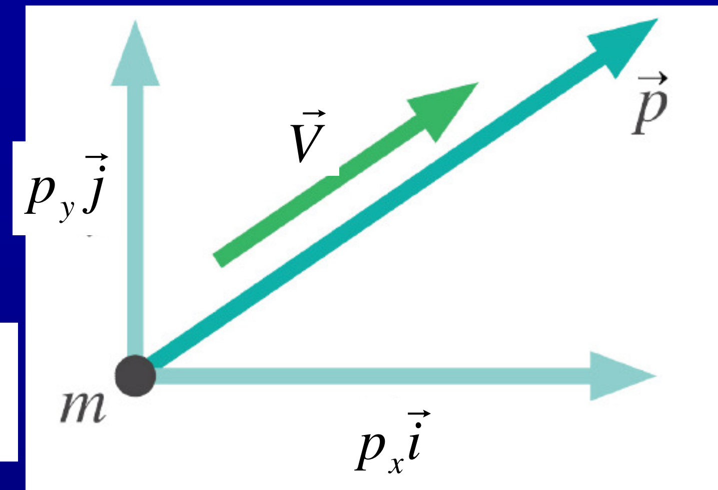
Pęd ciała i układu ciał
Zasada zachowania pędu
Środek masy układu ciał
Zderzenia

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{V}$$



$$p_x = mV_x,\ p_y = mV_y,\ p_z = mV_z$$

Pęd =iloczyn masy ciała i jego prędkości.
Pęd jest wektorem skierowanym zgodnie z wektorem prędkości

II zasada dynamiki-postać uogólniona

$$\vec{F}_w = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$m = const$$

$$\vec{F}_w = \frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Szybkość zmiany w czasie pędu jest równa wypadkowej sile

Relacja $\vec{F}_w = \frac{d\vec{p}}{dt}$ obowiązuje także w mechanice relatywistycznej, w której przyjmujemy jednak iż masa ciała zależy od jego szybkości

$$\vec{F}_w = \frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \longrightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F}_w \Delta t \quad \text{gdy} \quad \Delta t \to 0$$

Siła wypadkowa działająca na ciało prowadzi do zmiany w czasie $\Delta t \to 0$ jego pędu o wielkość równą popędowi siły $\vec{F}_w \Delta t$

Powyższa relacja jest słuszna także dla skończonego Δt gdy siła nie zależy od czasu $\vec{F}_w = const$

Dla siły zmiennej w czasie zmiana pędu dla skończonego przedziału czasu

$$\vec{p}(t = t_k) - \vec{p}(t = t_p) = \int_{t_p}^{t_k} \vec{F}_w(t)\,dt$$

Całka oznaczona

Zasada zachowania pędu

Jeżeli wypadkowa siła jest równa zeru to pęd jest zachowany

$$\vec{F}_w = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}_w = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const$$

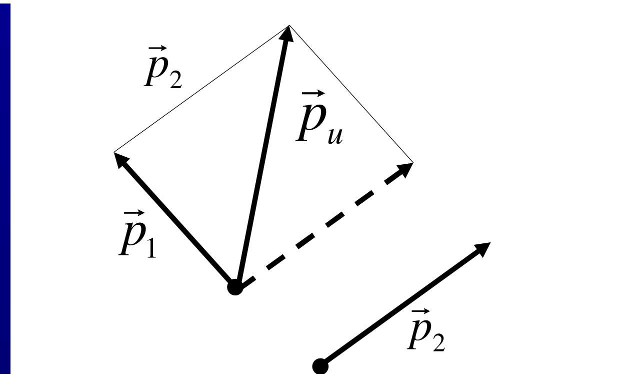
Dynamika układu ciał (punktów materialnych)

