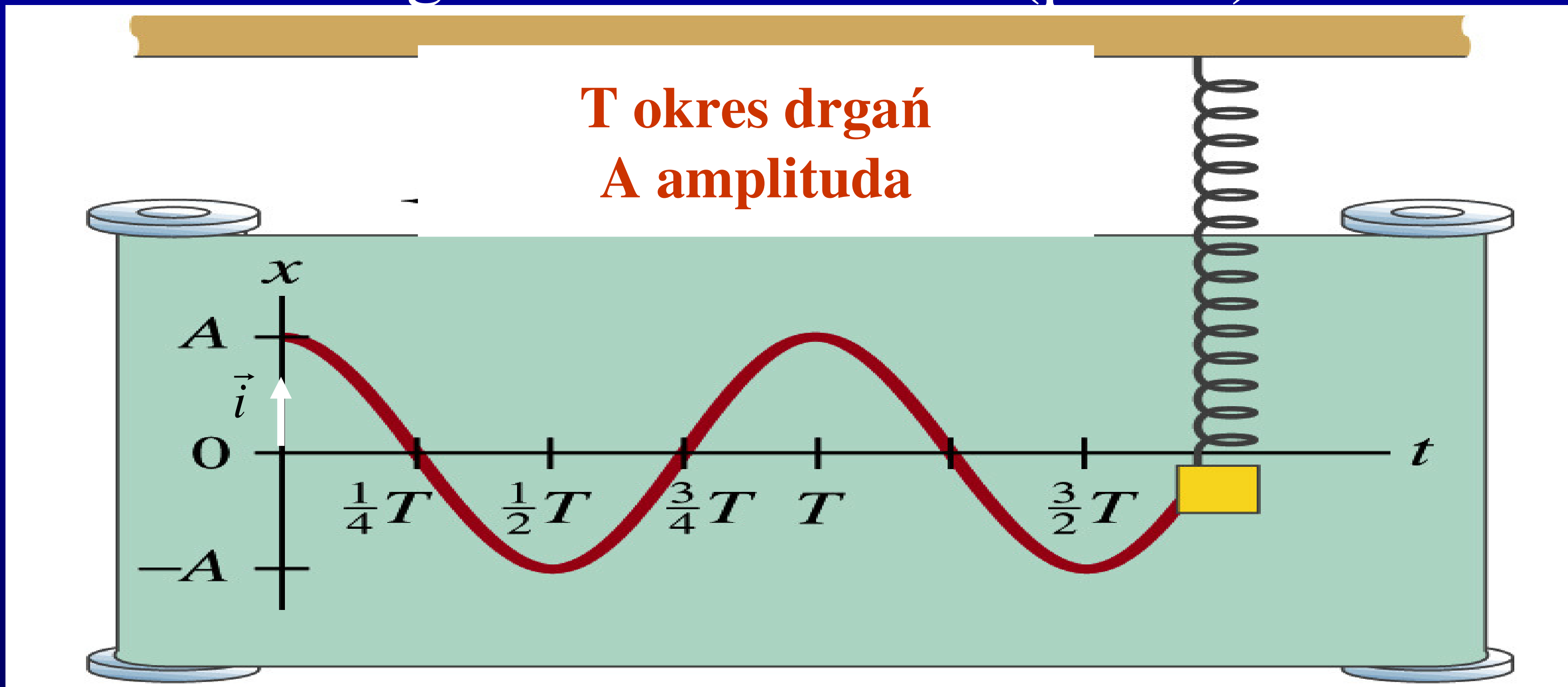
$$f = \frac{1}{T}$$

1Hz=1/s

TABLE 14.1 Units of frequency

Frequency	Period
10^3 Hz = 1 kilohertz = 1 kHz	1 ms
10^6 Hz = 1 megahertz = 1 MHz	1 μs
10^9 Hz = 1 gigahertz = 1 GHz	1 ns

Ruch ciężarka na sprężynie.
Drgania harmoniczne (proste)



Zależność wychylenia od położenia równowagi x(t) może być opisana przy pomocy funkcji trygonometrycznej

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

gdzie A-amplituda –moduł maksymalnego wychylenia z położenia równowagi x=0 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ -częstość kołowa, *f*-częstotliwość drgań

Widać iż

$$x(t+T) = A\cos(\omega(t+T)) = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{T}T\right) =$$
$$= A\cos(\omega t + 2\pi) = A\cos(\omega t) = x(t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$\left|\vec{i}\right| = 1$$

Zależność od czasu prędkości $\vec{V} = V\vec{i}$

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) = -V_{\max}\sin(\omega t)$$

Max. wartość prędkości

$$V_{\max} = A\omega$$

i przyspieszenia $\vec{a} = a\vec{i}$

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t) = -a_{\max}\cos(\omega t)$$

Max. wartość przyspieszenia

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$\frac{d\cos(bt)}{dt} = -b\sin(bt)$$

$$\frac{d\sin(bt)}{dt} = b\cos(bt)$$

Można zauważyć iż $a = -\omega^2 x$

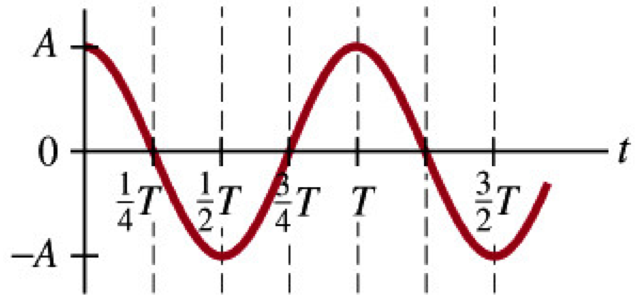
Ruch ciężarka na sprężynie

$x = A\cos(\omega t)$

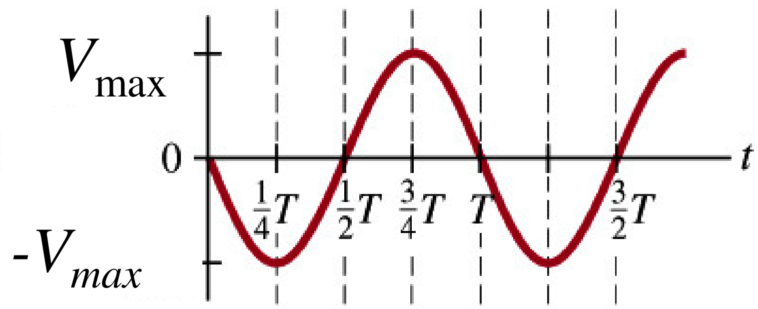
$V = -V_{max} \sin(\omega t)$

położenie

prędkość

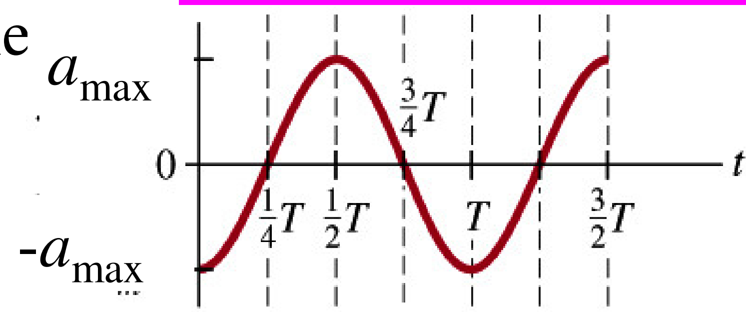


(a)



Prędkość V=*0 gdy* |*x*| *maksymalne*

przyspieszenie



(c)

