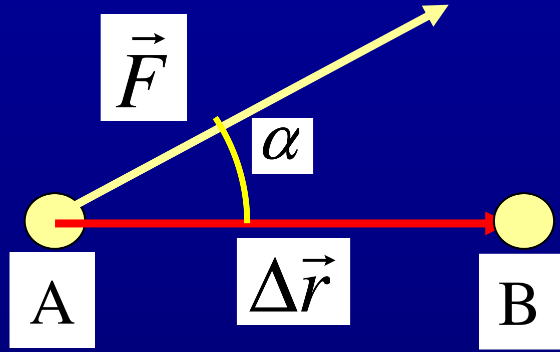
Praca i energia

Praca

Praca jest jedną z form wymiany energii między ciałami. W przypadku, gdy na ciało będące punktem materialnym działa stała siła $\vec{F} = const$ oraz ruch ciała odbywa się od punktu A do B po linii prostej bez zawracania to praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ wyraża się przez iloczyn skalarny wektorów siły i przemieszczenia ciała

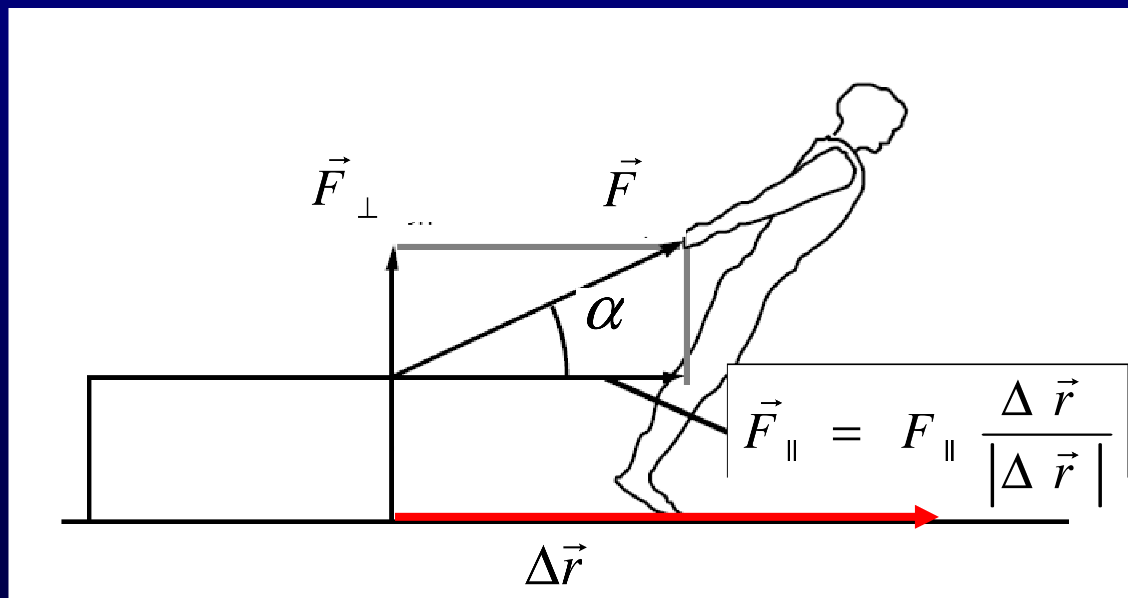
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = FS\cos(\alpha) = F_{\parallel} S}$$



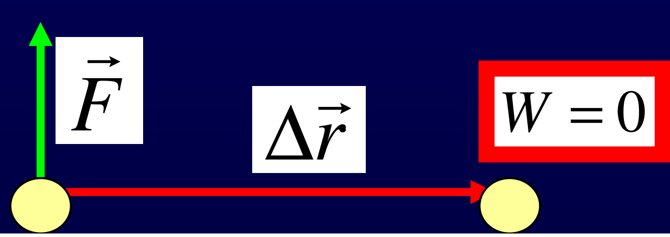
$$S = |\Delta\vec{r}|$$

$$F_{\parallel} = F\cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$$

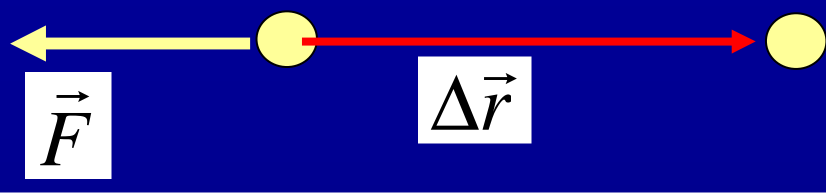
$\vec{F}_{\parallel} = F_{\parallel} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$ - rzut siły na kierunek równoległy do przemieszczenia ciała



Praca wykonana przez siłę skierowaną prostopadłe do toru ciała jest równa zeru



Praca wykonana przez siłę skierowaną przeciwnie do wektora przemieszczenia (np. praca siły tarcia) jest ujemna



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = FS\cos(\pi) = -FS < 0$$

Ogólnie praca jest ujemna gdy $F_{\parallel} = F\cos(\alpha) < 0$ **co ma miejsce kąt** α **między wektorami** $\vec{F}$ **oraz** $\Delta\vec{r}$ **jest rozwarty czyli** $\alpha > \frac{\pi}{2}$