Pęd układu ciał jest wektorową sumą pędów wszystkich ciał wchodzących w skład układu

$$\vec{p}_u = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i$$

Np. dla układu złożonego z dwóch ciał *n*=2 mamy

$$\vec{p}_u = \sum_{i=1}^{2} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 .$$



$$\frac{d\vec{p}_u}{dt} = \frac{d\left(\sum_i \vec{p}_i\right)}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i =$$

$$= \sum_i \vec{F}_{izw} = \vec{F}_{zw}$$

$\vec{F}_i$ -wypadkowa siła działająca na *i*-te ciało

$\vec{F}_{izw}$ -suma wektorowa sił zewnętrznych (nie związanych z oddziaływaniami tego ciała z innymi ciałami w układzie) działających na *i*-te ciało

Wypadkowa siła działająca na układ ciał

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{izw} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_i = \vec{F}_{izw} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}$ -siła wypadkowa działająca na *i*-te ciało

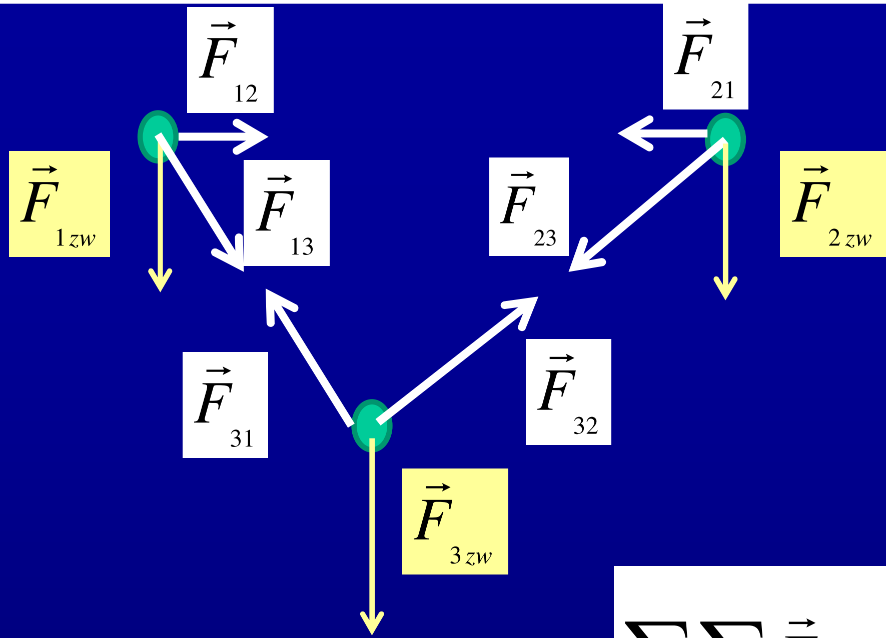
$\vec{F}_{izw}$ -suma wektorowa sił zewnętrznych działających na *i*-te ciało

$\vec{F}_{ij}$ -siła działająca na *i*-te ciało ze strony ciała *j*-tego

Z uwagi na warunek $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

suma podwójna $$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{i,j>i} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) = \sum_{i,j>i} \left(\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}\right) = 0$$

Obecność sił związanych z oddziaływaniami między ciałami wchodzącymi w skład układu nie prowadzi do zmiany pędu układu ciał



Dla 3 ciał

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} =$$
$$= \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) + \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}\right) + \left(\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}\right) =$$
$$= \left(\vec{F}_{12} - \vec{F}_{12}\right) + \left(\vec{F}_{13} - \vec{F}_{13}\right) + \left(\vec{F}_{23} - \vec{F}_{23}\right) = 0$$

Związek pędu układu z wypadkową siłą

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_u}{dt} = \vec{F}_{zw}}$$

gdzie $\vec{F}_{zw}$-suma wektorowa wszystkich sił zewnętrznych działających na ciała wchodzące w skład układu

Zasada zachowania pędu dla układu ciał

Kiedy $\boxed{\vec{F}_{zw} = 0}$ **to**

$$\boxed{\vec{p}_u = \sum_i \vec{p}_i = const}$$

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych jest równa zeru to całkowity pęd układu nie ulega zmianie

