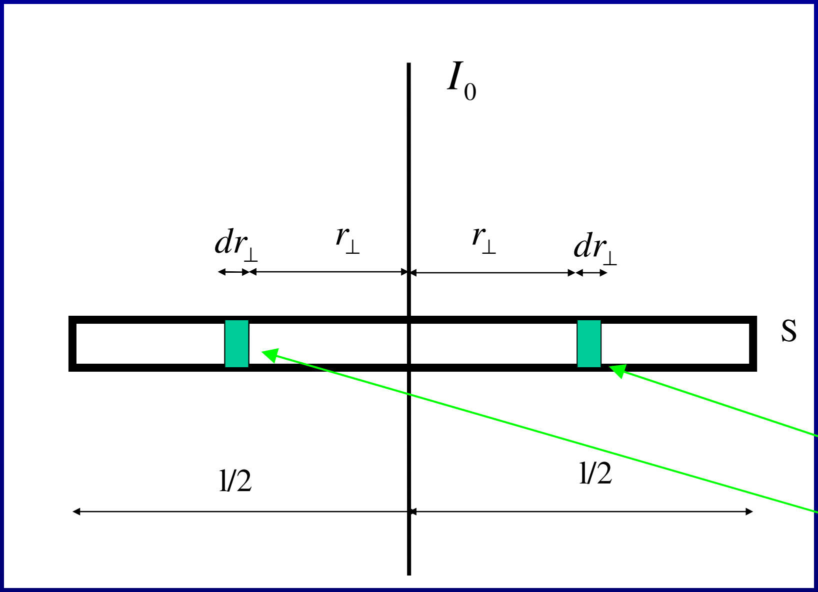
Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek pręta prostopadły do pręta (wyprowadzenie wzoru dla zainteresowanych)

Toczenie bryły bez poślizgu

Moment bezwładności pręta
(dla zainteresowanych)

$$I = \int_m r_\perp^2 dm = \int_V \rho r_\perp^2 dV \overset{\rho=const}{=} \rho \int_V r_\perp^2 dV$$



S –pole przekroju pręta

$dV = f(r_\perp)\cdot dr_\perp$ –objętość części pręta położonej w odległości z zakresu $(r_\perp, r_\perp + dr_\perp)$ od osi obrotu $dr_\perp \to 0$

$dV_1 = S \cdot dr_\perp$

$dV_2 = S \cdot dr_\perp$

$dV = dV_1 + dV_2 = 2S \cdot dr_\perp$

$dm = \rho dV = 2\rho S \cdot dr_\perp$

W przypadku rozważanym pręta o stałym przekroju $f(r_\perp) = 2S = const$

$$\frac{dr_\perp^3}{dr_\perp} = 3r_\perp^2$$

$$I_0 = \rho \int_V r_\perp^2 dV = \rho \int_{r_{\perp,\min}=0}^{r_{\perp,\max}=l/2} r_\perp^2 f(r_\perp) dr_\perp = 2\rho S \int_0^{l/2} r_\perp^2 dr_\perp = 2\rho S \cdot \frac{1}{3} r_\perp^3 \Big|_0^{l/2} = \frac{2}{3}\rho S \cdot \left(\frac{l^3}{8} - 0\right) = \frac{1}{12}\rho S l^3$$