Pracę będącą wielkością skalarną mierzymy w dżulach J =N*m=kg*m^2/s^2.
Dżul jest jednostką pochodną w układzie SI.
Dżul jest to praca wykonana przez stałą siłę o wartości 1N przy przemieszczeniu ciała na odległość 1m w kierunku działania siły

Ogólny wzór na pracę

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

Gdy siła nie jest styczna do toru to można siłę w każdym punkcie na torze rozłożyć na siłę styczną do toru $\vec{F}_{\parallel}$ i siłę prostopadłą $\vec{F}_{\perp}$ do toru. Siła prostopadła do toru nie wykonuje pracy, gdyż jest prostopadła do wektora przemieszczenia. Prace wykonuje siła styczna do toru $\vec{F}_{\parallel}$.

W celu policzenia pełnej pracy cały tor ruchu dzielimy na nieskończenie krótkie odcinki na których możemy przyjąć iż siła jest stała co do kierunku wartości i zwrotu a ruch odbywa się po linii prostej . Liczymy prace wykonaną na każdym z odcinków, które można wyrazić wzorem $\vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F}_{\parallel} \cdot d\vec{l}$ i sumujemy je skalarnie do siebie. Cała opisana procedura może być zrealizowana przez policzenie całki krzywoliniowej

$$\boxed{W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

$d\vec{l} = d\vec{r}$ -wektor o nieskończenie krótkiej długości styczny do toru ciała o zwrocie wyznaczonym przez zwrot wektora prędkości o długości równej przyrostowi drogi *dS*

Związek energii kinetycznej z pracą siły wypadkowej

Zmiana energii kinetycznej ciała będącego punktem materialnym podczas ruchu jest równa pracy W_w wykonanej przez siłę wypadkową działającą na to ciało. Praca ta jest równa sumie prac wykonanych przez wszystkie siły działające na ciało.
Dla ciała będącego bryłą można określić w ten sposób zmianę energii kinetycznej w ruchu postępowym.

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m V^2$$

W ruchu jednostajnie zmiennym po linii prostej punktu materialnego pod wpływem wypadkowej stałej siły stycznej do toru punktu materialnego o zwrocie zgodnym ze zwrotem prędkości

$$V(t=0) = V_{pocz}$$

$$S = V_{pocz} t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$V_{konc} = V_{pocz} + at$$

$$t = \frac{V_{konc} - V_{pocz}}{a}$$

$$S = \frac{V_{konc}^2 - V_{pocz}^2}{2a}$$

$$W_w = F_{wyp} S = maS = ma \frac{V_{konc}^2 - V_{pocz}^2}{2a} = \frac{mV_{konc}^2}{2} - \frac{mV_{pocz}^2}{2}$$

$$\boxed{W_w = E_{kin,konc} - E_{kin,pocz} = \Delta E_{kin}}$$

Relacja słuszna również w ruchu ze zmiennym w czasie przyspieszeniem i dowolnej orientacji siły oraz kształtu toru ruchu ciała

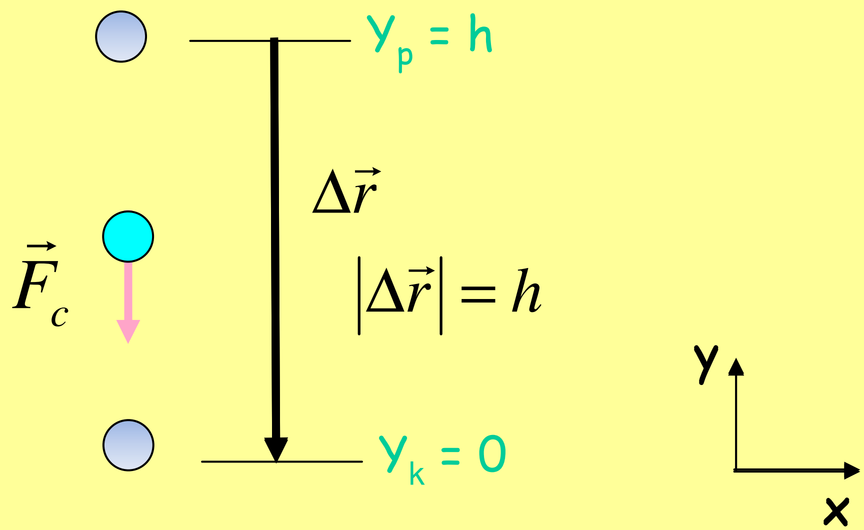
Praca siły ciężkości

Ciało spada z wysokości h pod wpływem siły ciężkości
Zakładamy iż wysokość jest na tyle nieduża iż można przyjąć iż siła ciężkości nie ulega zmianie w trakcie ruchu $\vec{F}_c = m\vec{g} = const$
(pomijamy zależność przyspieszenia ziemskiego od wysokości)

$$W_c = \vec{F}_c \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W_c = \left|\vec{F}_c\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos(0)$$