$a = -a_{max} \cos(\omega t)$

Dr. Koymen

Przyspieszenie *a=0 gdy* |*V*| *maksymalne*

Siła w ruchu harmonicznym

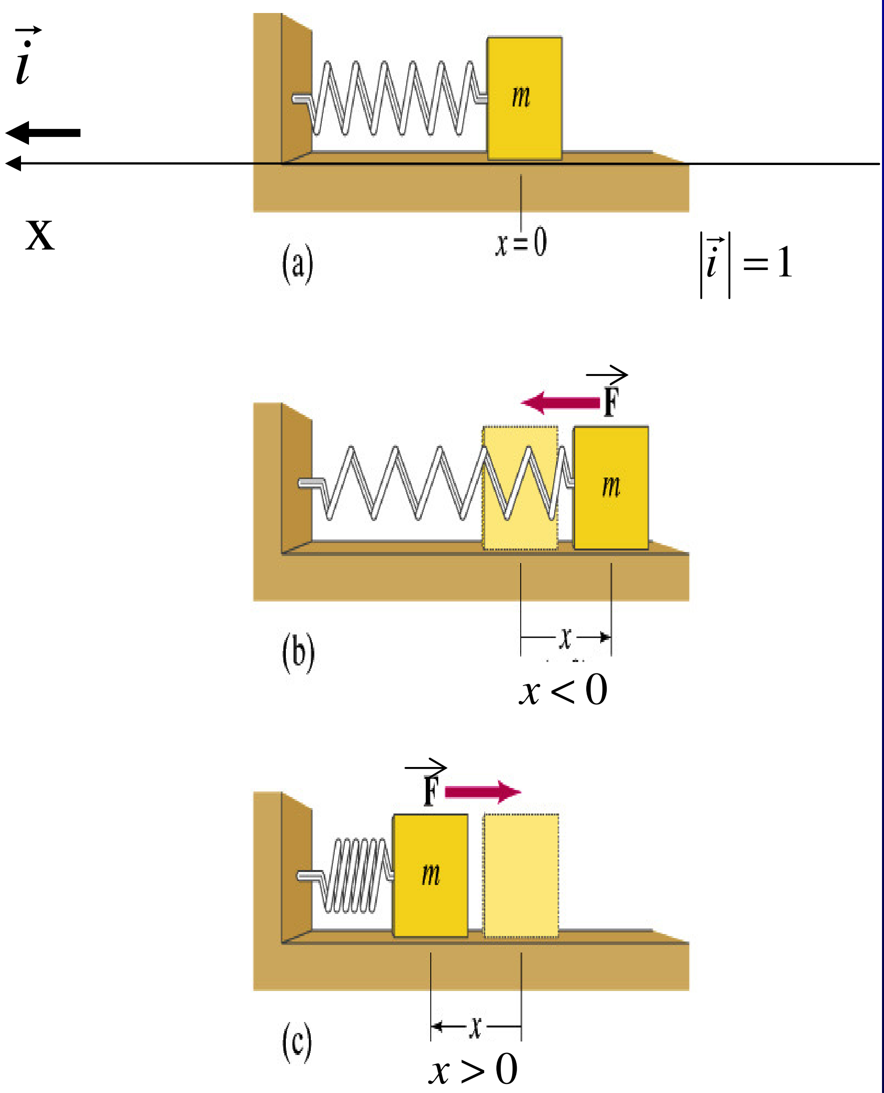
$$\boxed{\vec{F} = -kx\vec{i}}$$

$x\vec{i}$ -wektor wodzący określający położenia ciała w układzie o początku w położeniu równowagi x=0 w którym siła wypadkowa znika

k- stała sprężystości

Siła jest skierowana zawsze w kierunku położenia równowagi, a jej wartość proporcjonalna do odległości ciała od położenia równowagi

$$\boxed{F_x \underset{ozn.}{=} F = -kx}$$



Zwykle samą wielkość x określa się mianem wychylenia

Wzory nie ulęgają zmianie przy zmianie zwrotu osi Ox

Równanie ruchu opisujące drgania harmoniczne wynikające z zasad dynamiki Newtona

m-masa ciała

$a = a_x$ $V = V_x$

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m a \vec{i} = -kx\vec{i}$$

$$ma = -kx \rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Zależność taka zachodzi dla analizowanego poprzednio ruchu gdy $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Równanie różniczkowe liniowe 2 rzędu o stałych współczynnikach jednorodne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\omega t + \varphi_0$ -faza drgań

amplituda (A)

częstość kołowa (ω)

faza początkowa (φ_0)

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Postać ogólna rozwiązania równania różniczkowego 2 rzędu zawiera zawsze dwie stałe dowolne. W postaci rozwiązania podanej powyżej stałymi tymi są *A* (amplituda drgań) *i* φ_0 (faza początkowa drgań) . Stałe *A*, φ_0 można określić w oparciu o warunki początkowe ruchu np. położenie i prędkość w chwili czasu *t*=0. W szczególności φ_0 zależy od chwili wyboru początku pomiaru czasu.

t=0 s, x=A,V=0	lub	t=0 s, x=0, V>0
$\varphi_0=0$	lub	$\varphi_0= -\pi/2$
$x(t) = [A]\cos(\omega t)$ $V(t) = -[A\omega]\sin(\omega t)$ $a(t) = -[A\omega^2]\cos(\omega t)$	lub	$x(t) = [A]\sin(\omega t)$ $V(t) = [A\omega]\cos(\omega t)$ $a(t) = -[A\omega^2]\sin(\omega t)$

$A\omega = V(t=0)$

$x_{max} = A$ $V_{max} = A\omega$ $a_{max} = A\omega^2$

Sprawdzenie iż $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ spełnia dla dowolnego t

równanie różniczkowe drgań $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

$$\frac{dx}{dt} = V = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d\cos(bt+c)}{dt} = -b\sin(bt+c)$$

$$\frac{d\sin(bt+c)}{dt} = b\cos(bt+c)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t+\varphi_0) = 0 \Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)A\cos(\omega t+\varphi_0) = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

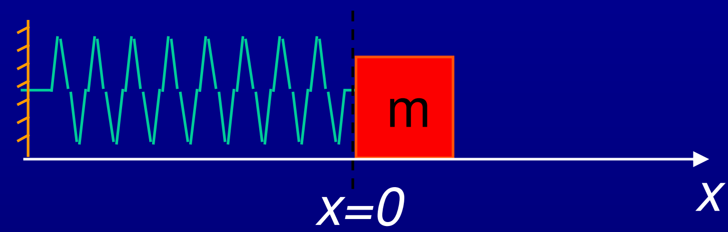
Widać iż zapostulowane rozwiązanie spełnia równanie różniczkowe

opisujące drgania gdy częstość kołowa drgań spełnia relację $\boxed{\omega^2 = \dfrac{k}{m}}$

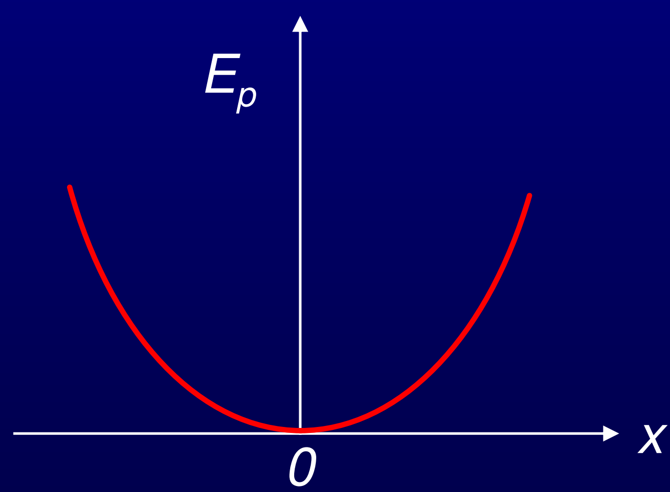
Energia potencjalna związana z siłą sprężystości (harmoniczną)

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$$



|x|-odległość ciała od położenia równowagi x=0 w którym $\vec{F} = 0$



Układ, którego energia potencjalna wyraża się powyższym wzorem, podlegający drganiom harmonicznym, nazywamy oscylatorem harmonicznym.