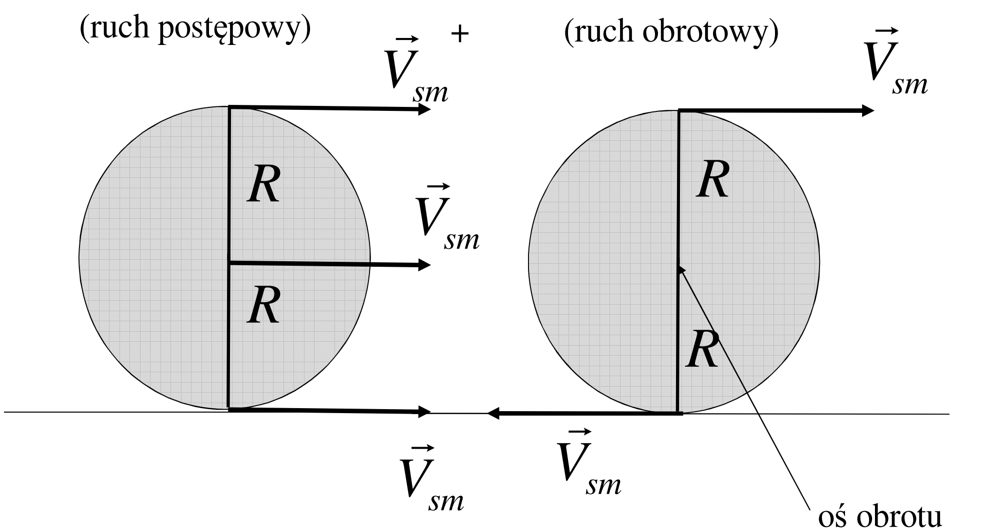
gęstość pręta $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{Sl}$

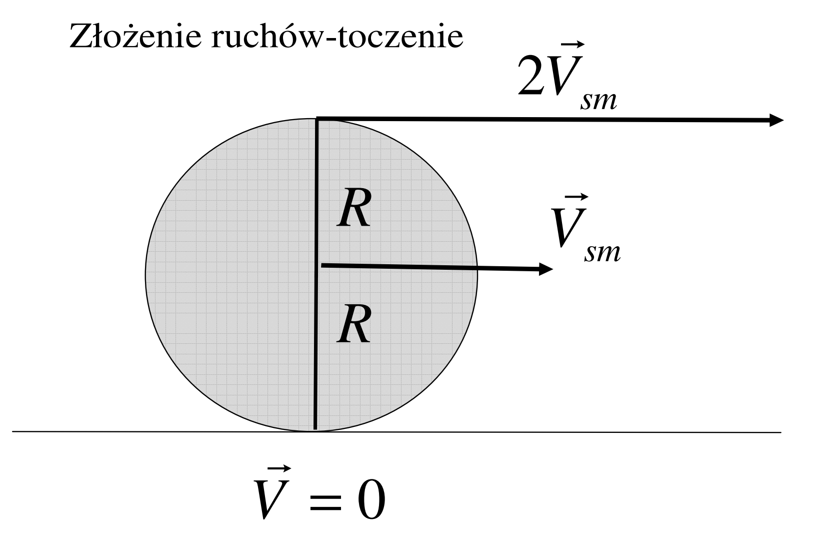
$$I_0 = \frac{1}{12}\rho S l^3 = \frac{1}{12}\cdot\frac{m}{Sl}\cdot S l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$