W_c = mgh>0 $\qquad \alpha = 0$



Gdy siła wypadkowa $\vec{F}_{wyp} = \vec{F}_c$ to $\Delta E_k = W_c = mgh > 0$

W celu obniżenia wysokości nad ziemią na jakiej znajduje się ciało o h bez zmiany jego energii kinetycznej można np. działać w czasie ruchu na ciało dodatkowo siłą $\vec{F}_z = -\vec{F}_c$ która wykonuje prace $W_z = -W_c = -mgh$. W takim przypadku siła wypadkowa $\vec{F}_w = \vec{F}_z + \vec{F}_c$ jak i jej praca $W_w = W_c + W_z = 0$ znikają

Praca siły ciężkości

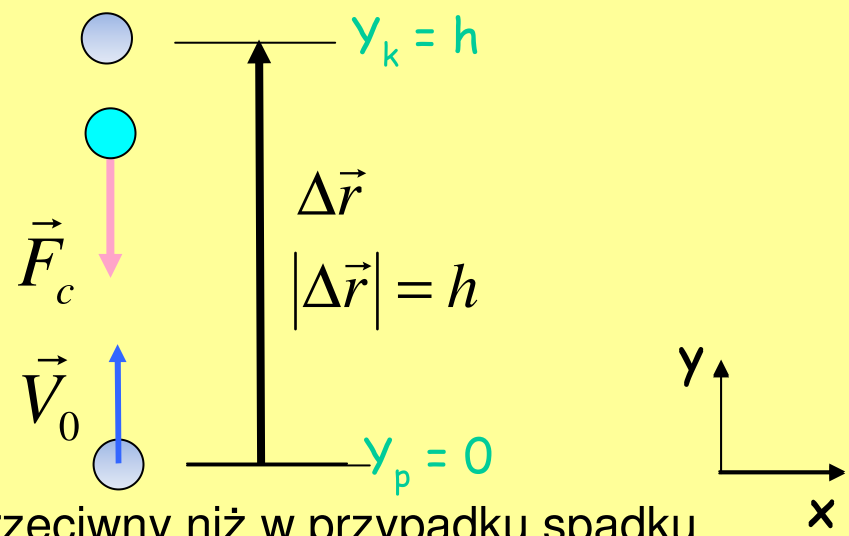
Ciało wznosi się na wysokość *h*. Zakładamy iż wysokość jest na tyle nieduża iż można przyjąć iż siła ciężkości nie ulega zmianie w trakcie ruchu (pomijamy zależność przyspieszenia ziemskiego od wysokości)

$\vec{F}_c = m\vec{g} = const$

$$W_c = \vec{F}_c \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W_c = \left|\vec{F}_c\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos(\pi)$$

$W_c = -mgh<0$ $\quad\quad \alpha = \pi$



Znak pracy przy wznoszeniu ciała jest przeciwny niż w przypadku spadku ciała, a wartość (bezwzględna) pracy jednakowa przy założeniu iż droga pokonana przez ciało przy spadku i wznoszeniu jest jednakowa.

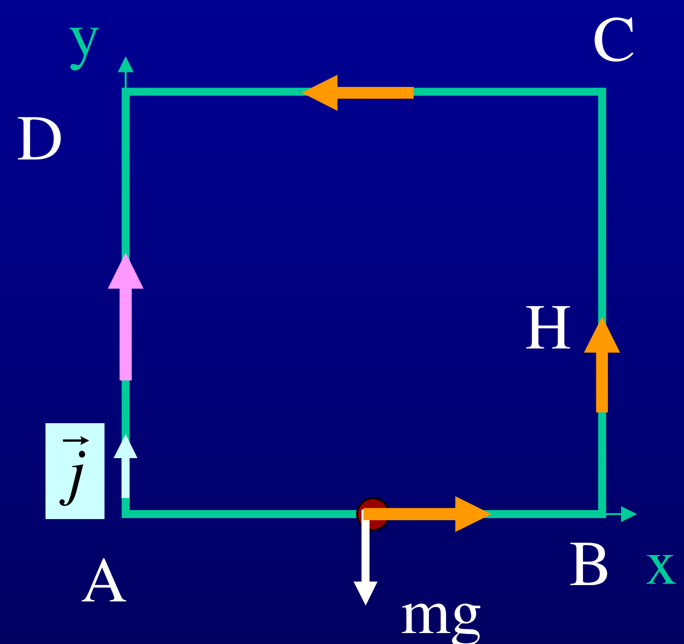
Gdy siła wypadkowa $\vec{F}_{wyp} = \vec{F}_c$ to $\Delta E_{kin} = W_c = -mgh < 0$

i ciało aby wznieść się na taką wysokość musi posiadać energie kinetyczna nie mniejszą niż *mgh* (lub trzeba działać na nie siłą wykonująca odpowiednią dodatnią pracę ale wówczas $\vec{F}_{wyp} \neq \vec{F}_c$)

Siły zachowawcze

$$|\vec{j}| = 1$$

Określamy prace siły ciężkości $\vec{F}_c = m\vec{g} = -mg\vec{j}$ przy przesuwaniu ciała (punktu materialnego) po drodze $A \to B \to C \to D$



$$W_{A\to B\to C\to D} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} = \\ = 0 - mgH + 0 = -mgH$$

po drodze $A \to D$

$$W_{A\to D} = -mgH = W_{A\to B\to C\to D}$$

Praca siły ciężkości przy przesuwaniu ciała po obu drogach jest jednakowa. Siła ciężkości jest siłą zachowawczą

Siłę nazywamy zachowawczą jeśli praca wykonana przez tę siłę przy przesuwaniu ciała pomiędzy dwoma punktami zależy tylko od położenia tych punktów, a nie zależy od toru po którym ciało się porusza.
Praca siły zachowawczej po torze zamkniętym jest równa zero.

$$\boxed{W_{A\to B\to C\to D\to A} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A} = W_{A\to D} - W_{A\to D} = 0}$$

Siły zachowawcze

Siła ciężkości, grawitacyjna, sprężystości, elektrostatyczna jest zachowawcza!