Energia w ruchu harmonicznym

Energia kinetyczna $E_{kin} = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$

$V = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

Energia potencjalna $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Energia całkowita $E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}\left[m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)\right]$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

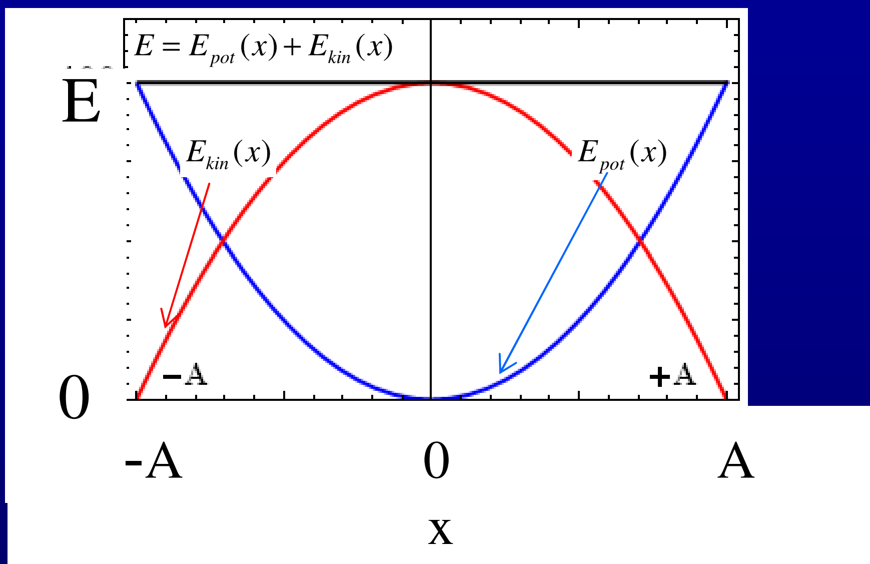
$$E = \frac{1}{2}\left[k\mathrm{A}^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + k\mathrm{A}^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mV_{\max}^2$$

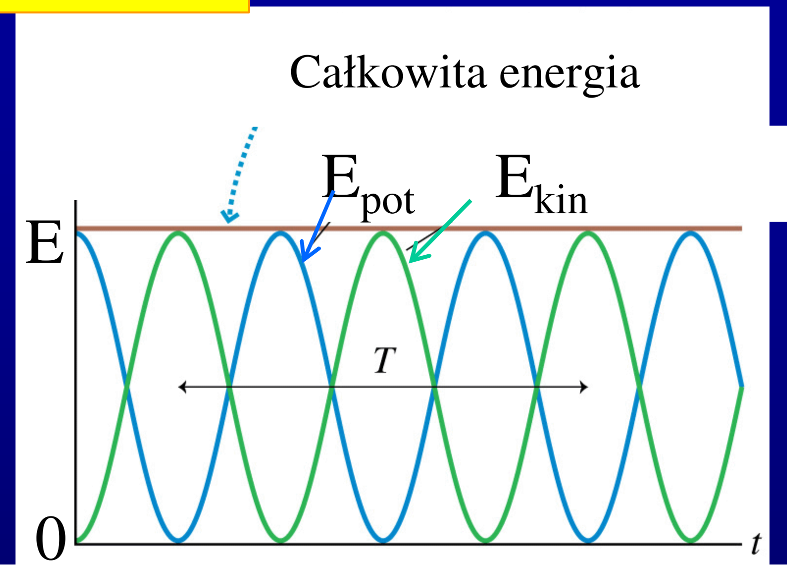
$$V_{\max} = A\omega$$

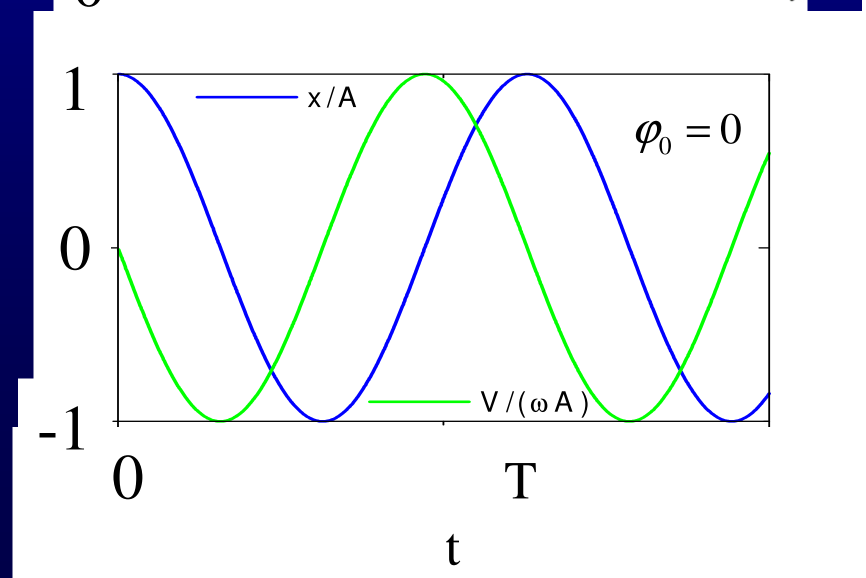
Całkowita energia ciała podlegającego ruchowi harmonicznemu jest stała i proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań.

Energia w ruchu harmonicznym

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mV_{\max}^2 = const$$







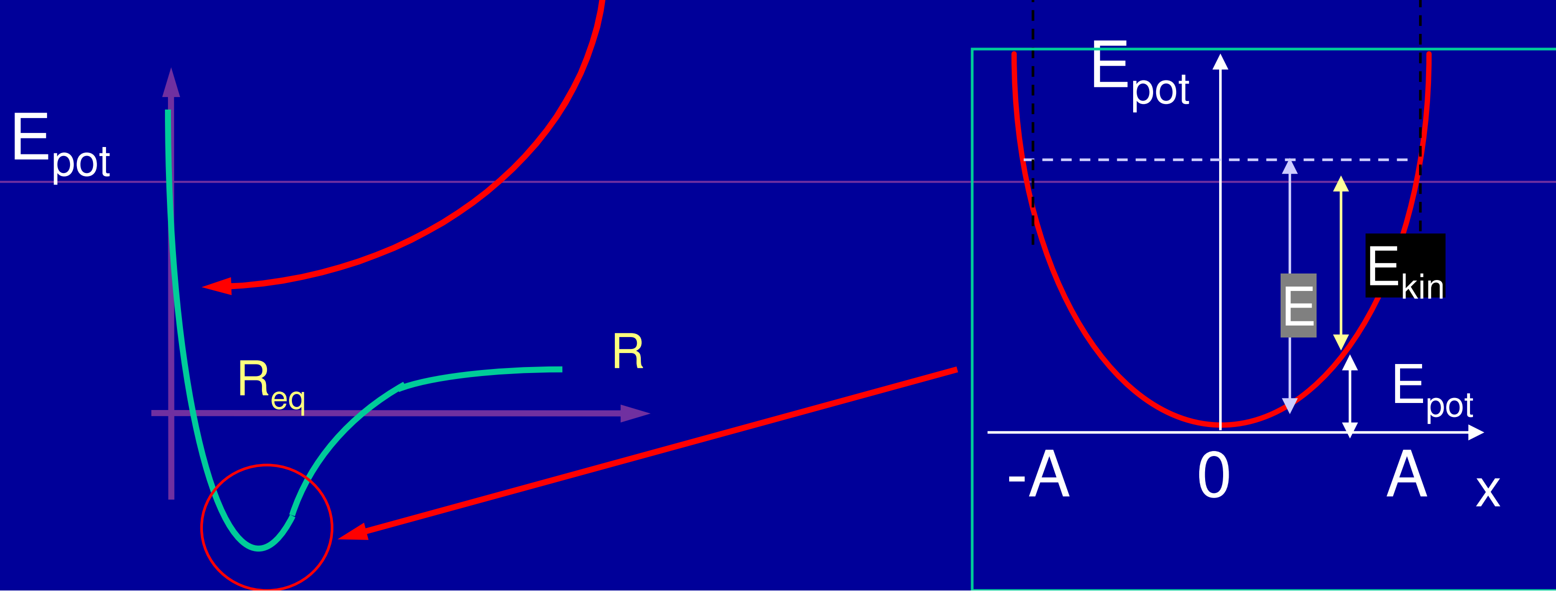
Energia potencjalna jest maksymalna gdy ciało znajduje się w punkcie najdalej położonym od położenia równowagi $x=\pm A$ i spada do zera gdy wychylenie ciała od położenia równowagi $x=0$. W punktach w których energia potencjalna jest maksymalna energia kinetyczna spada do zera, zaś w punktach w których energia potencjalna jest równa zeru, energia kinetyczna jest maksymalna .