l –długość pręta; m –masa pręta; V- objętość pręta

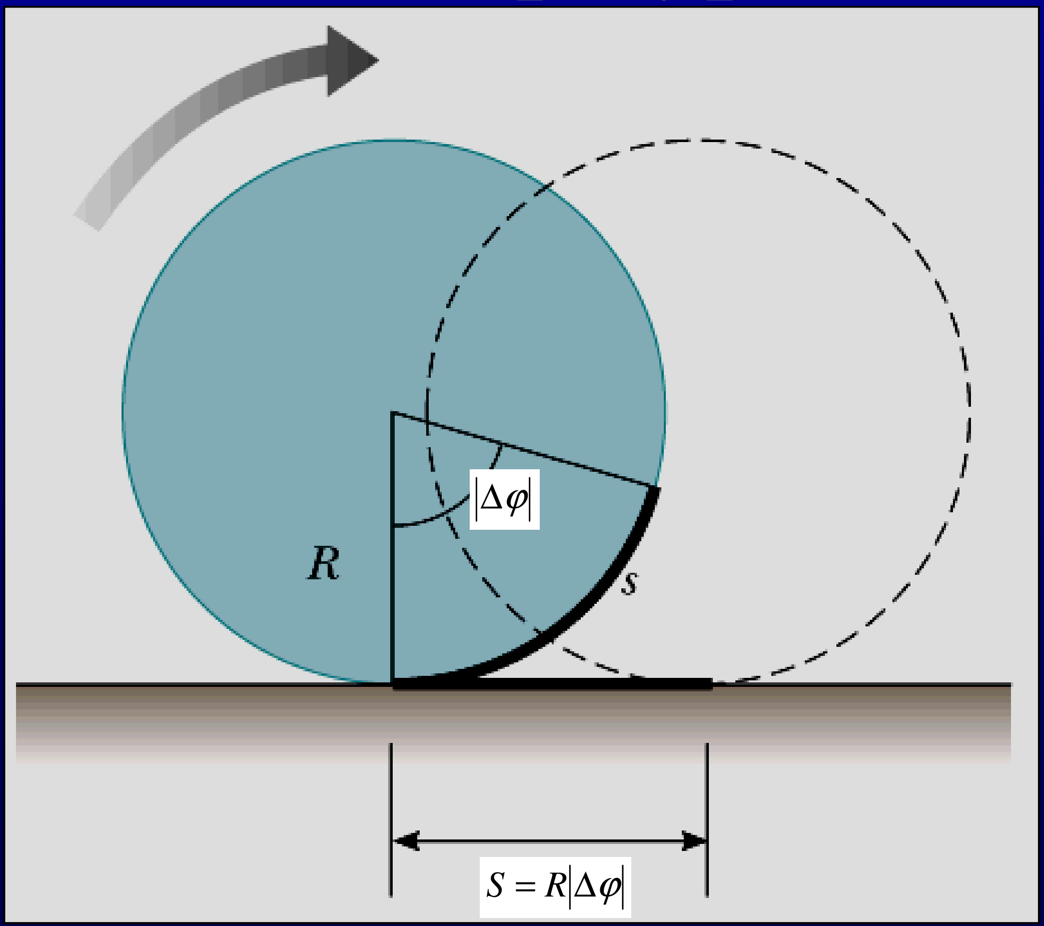
Złożenie ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej-toczenie bez poślizgu

W ogólnym przypadku ruch bryły sztywnej może być złożeniem ruchu obrotowego i postępowego. Przykładem takiego ruchu może być **np. toczenie bez poślizgu bryły w kształcie np. koła, walca czy obręczy** będące złożeniem ruchu postępowego z prędkością równą prędkości środka masy bryły $\vec{V}_{sm}$ i obrotowego wokół osi przechodzącej przez ruchomy środek masy z prędkością kątową równą ω taką iż $|\omega| = \frac{V_{sm}}{R}$





Związek prędkości kątowej z szybkością środka masy w przypadku toczenia

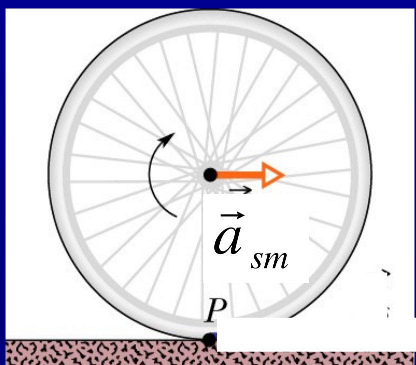


$$V_{sm} = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R|\Delta\varphi|}{\Delta t} =$$