Siły nie zachowawcze

Przykłady:
- siła tarcia
- siła oporu powietrza

Energia potencjalna

Dla układu złożonego z ciał (punktów materialnych) oddziaływujących ze sobą za pomocą sił zachowawczych można wprowadzić pojęcie energii potencjalnej zależnej od położenia względnego tych ciał

Zmianę energii potencjalnej układu ciał przy przesuwaniu jednego z ciał pomiędzy punktami A i B można powiązać z pracą wykonaną przez siły zachowawcze przy przesuwaniu tego ciała pomiędzy tymi punktami

$$\boxed{\Delta E_{pot} = E_{pot}(B) - E_{pot}(A) = -W_{A\to B}}$$

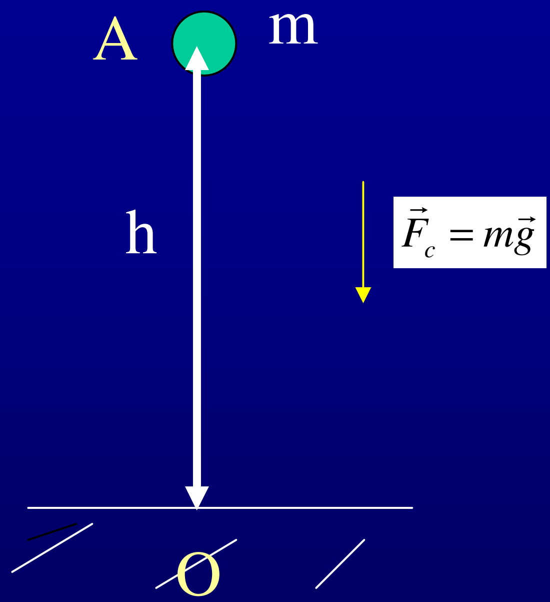
(znak odwrotny niż we wzorze na ΔE_{kin})

Jeżeli w układzie działa kilka sił zachowawczych to praca ta jest sumą prac wykonanych przez każdą z sił (suma wielkości skalarnych).
W celu ustalenia wartości energii potencjalnej związanej z istnieniem konkretnej siły przyjmuje się umowę w myśl której, przy pewnym ustalonym położeniu układu ciał energia ta jest równa zeru.

Energia potencjalna związana ze stałą siłą ciężkości (g=const)

$$\vec{F}_c = m\vec{g} = const$$

Praca siły ciężkości



$$W_{A\to 0} = mgh$$

$$W_{O\to A} = -mgh$$

$$E_{pot}(A) - E_{pot}(0) = -W_{0\to A} = W_{A\to 0} = mgh$$

Założenie $E_{pot}(O) = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{E_{pot}(A) = mgh}$

Ponieważ zakładamy iż położenie Ziemi nie ulega zmianie to można wyznaczoną energie potencjalną układu cialo-Ziemia przypisać ciału o masie *m* poruszającemu się w pobliżu powierzchni Ziemi (mówimy też o energii potencjalnej ciała w polu siły ciężkości)

Zasada zachowania energii mechanicznej

Energia mechaniczna izolowanego i zamkniętego układu ciał, pomiędzy którymi działają wyłącznie siły zachowawcze wykonujące pracę, jest stała

$$E_{kin} + E_{pot} = const$$

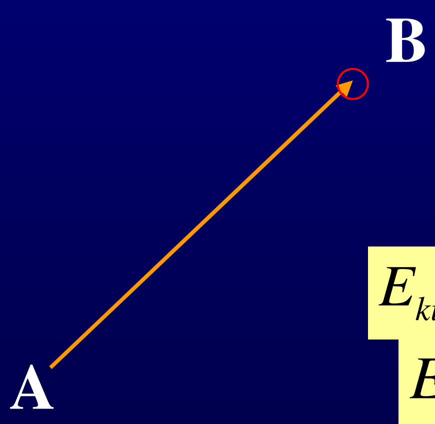
E_{kin} suma energii kinetycznych wszystkich ciał wchodzących w skład układu
E_{pot} suma wszystkich rodzajów energii potencjalnej układu

Układ nazywamy izolowanym gdy na ciała wchodzące w skład układu nie działają siły zewnętrzne. Zamkniętość układu oznacza iż do układu tego nie dochodzą jak również jego nie opuszczają żadne ciała, ponadto zakładać tu będziemy iż układ ten nie absorbuje ani nie emituje promieniowania elektromagnetycznego

Zasada zachowania energii mechanicznej-dowód

Załóżmy iż w układzie izolowanym i zamkniętym działają tylko siły zachowawcze (np. siła grawitacyjna, ciężkości, sprężystości), na ciała wchodzące w skład układu nie działają siły zewnętrzne wykonujące prace. Suma wektorowa sił zachowawczych działających na ciało jest równa sile wypadkowej działającej na to ciało.