Oscylator harmoniczny i potencjał kwadratowy

- Siły harmoniczne występują pomiędzy atomami wychylonymi z położeń ich równowagi w cząsteczkach i ciałach stałych , gdy energia potencjalna ich oddziaływania jest proporcjonalna do kwadratu wychylenia z położenia równowagi $x=R-R_{eq}$

  R-odległość między atomami

  R_{eq} –odległość dla której energia potencjalna jest minimalna
- Na przykład, energia potencjalna oddziaływań występujących pomiędzy atomami wodoru H w cząsteczce H_2
  wygląda tak:



Fale

Falą nazywamy propagację zaburzenia w ośrodku (ośrodek jako całość nie przemieszcza się).
Ruch falowy związany jest zwykle z przenoszeniem energii przez ośrodek, któremu nie towarzyszy transport materii.

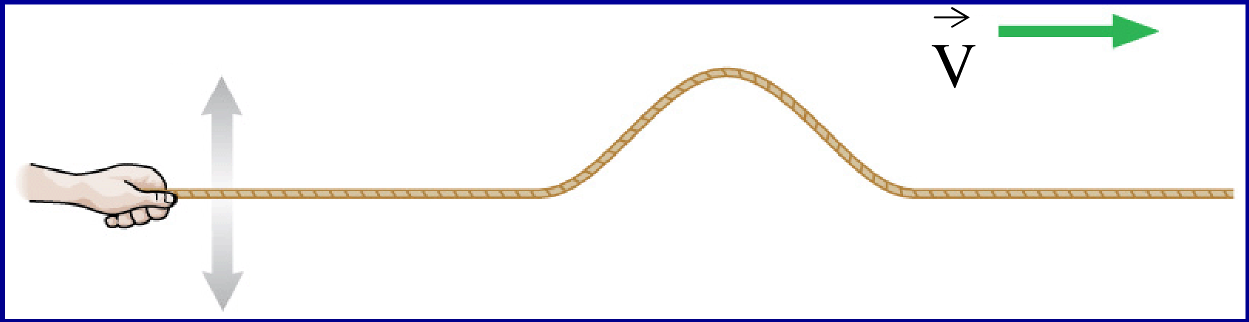
Fale przenoszą energię a nie materię. Fale na wodzie przenoszą energie ale nie masę. Fale mogą istnieć tylko wtedy gdy istnieje energia, którą przenoszą

Typy fal

1. Fale mechaniczne (rozchodzą się w ośrodku materialnym np. woda, powietrze, ciało stałe, w trakcie rozchodzenia się fali cząsteczki ośrodka wykonują drgania wokół położenia równowagi) Przykład: fala dźwiękowa, fale na sznurze, fale na powierzchni wody (np. fale morskie)
2. Fale elektromagnetyczne (drgania pola elektrycznego i magnetycznego)
   Przykład: fale radiowe, mikrofale, światło, promienie rentgenowskie
3. Fale materii

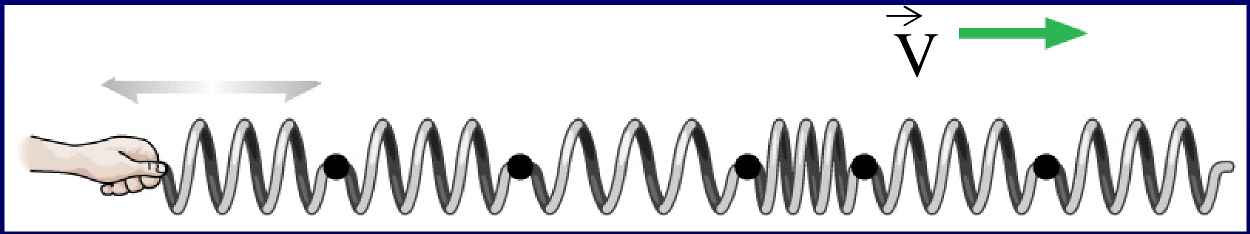
Fale mechaniczne mogą rozchodzić się tylko w ośrodku materialnym
Fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się także w próżni.
Fale mogą rozchodzić się w ośrodku jednowymiarowym (np. fale na sznurze), dwuwymiarowym (np. fale na powierzchni wody) lub trójwymiarowym (np. fale akustyczne w powietrzu)

Fala poprzeczna (fale na sznurze)



Cząsteczki ośrodka poruszają się prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali

Fala podłużna (fala na sprężynie, fala akustyczna)

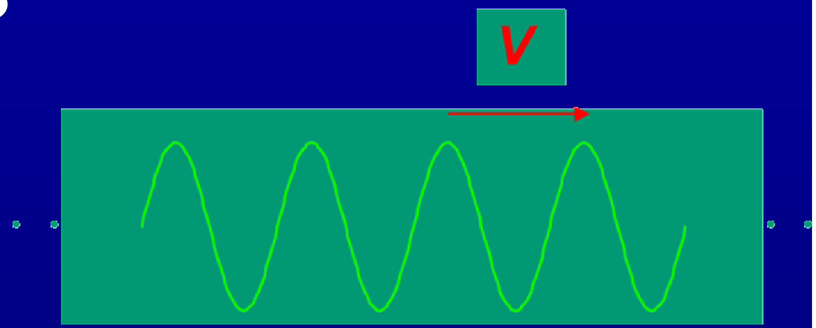


Cząsteczki ośrodka poruszają się równolegle do kierunku rozchodzenia się fali

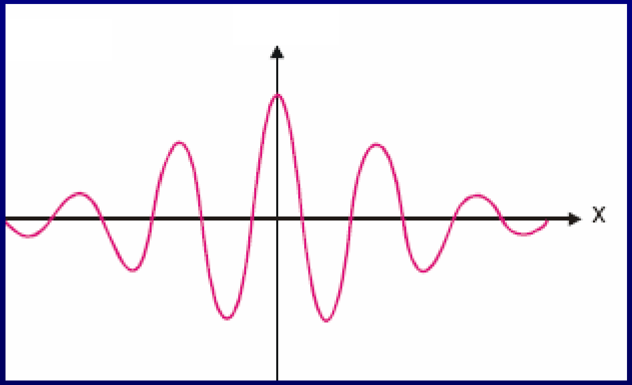
W gazach i cieczach mogą rozchodzić się tylko mechaniczne fale podłużne, gdyż gazy i ciecze nie mają sprężystości postaci