$$= R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = R|\omega|$$

Zależność obowiązuje tylko w przypadku ruchu bez poślizgu

Związek przyspieszenia kątowego z przyspieszeniem środka masy



Jeśli bryła toczy się bez poślizgu to środek masy bryły porusza się z szybkością

$$V_{sm} = R|\omega|$$

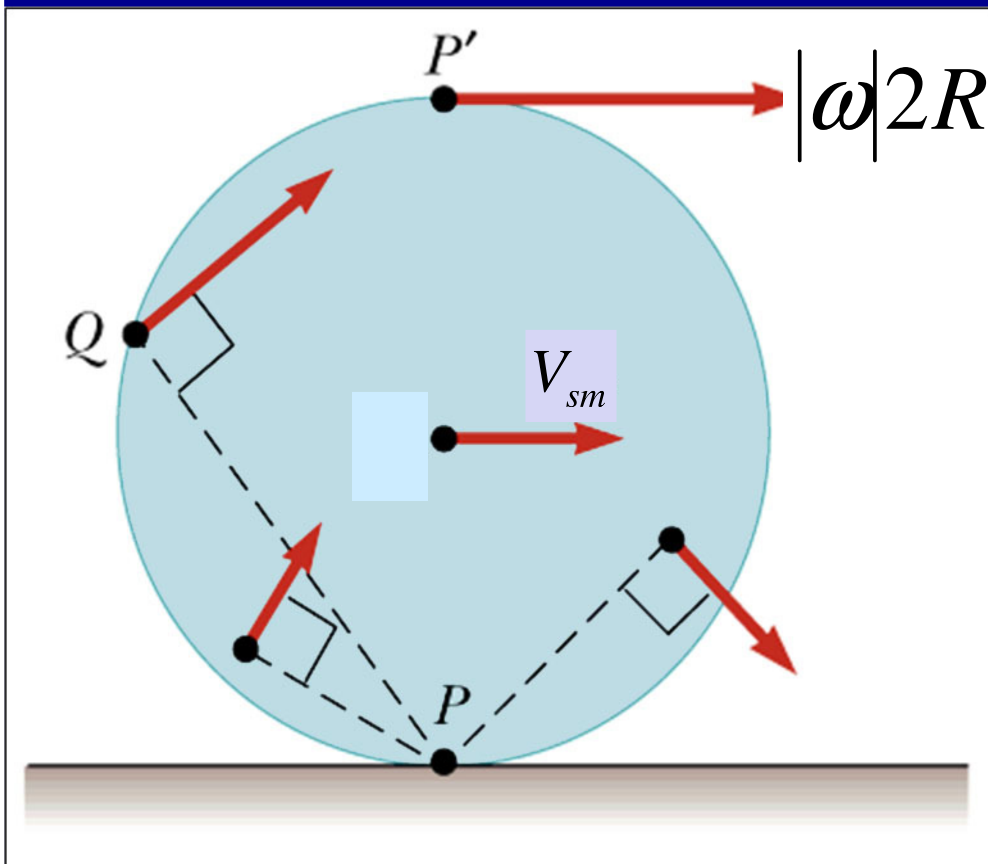
Gdy do bryły przyłożymy zewnętrzną siłę to środek masy bryły może poruszać się z przyspieszeniem $\vec{a}_{sm}$. W przypadku toczenia się bez poślizgu przyspieszenie to można powiązać z przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym.

$$|\vec{a}_{sm}| = \left|\frac{dV_{sm}}{dt}\right| = \left|\frac{d(R|\omega|)}{dt}\right| = R\left|\frac{d\omega}{dt}\right| = R|\vec{\varepsilon}|$$

Przyspieszenie kątowe

Ruch ciała z określonym powyżej przyspieszeniem kątowym bez poślizgu wymaga by rzut wypadkowego momentu siły na oś obrotu był równy co do wartości $|\vec{\tau}_w| = I|\vec{\varepsilon}|$