$W_{A\to B} = W_{z,A\to B}$ -praca siły wypadkowej działającej na wybrane ciało układu przy przesunięciu tego ciała z punktu A do B równa sumie prac wszystkich sił działających na to ciało.



Zmiana energii potencjalnej przy przesunięciu ciała od A do B

$$E_{pot}(B) - E_{pot}(A) = -W_{z,A\to B} = -W_{A\to B}$$

Zmiana energii kinetycznej $E_{kin}(B) - E_{kin}(A) = W_{A\to B}$

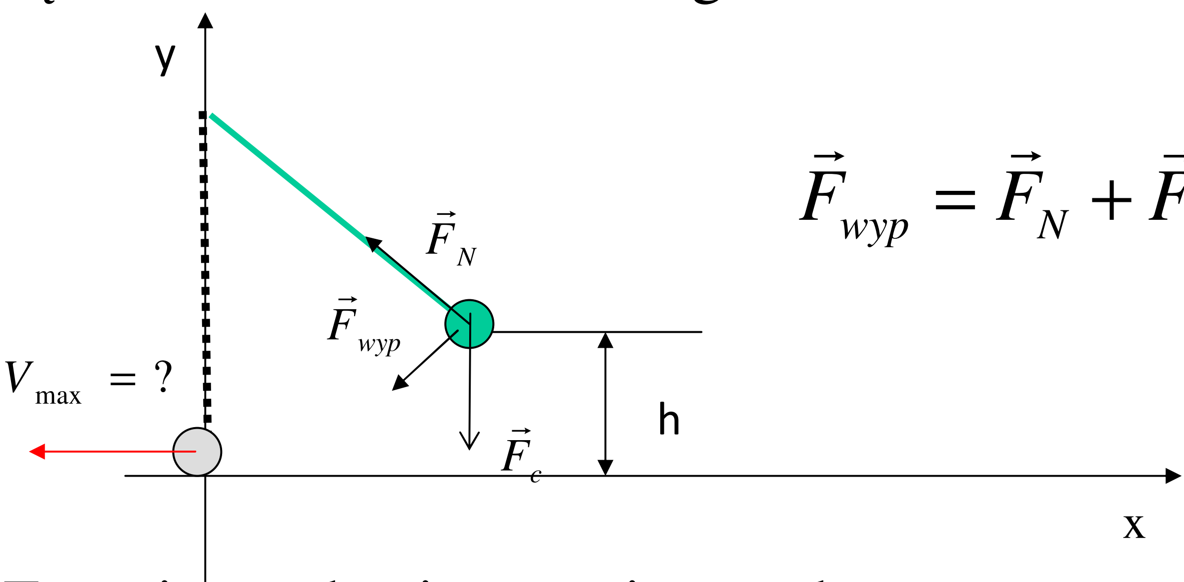
$$E_{kin}(B) - E_{kin}(A) + E_{pot}(B) - E_{pot}(A) = W_{A\to B} - W_{A\to B} = 0$$

$$E_{kin}(B) + E_{pot}(B) = E_{kin}(A) + E_{pot}(A) = const$$

Analizując ciało na które działa siła ciężkości analizujemy układ złożony z Ziemi i tego ciała ale zakładamy iż Ziemia spoczywa i energia Ziemi nie ulega zmianie dzięki czemu całą energie mechaniczną układu możemy przypisać analizowanemu ciału.

Przykład 1.

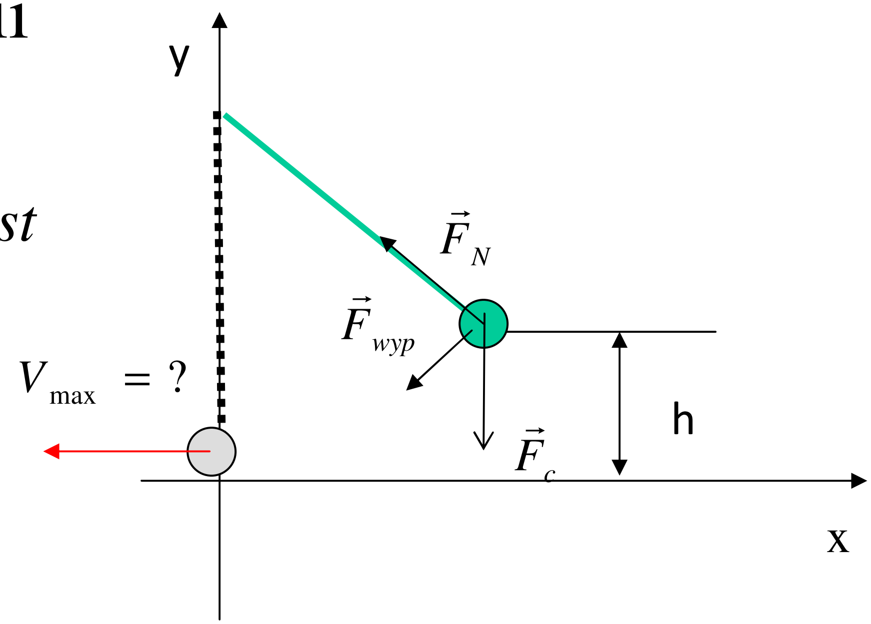
Wyznaczyć maksymalną szybkość ciała umieszczonego na końcu nici wahadła pokazanego na rysunku. Ruch odbywa się w płaszczyźnie *x,y* .Zakładamy iż w sytuacji pokazanej na rysunku prędkość ciała umieszczonego na końcu nici wahadła jest równa zeru