Fala harmoniczna, paczka falowa, impuls

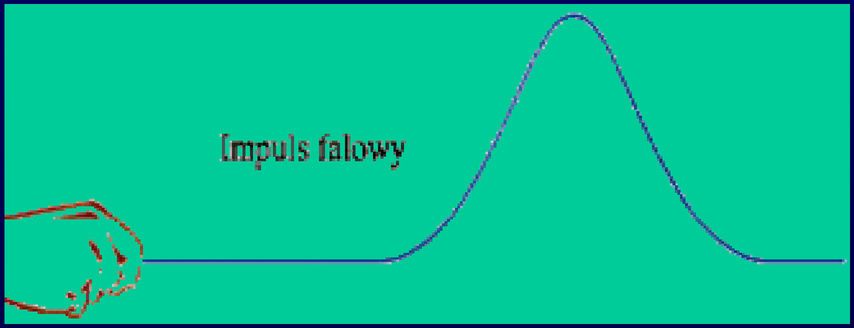
Fala harmoniczna wytwarzana jest przez źródło wykonujące drgania harmoniczne (punkty ośrodka wykonują drgania harmoniczne z różnymi fazami)



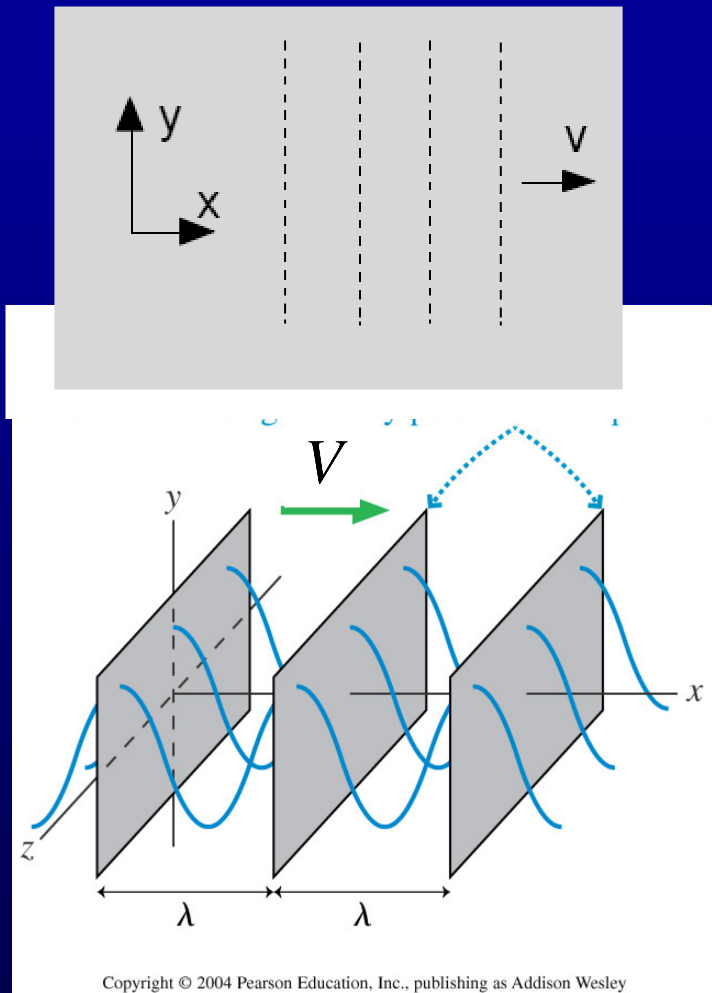
Paczka falowa powstała w wyniku nałożenia się na siebie kilku fal harmonicznych o różnych amplitudach i częstościach drgań



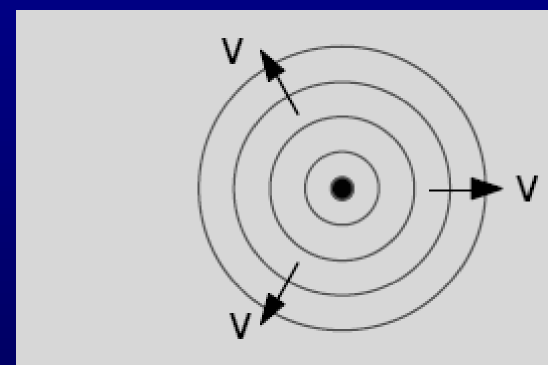
Pojedynczy ruch źródła może powodować powstanie impulsu falowego



Fale rozchodzące się w ośrodku trójwymiarowym

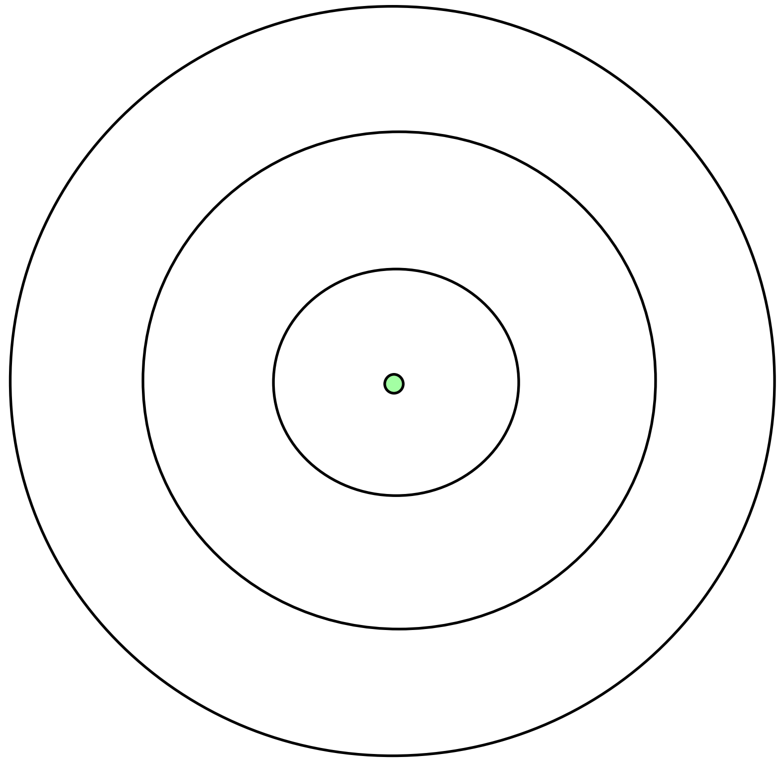


Fala płaska harmoniczna –powierzchnia falowa jest płaszczyzną (powierzchnia falowa- powierzchnia łącząca wszystkie punkty ośrodka, drgające w tej samej fazie)