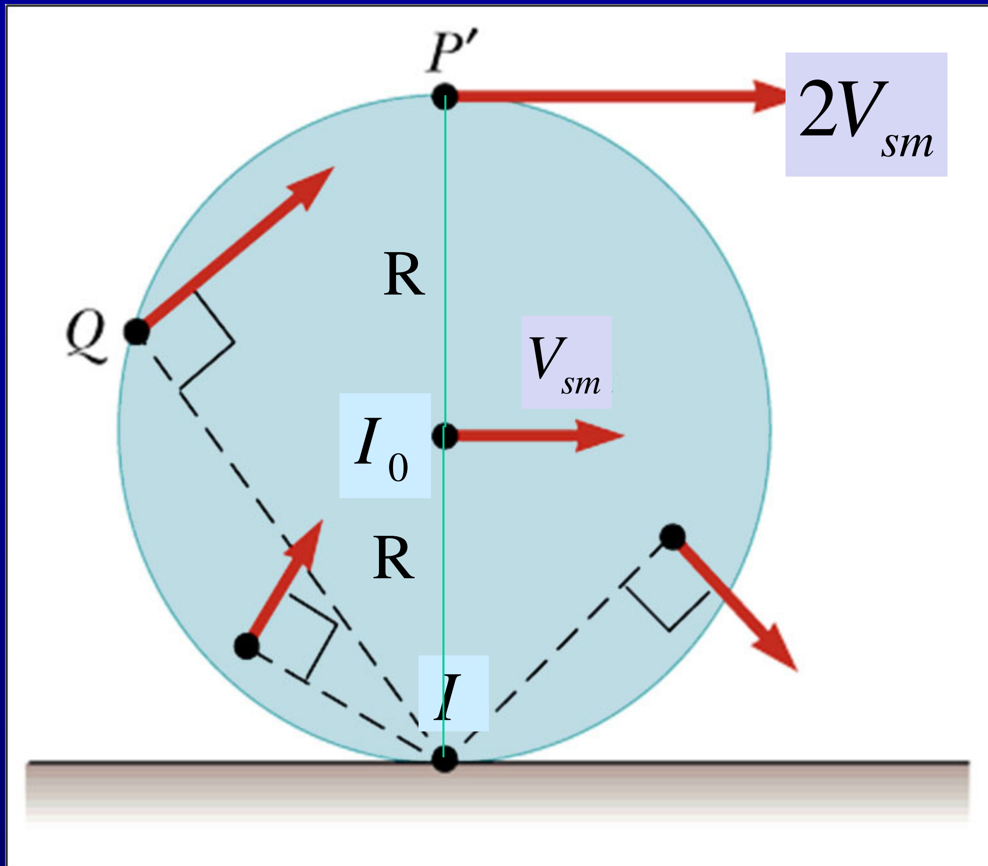
Toczenie można też opisać jako ruch ściśle obrotowy wokół osi obrotu leżącej na styku bryły z podłożem. Widać iż szybkość poszczególnych punktów bryły jest inna i zależy od położenia punktu



$$|\omega| 2R = 2|\omega| R = 2V_{sm}$$

Prędkość kątowa wszystkich punktów koła jest taka sama i równa ω.