$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F}_N + \vec{F}_c$$

Energia mechaniczna *E* jest zachowana
(siła ciężkości $\vec{F}_c$ jest siłą zachowawczą , a siła naciągu nici $\vec{F}_N$ nie wykonuje pracy gdyż jest skierowana prostopadle do toru ruchu)
Energia potencjalna wynika z działania siły ciężkości i przyjmujemy iż jest równa zeru gdy ciało znajduje się w punkcie y=0 . Można ją określić ze wzoru $E_{pot} = mgy$

Z zasady zachowania energii



$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{mV^2}{2} + mgy = const$$

W chwili początkowej $y=h$, $V=0$

$$E = E_{pot} = mgh$$

W najniższym położeniu $y=0$, $V=V_{max}$

$$E = E_{kin} = m\frac{V_{max}^2}{2}$$

$$mgh = m\frac{V_{max}^2}{2}$$

$$V_{max} = \sqrt{2gh}$$

Zmiany energii mechanicznej związane z pracą sił niezachowawczych

Energia mechaniczna układu ciał (nawet izolowanego i zamkniętego) pomiędzy którymi działają siły niezachowawcze (np. tarcia, lepkości) wykonujące pracę nie jest stała. Praca wykonana przez siłę tarcia w trakcie przesuwania ciała po powierzchni jest ujemna i prowadzi do zmniejszenia energii mechanicznej układu o wartość bezwzględną wykonanej pracy . Siły niezachowawcze działają także m.in. w trakcie zderzeń niesprężystych miedzy ciałami.

Całkowita praca siły wypadkowej w układach w których działają siły niezachowawcze:

$$W_w = W_Z + W_{NZ}$$

praca sił zachowawczych

$$W_Z = -\Delta E_{pot}$$

praca sił niezachowawczych

$$W_{NZ} = \Delta E_{kin} - W_Z$$

$$W_w = W_Z + W_{NZ} = \Delta E_{kin}$$

$$\boxed{W_{NZ} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \Delta E}$$

Wzór ten można stosować także w przypadku gdy na układ działają siły wywierane przez ciała spoza układu, których prace wykonaną nad ciałami wchodzącymi w skład układu musimy dodać do pracy sił niezachowawczych.

Uogólnienie pojęcia energii mechanicznej.

Dotychczas rozważana energia mechaniczna ciał makroskopowych nie jest jedyną formą energii, jaką może posiadać układ ciał. Praca sił tarcia (będących siłami niezachowawczymi) między makroskopowymi ciałami wchodzącymi w skład układu prowadzi do przemiany energii mechanicznej ciał makroskopowych na inne formy energii (np. na energie kinetyczną związaną z ruchem cząstek, atomów tworzących analizowane ciała i cząstek otoczenia, co skutkuje wzrostem temperatury tych ciał i temperatury otoczenia). Gdybyśmy wszystkie te cząstki traktowali jako ciała makroskopowe to ich całkowita energia mechaniczna nie ulegała by zmianie.

Z uwagi na bardzo dużą ilość cząstek, które by trzeba opisywać takie podejście jest niewygodne (ponadto przy opisie obiektów bardzo małych przestają obowiązywać prawa mechaniki klasycznej i trzeba do ich opisu stosować mechanikę kwantową). Do opisu układów złożonych z bardzo wielu obiektów mikroskopowych stosujemy pojęcia i terminy wprowadzone przez termodynamikę, a jego energie nie będącą energią mechaniczną ciał makroskopowych nazywamy energią wewnętrzną,

Paca siły tarcia może prowadzić na zamiany energii mechanicznej ciał makroskopowych na energie wewnetrzną .

Ponadto energia mechaniczna może ulegać zmianie na inne formy energii, np. ciało obdarzone ładunkiem elektrycznym poruszające się z niezerowym przyspieszeniem emituje fale elektromagnetyczne, z którymi związana jest również pewna energia pola elektromagnetycznego. Energia mechaniczna może ulegać także przemianie na energie chemiczną w reakcjach chemicznych, a także na energie spoczynkową w reakcjach jądrowych w których następuje zmiana masy (co przewiduje mechanika relatywistyczna) .

Zasada zachowania energii całkowitej.