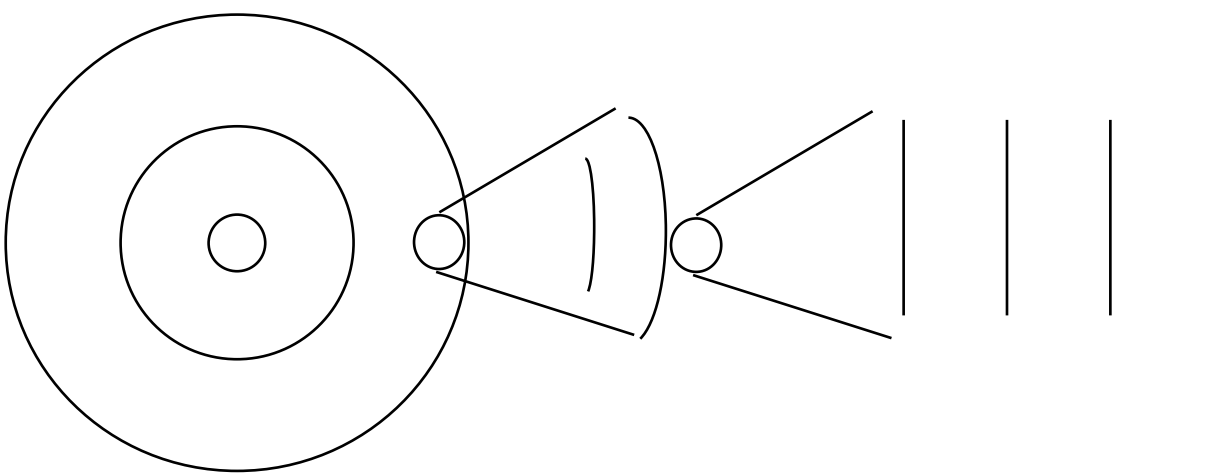


Fala kulista – rozchodzi się we wszystkich kierunkach, wychodzących z jednego punktu będącego źródłem fali. Powierzchnie falowe są sferami.

- Fala akustyczna po wybuchu pocisku jest falą sferyczną



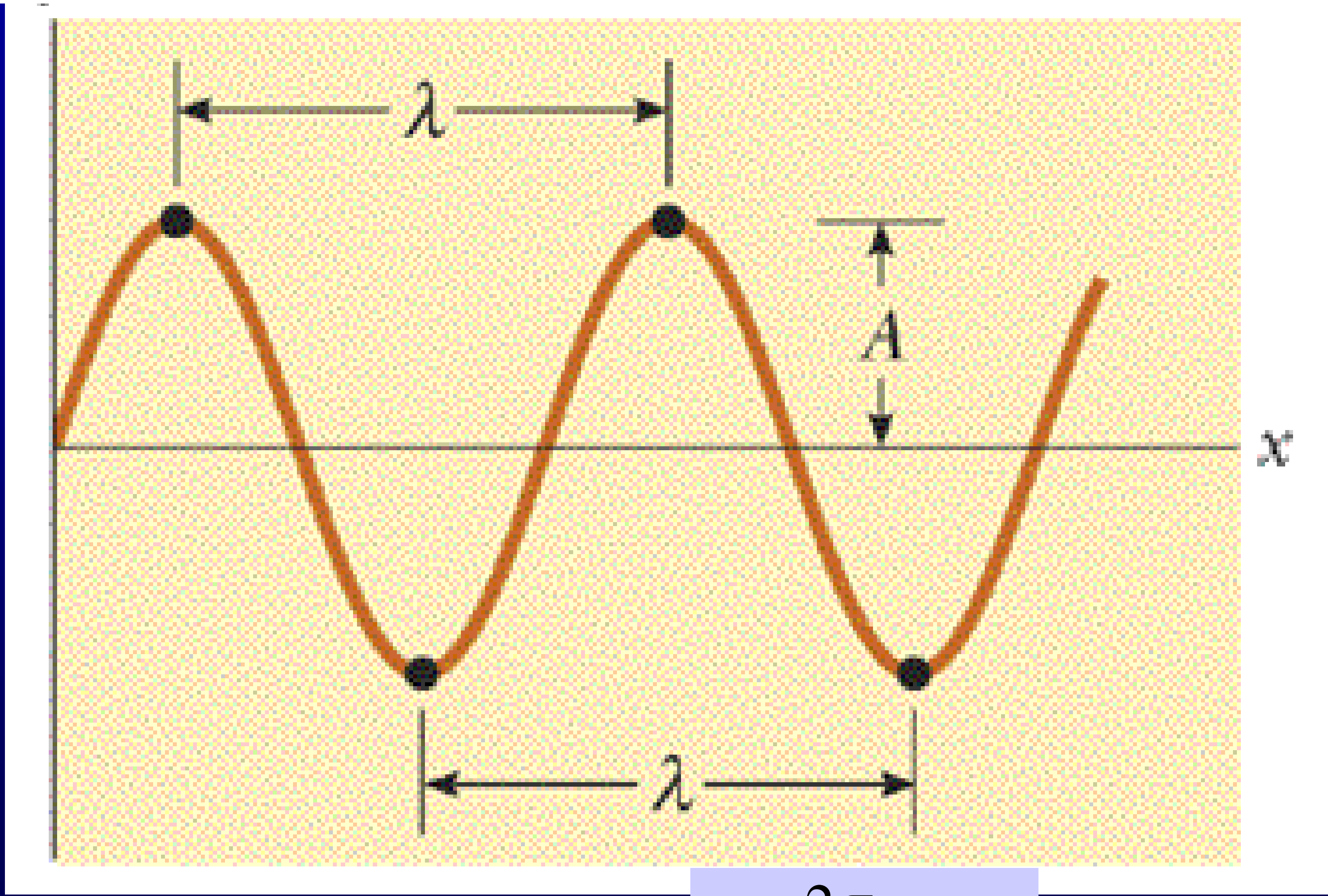
Powierzchnie falowe



Z dala od źródła fala może być przybliżona przez fale płaską

Wielkości opisujące falę harmoniczną

Wychylenie z położenia równowagi (oznaczenie *D*)



W ogólnym przypadku *D* może oznaczać zaburzenie wywołane przez falę

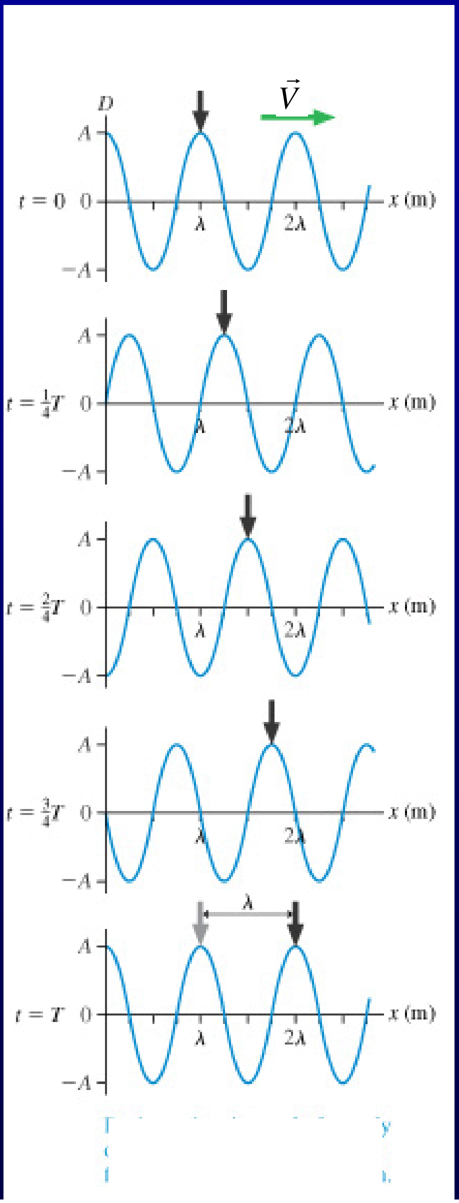
A –amplituda fali, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ *częstość kołowa drgań*

Długość fali λ jest równa odległości między punktami drgającymi w tej samej fazie.