Szybkość punktu P jest równa zeru, P’ jest równa $2V_{sm}$



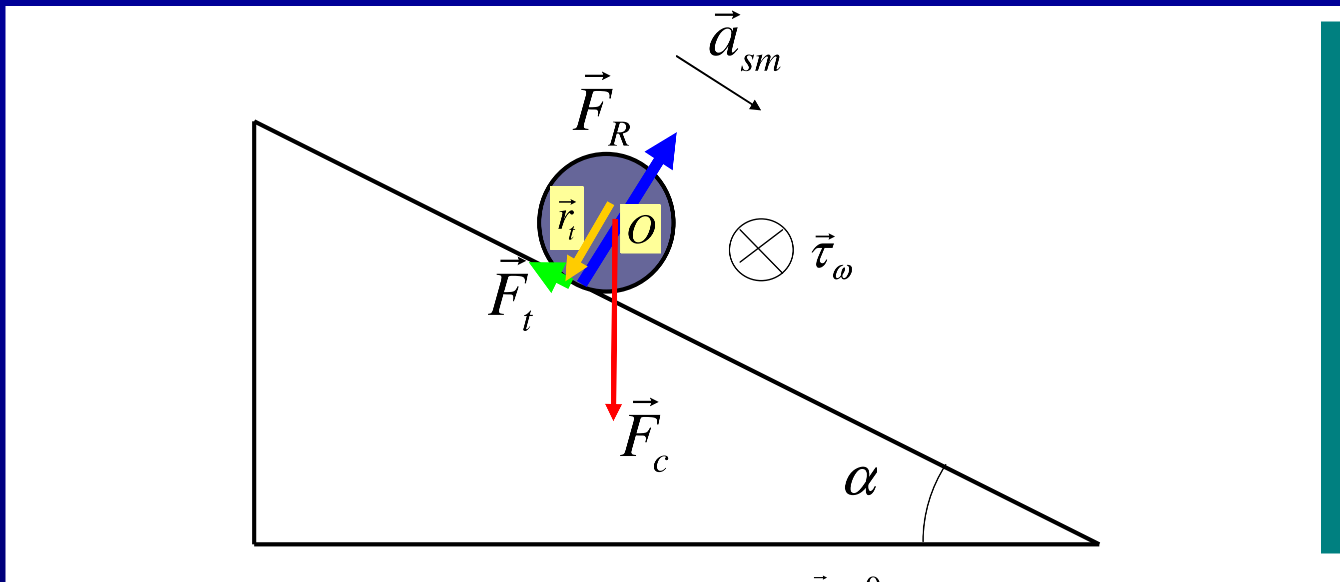
Z Tw. Steinera

$$I = I_0 + mR^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_0 + mR^2\right)\cdot \omega^2 =$$

$$= \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{m}{2}(R\omega)^2 = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{mV_{sm}^2}{2}$$

Staczanie się kuli z równi pochyłej bez poślizgu



Kula o promieniu *R* stacza się z równi o kącie nachylenia do poziomu α bez poślizgu. Znaleźć przyspieszenie liniowe środka masy kuli $a_{sm} = |\vec{a}_{sm}|$.

$\vec{r}_c = 0$

Określenie wypadkowego momentu siły względem środka kuli O leżącego na osi obrotu

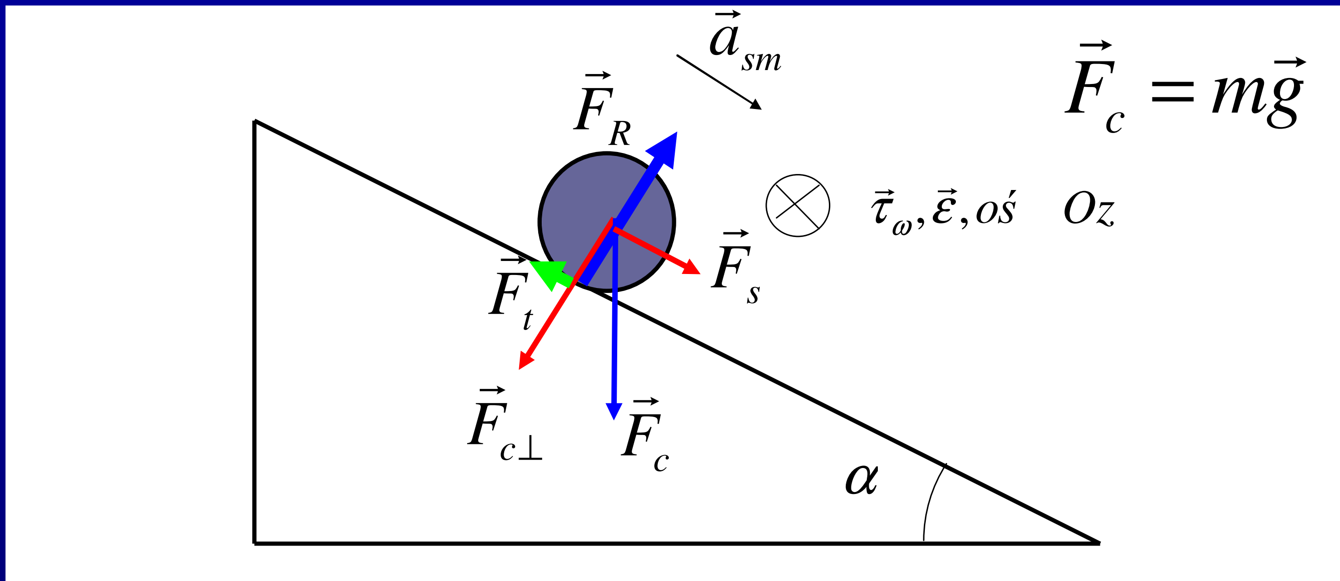
$$\vec{\tau}_w = \vec{\tau}_c + \vec{\tau}_R + \vec{\tau}_t = \vec{\tau}_t$$