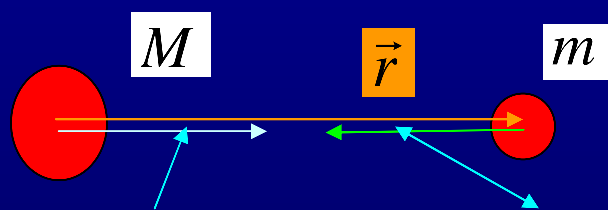
Energia całkowita zamkniętego i całkowicie izolowanego od otoczenia układu ciał, który nie wymienia energii z otoczeniem w żadnej postaci , nie zmienia się w czasie. Energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona.

Przez energię całkowitą rozumie się sumę wszystkich form energii jakie może ten układ i ciała wchodzące w jego skład posiadać

Energia potencjalna dla siły grawitacyjnej i siły sprężystości

Siła grawitacyjna

Siła grawitacyjna to siła przyciągająca działająca między ciałami obdarzonymi masą. Dla ciał o symetrii sferycznej (punktów materialnych) jest ona odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między środkami tych ciał (odległości miedzy punktami)



$$\vec{F}_{Mm} = G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{mM} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$r = \left|\vec{r}\right|$$

$$\left|\vec{F}_{Mm}\right| = \left|\vec{F}_{mM}\right| = G\frac{mM}{r^2}$$

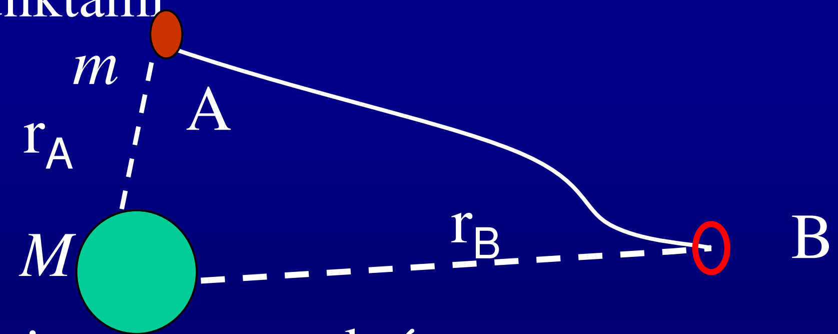
$$G = 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} = 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kgs^2}$$

Można pokazać iż siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą dlatego można dla układu ciał oddziałujących przy pomocy tej siły wprowadzić pojęcie energii potencjalnej

Energia potencjalna związana z siłą grawitacyjną układu złożonego z ciał o masach M i m

W celu określenia zmiany energii potencjalnej układu przy przesunięciu ciała o masie m z punktu A do B można obliczyć pracę $W_{A\rightarrow B}$ wykonaną przez siłę grawitacyjną $\vec{F}_G = \vec{F}_{mM}$ działającą na ciało o masie m przy przesunięciu ciała między tymi punktami

$$E_{pot}(B) - E_{pot}(A) = -W_{A\rightarrow B}$$



Można pokazać iż praca ta nie zależy od toru po którym przesuwamy ciało o masie m (co wynika z tego iż siła grawitacyjna jest zachowawcza)
Wyraża się ona wzorem

$$W_{A\rightarrow B} = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

A zatem zmiana energii potencjalnej zależy tylko od odległości od siebie środków obu ciał w położeniu końcowym i początkowym

$$E_{pot}(B) - E_{pot}(A) = -W_{A\rightarrow B} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Założenie $E_{pot}(B)=0 \quad gdy \quad r_B \to \infty$

Energia potencjalna jest równa zeru gdy ciała są oddalone nieskończenie od siebie i oddziaływanie między nimi maleje do zera. $Gdy \quad r_B \to \infty \quad to$

$$E_{pot}(B)-E_{pot}(A)=GMm\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]=\frac{GMm}{r_A}$$