Prędkość fazowa i grupowa .
Związki pomiędzy wielkościami opisującymi falę harmoniczną

Prędkość fazowa –prędkość przemieszczania się powierzchni falowych czyli punktów drgających w tej samej fazie

Grzbiet fali harmonicznej przesuwa się w prawo z prędkością o wartości *V*. Podczas okresu drgań *T* przebywa on drogę równą długości fali. Prędkość rozchodzenia się fali



$$V = \frac{droga}{czas} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\omega$$

$$V = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = Vk$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ -liczba falowa

Często prędkość *V* nie zależy od częstości drgań czyli także od długości fali i *k*. Wówczas ω jest liniową funkcją *k*. Istnieją jednak fale których prędkość fazowa zależy od *k* (np. światło rozchodzące się w ośrodku różnym od próżni, kiedy mamy do czynienia z dyspersją światła). Prędkość fazowa określa prędkość rozchodzenia się fali harmonicznej. W przypadku ruchu paczki falowej prędkość jej ruchu wyznacza prędkość grupowa. Określa ona szybkość przesuwania się położenia w którym *D* osiąga maksimum. Jest ona równa prędkości fazowej wówczas gdy prędkość fazowa wszystkich fal harmonicznych tworzących paczkę jest jednakowa.

Równanie fali płaskiej harmonicznej biegnącej wzdłuż osi Ox z prędkością o wartości *V*

W dowolnym punkcie ośrodka wychylenie jest równe

$$D(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Faza początkowa φ_0 zależy od położenia *x*. Niech faza początkowa w punkcie *x*=0 będzie równa δ_0. Tę samą fazę punkt o współrzędnej *x* będzie miał po upływie czasu potrzebnego na przebycie przez falę odległości *x* z prędkością fazową o wartości *V*, czyli po czasie $t=x/V$

$$\omega \tfrac{x}{V} + \varphi_0 = \delta_0 \Rightarrow \varphi_0 = \delta_0 - \tfrac{\omega x}{V}$$

$$D(x,t) = A\cos(\omega t - \tfrac{\omega x}{V} + \delta_0)$$

$$k = \frac{\omega}{V} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$D(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \delta_0)$$

$$D(x,t) = A\cos(kx - \omega t - \delta_0)$$

$$D(x,t) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} - \frac{\delta_0}{2\pi}\right)\right)$$

$$D(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda t}{T} - \frac{\lambda\delta_0}{2\pi}\right)\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - Vt - \frac{\lambda\delta_0}{2\pi}\right)\right)$$

Równanie fali płaskiej harmonicznej

Łatwo można pokazać iż dla dowolnego czasu *t* wychylenie cząstek ośrodka z położenia równowagi D(x,t) spełnia relacje

$$D(x+\lambda,t)=D(x,t)$$

$$D(x,t)=A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}-\frac{\delta_0}{2\pi}\right)\right)$$

$$D(x+\lambda,t)=A\cos\left(2\pi\left(\frac{x+\lambda}{\lambda}-\frac{t}{T}-\frac{\delta_0}{2\pi}\right)\right)=$$

$$A\cos\left(\tfrac{2\pi x}{\lambda}+2\pi-\tfrac{2\pi t}{T}-\delta_0\right)=A\cos\left(\tfrac{2\pi x}{\lambda}-\tfrac{2\pi t}{T}-\delta_0\right)=$$

$$=A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}-\frac{\delta_0}{2\pi}\right)\right)=D(x,t)$$

czyli w dowolnej chwili czasu jest ono jednakowe w punktach odległych o długość fali.

Dla fali płaskiej harmonicznej propagującej w ośrodku trójwymiarowym

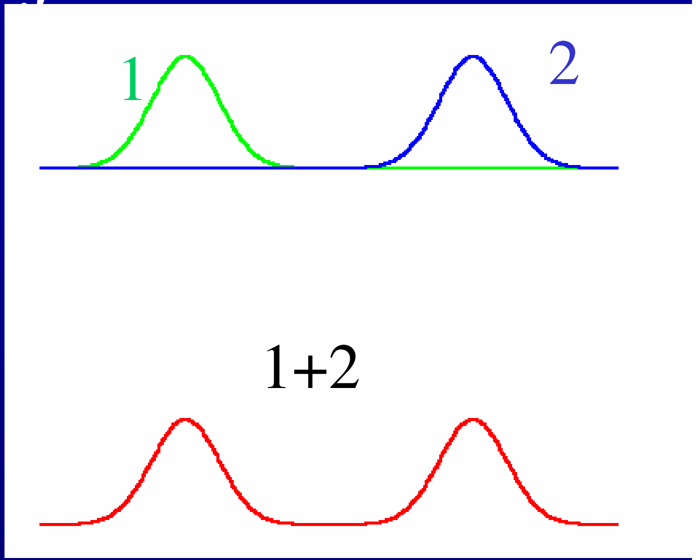
$$D(\vec{r},t)=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\delta_0)$$

$$\left|\vec{k}\right|=k=2\pi/\lambda$$

$\vec{k}$ -wektor falowy opisujący kierunek rozchodzenia się fali

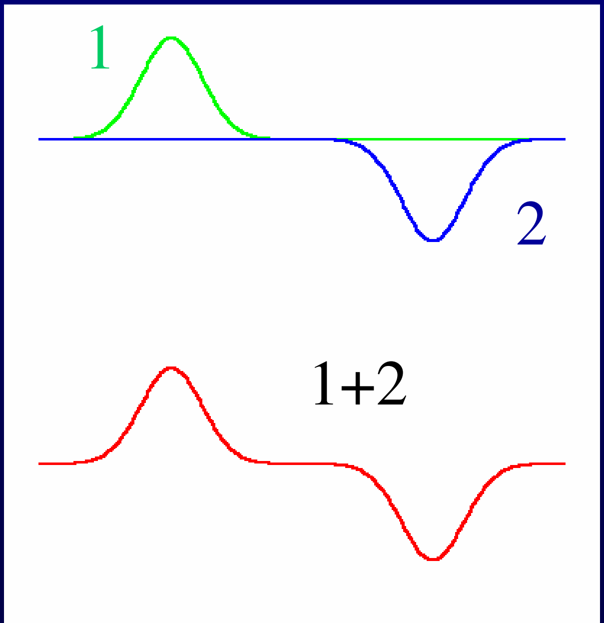
Zasada superpozycji

Zaburzenie wywołane w dowolnym punkcie przez dwie nakładające się fale jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez każdą z fal.



Zaburzenie wywołane przez 1 falę

$$D_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$



Zaburzenie wywołane przez 2 falę

$$D_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Zaburzenie wypadkowe

$$D(t) = D_1(t) + D_2(t)$$

Interferencja fal

Zjawisko nakładania się zaburzeń (drgań) pochodzących od różnych fal o tej samej częstości kołowej $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ nazywamy zjawiskiem interferencji fal. Amplituda drgań powstałych w wyniku interferencji dwóch fal wywołujących drgania zachodzące w tym samym kierunku zależy od amplitudy drgań wywołanych przez obie fale osobno A_1 i A_2 odpowiednio oraz różnicy faz początkowych tych drgań

$$A_w = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

W przypadku interferencji dwóch fal o jednakowej długości λ (rozchodzących się z tą samą wartością prędkości $V=\omega/k$) od źródeł fali do punktu ich obserwacji mamy:

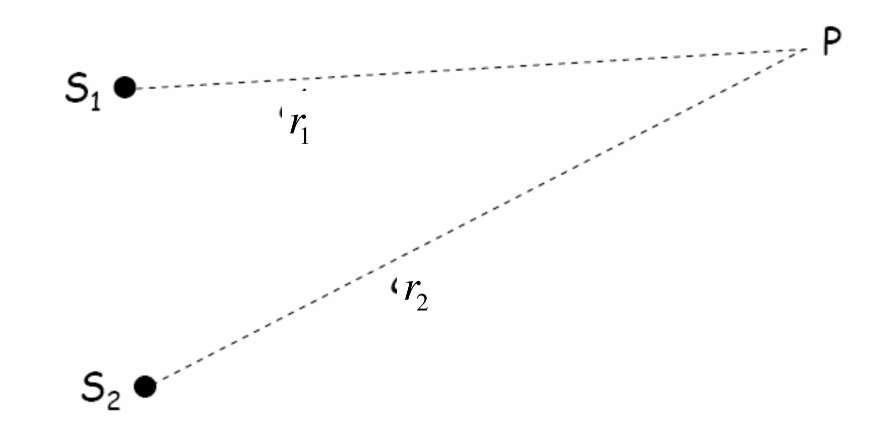
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -k(r_1 - r_2) + (\delta_{01} - \delta_{02}) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + (\delta_{01} - \delta_{02})$$

$r_2 - r_1$ -różnica dróg pokonanych przez obie fale od ich źródeł do punktu, w którym zachodzi interferencja fali

$\delta_{01} - \delta_{02}$ -różnica początkowych faz drgań w punktach, będących źródłami fali.

$$A_w = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}$$

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) + (\delta_{01} - \delta_{02}) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + (\delta_{01} - \delta_{02})$$



Gdy $\delta_{02} = \delta_{01}$ to największa amplituda drgań wypadkowych występująca wtedy gdy $\Delta\varphi = 2n\pi$ występuje w punktach, dla których $|r_2 - r_1| = n\lambda = 0, \lambda, 2\lambda, ...$ (n-liczba całkowita) i jest ona równa $A_w = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$ (interferencja konstruktywna zaś amplituda drgań przyjmująca wartość najmniejszą wtedy gdy $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$ osiąga minimalną wartość w punktach dla których $|r_2 - r_1| = (2n+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, ...$

i jest ona równa

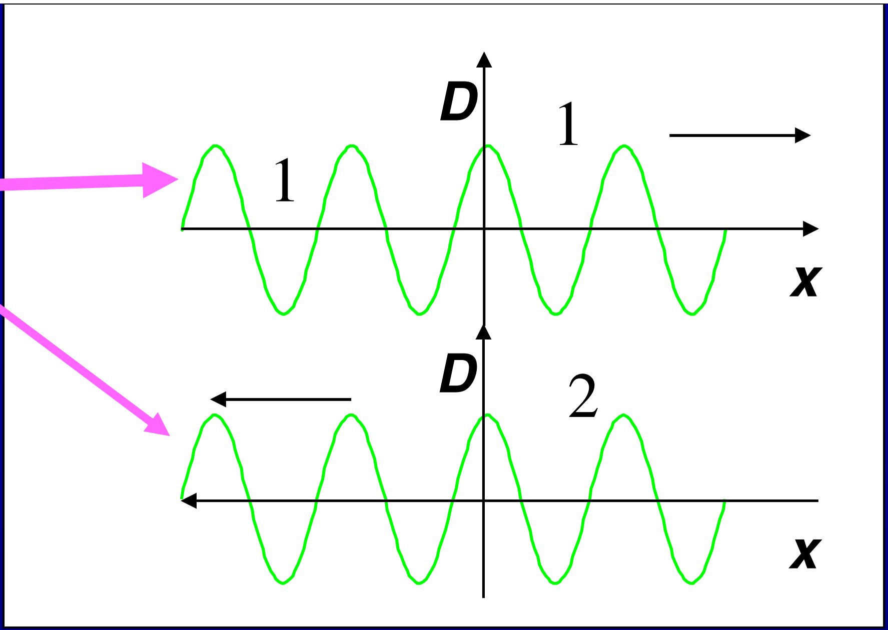
$A_w = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$ (interferencja destruktywna)

Interferencja fal może być obserwowana gdy fale są spójne tzn. różnica faz $\Delta\varphi$ nie zmienia się zbyt szybko w czasie.

Fale stojące

1 $D_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

2 $D_2(x,t) = A\cos(-kx - \omega t) = A\cos(kx + \omega t)$



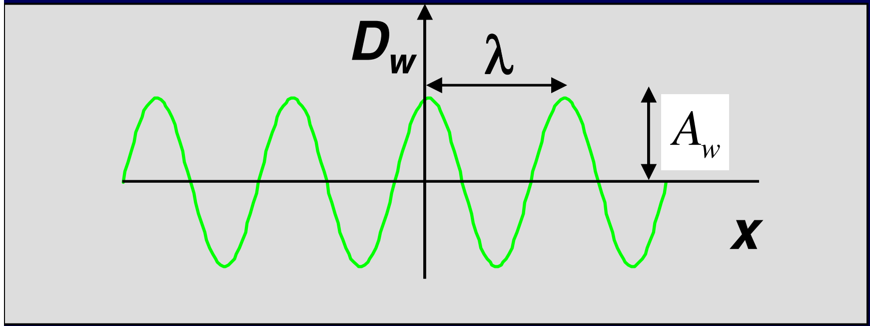
Fala stojąca powstaje np. w wyniku interferencji jednakowych fal 1 i 2 propagujących w przeciwnych kierunkach

Fala wypadkowa

$$D_w(x,t) = D_1(x,t) + D_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t)$$
$$= 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = \pm A_w \cos(\omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$



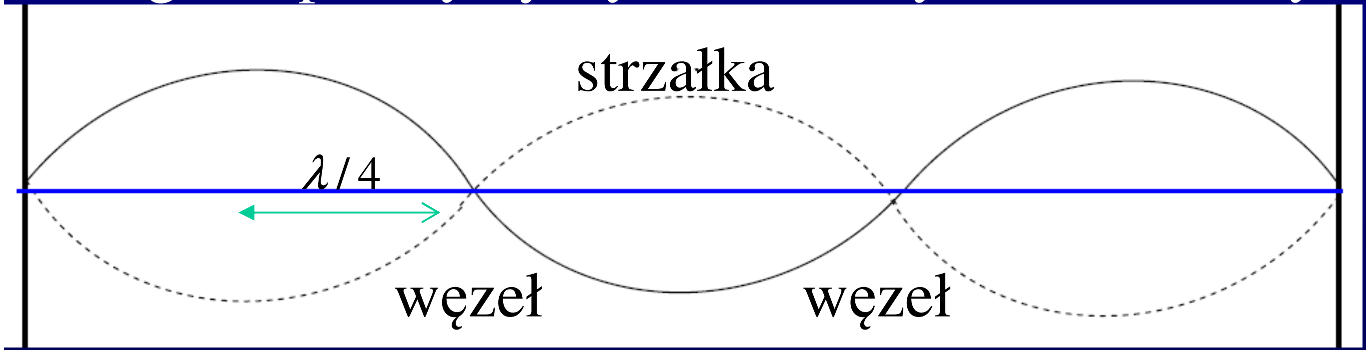
Wszystkie punkty wykonują drgania w tej samej fazie (lub fazie przeciwnej). Fali stojącej nie towarzyszy propagacja energii , choć z falą tą jest związana energia drgań punktów ośrodka

$$D_w(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = \pm A_w \cos(\omega t) \qquad (*)$$

amplituda drgań w fali stojącej
zależy od położenia punktu w przestrzeni

$$A_w = 2A\left|\cos(kx)\right| = 2A\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$$

Cechą fali stojącej jest to, iż można wyróżnić punkty, w których amplituda drgań jest maksymalna i równa *2A* nazywane strzałkami fali oraz punkty, w których drgania nie występują nazywane węzłami fali. Odległość pomiędzy sąsiednimi węzłem i strzałką fali jest równa λ/4 .



Dla fali stojącej opisanej wzorem (*) strzałki fali występują w punktach, w których: $x = m\frac{\lambda}{2}$,
zaś węzły dla punktów, w których: $x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$,gdzie *m*-liczba całkowita.