Moment siły ciężkości $\vec{\tau}_c = \vec{r}_c \times \vec{F}_c = 0 \qquad gdyz \qquad \vec{r}_c = 0$

Moment siły reakcji $\vec{\tau}_R = \vec{r}_R \times \vec{F}_R = 0 \qquad gdyz \qquad \vec{r}_R = \vec{r}_t \parallel -\vec{F}_R$

Wartość momentu siły tarcia $|\vec{\tau}_t| = |\vec{r}_t \times \vec{F}_t| = RF_t \qquad gdyz \qquad |\vec{r}_t| = R, \vec{r}_t \perp \vec{F}_t$

Staczanie się kuli z równi pochyłej bez poślizgu



Rozkład siły ciężkości na siłę prostopadłą do równi i siłę zsuwającą

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_s$$

Ruch postępowy

$$\vec{F}_w = m\vec{a}_{sm}$$

$$F_s - F_t = ma_{sm}$$

$$\varepsilon = \frac{a_{sm}}{R}$$

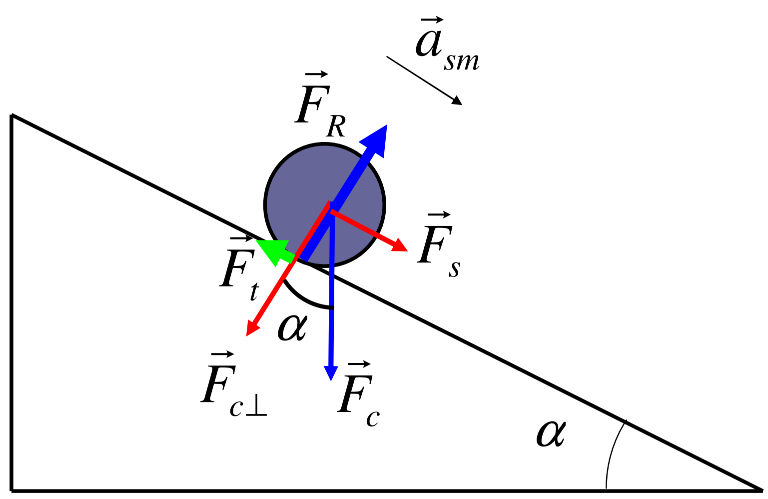
Ruch obrotowy

$$\vec{\tau}_{w\parallel} = I_0\vec{\varepsilon} \Leftrightarrow \tau_{wz} = I_0\varepsilon$$