$$E_{pot}(A)=-\frac{GMm}{r_A}$$

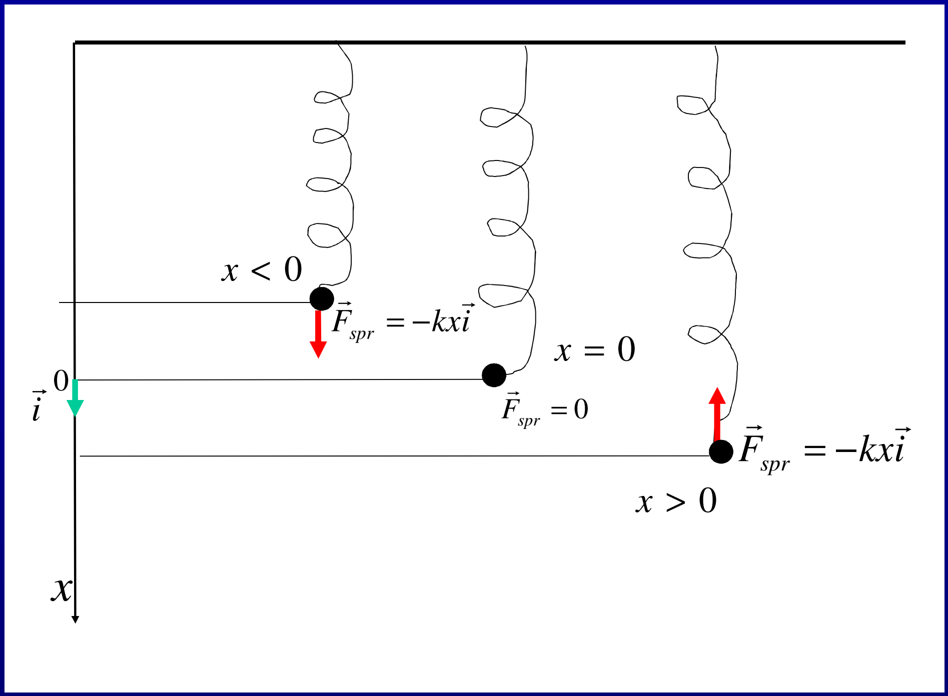
$$E_{pot}(r)=-\frac{GMm}{r}$$

Energia potencjalna układu dwóch ciał o symetrii sferycznej (lub dwóch punktów materialnych) oddziałujących siłą grawitacyjną jest ujemna i co do wartości odwrotnie proporcjonalna do odległości środków tych ciał od siebie

Jest ona równa pracy $W_z=-W$ **siły zewnętrznej** $\vec{F}_z=-\vec{F}_G$ **przy utworzeniu układu tych ciał z dwóch ciał pozostających początkowo w spoczynku w nieskończonej odległości od siebie. Gdy jedno z ciał spoczywa można przypisać tą energie ciału ruchomemu poruszającemu się w polu grawitacyjnym wytworzonym przez drugie ciało.**

Siła sprężystości

Według prawa Hooke'a jeżeli wydłużenie (skrócenie) sprężyny nie jest zbyt duże to wartość siły działającej na ciało umieszczone na końcu sprężyny jest proporcjonalna do wydłużenia (skrócenia) sprężyny, a jej zwrot jest skierowany w kierunku położenia równowagi końca sprężyny



$$\vec{F}_{spr} = -kx\vec{i}$$ *k*-stała sprężystości

Zakładamy dalej iż masa sprężyny jest pomijalnie mała.

Praca przy przysunięciu ciała umieszczonego na końcu sprężyny od punktu x=0 do x=d

$$W_{spr,x=0\to x=d} = -k\frac{d^2}{2}$$

Wzór powyższy słuszny dla $d>0$ oraz $d<0$

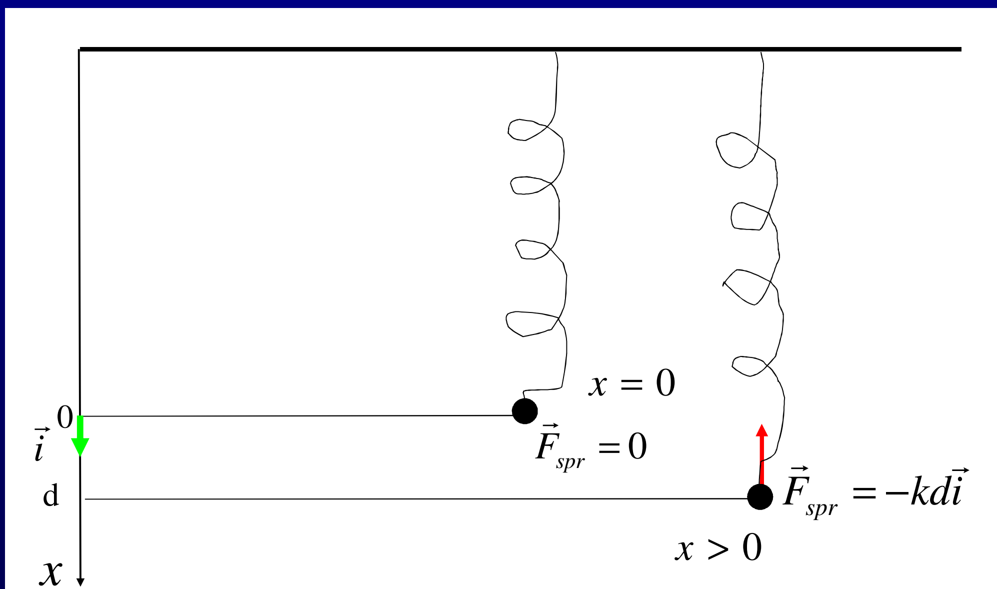
Energia potencjalna związana z siłą sprężystości

Zmianę energii potencjalnej układu ciało-sprężyna można powiązać z pracą siły sprężystości przy rozciągnięciu lub skróceniu sprężyny

$$E_{pot}(x=d)-E_{pot}(x=0)=-W_{spr,x=0\to x=d}=-(-k\frac{d^2}{2})=k\frac{d^2}{2}$$

Zakładamy iż ` $E_{pot}(x=0)=0$

$$\boxed{E_{pot}(x)=k\frac{x^2}{2}}$$



Ogólnie zależy od wydłużenia (skrócenia) sprężyny x.
Jest jednakowa przy jednakowym wydłużeniu i skróceniu sprężyny
(dodatek 2)

Ponieważ masa sprężyny jest pomijalnie mała to można energię sprężystości przypisać ciału umieszczonemu na końcu sprężyny, choć formalnie jest ona energią układu sprężyna-ciało