$$RF_t = I_0\varepsilon$$

$$F_t = \frac{I_0 a_{sm}}{R^2}$$

Wkład do momentu siły względem środka masy wnosi tylko siła tarcia



Nie obowiązuje wzór

$$\cancel{F_t = F_R\mu = F_{c\perp}\mu}$$

obowiązujący tylko przy zsuwaniu się ciał

$$F_s - F_t = ma_{sm}$$

$$F_s = mg\sin(\alpha)$$

$$F_t = mg\sin(\alpha) - ma_{sm}$$

$$F_t = \frac{I_0 a_{sm}}{R^2}$$

$$a_{sm} = \frac{mg\sin(\alpha)}{m + \frac{I_0}{R^2}}$$

$$I_o = \tfrac{2}{5}mR^2$$

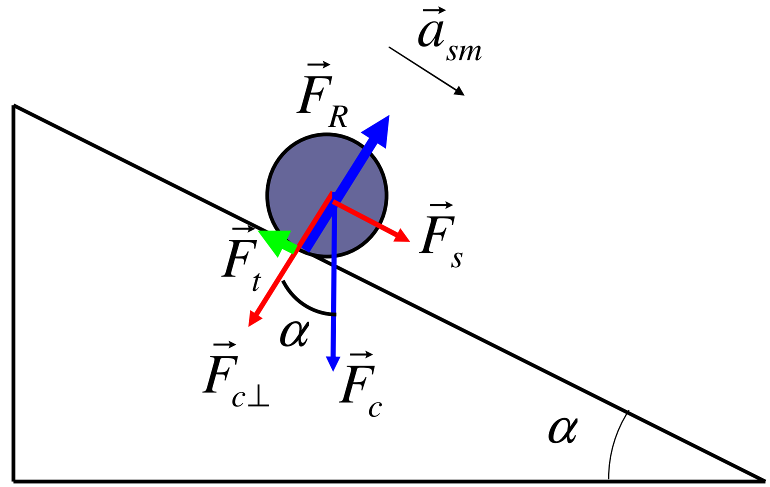
$$F_t = \frac{2}{7}mg\sin(\alpha)$$

$$a_{sm} = \tfrac{5}{7}g\sin\alpha$$

a_{sm} nie zależy od masy i promienia kuli

Aby staczanie kuli bez poślizgu było możliwe musi zachodzić

$$F_t \le F_{ts,\max}$$



Siła tarcia nie może być większa od maksymalnej wartości siły tarcia statycznego.

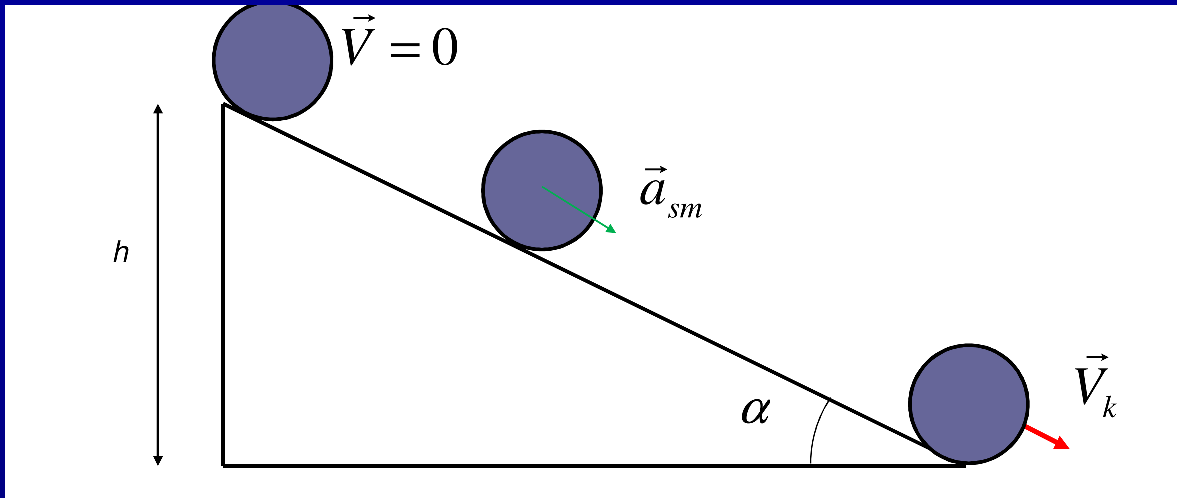
$$F_t = \frac{2}{7} mg \sin(\alpha)$$

$$F_{ts,\max} = F_R \mu_s = F_{c\perp} \mu_s = mg \cos(\alpha) \mu_s$$

$$\mu_s \ge \frac{2}{7} tg(\alpha)$$

μ_s- statyczny współczynnik tarcia

Staczanie się kuli z równi pochyłej bez poślizgu



rozważania energetyczne uwzględniające energie potencjalną w polu siły ciężkości

Całkowita energia kuli jest zachowana. Energia potencjalna na szczycie równi zamienia się na energię kinetyczną u podstawy równi

$$mgh = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{I\omega_k^2}{2} = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\frac{V_k^2}{R^2}}{2} = \frac{7}{10}mV_k^2 \longrightarrow V_k = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Ponieważ siły działające na kule nie zależą od czasu to ruch jej środka masy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym i

$$V_k = a_{sm}t_k \longrightarrow t_k = \frac{V_k}{a_{sm}}$$

$$S = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a_{sm}t_k^2}{2}$$

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{V_k^2}{2a_{sm}} \longrightarrow a_{sm} = \frac{V_k^2 \sin\alpha}{2h} = \frac{5}{7}g\sin(\alpha)$$