Gdy $F_{zwx} = 0$ to $p_{ux} = \sum_i p_{ix} = const$

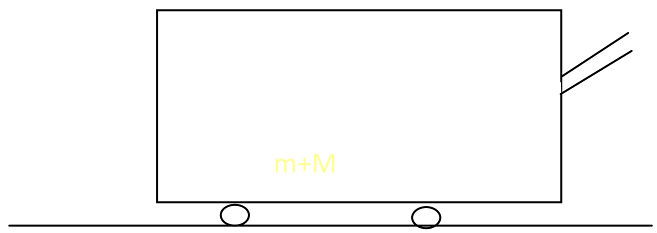
Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych ma wzdłuż pewnej osi (np. Ox) składową równą zeru to składowa pędu wzdłuż tej osi nie ulega zmianie

Przedstawione relacje dotyczące pędu obowiązują w układach zamkniętych nie wymieniających materii z otoczeniem

Zad. 1 (seria III). Pocisk o masie m=10kg zostaje wystrzelony z prędkością wylotową o wartości V_p=60m/s pod kątem $\alpha = 60^0$ do poziomu ze spoczywającej armaty o masie M=3000 kg stojącej na twardym podłożu. Zakładając brak tarcia armaty o podłoże obliczyć szybkość (wartość prędkości) odrzutu armaty.

Dane: m=10kg, M=3000kg, V_p=60m/s, α=60^0 Szukane: V_A

Chwila początkowa $t=t_p$

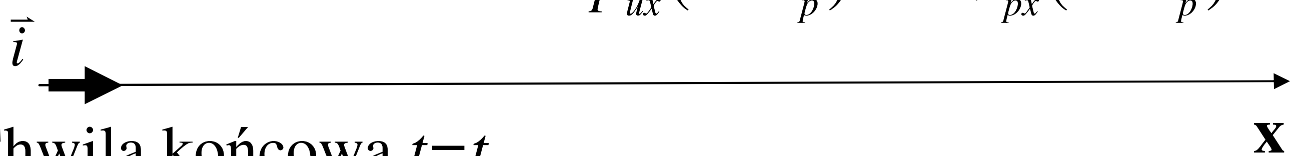


Składowe x-owe prędkości pocisku i armaty w chwili początkowej

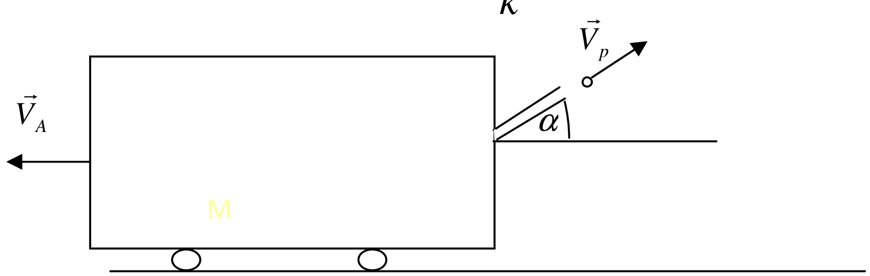
$$V_{px}(t=t_p) = V_{Ax}(t=t_p) = 0$$

Składowa x pędu układu złożonego z pocisku i armaty

$$p_{ux}(t=t_p) = mV_{px}(t=t_p) + MV_{Ax}(t=t_p) = 0$$



Chwila końcowa $t=t_k$



Składowe x-owe prędkości pocisku i armaty w chwili końcowej

$$V_{px}(t=t_k) = V_p\cos(\alpha)$$

$$V_{Ax}(t=t_k) = -V_A$$

Składowa x pędu układu złożonego z pocisku i armaty

$$p_{ux}(t=t_k) = mV_{px}(t=t_k) + MV_{Ax}(t=t_k) = mV_p\cos(\alpha) - MV_A$$

$$p_{ux}(t=t_p)=0 \qquad\qquad p_{ux}(t=t_k)=mV_p\cos(\alpha)-MV_A$$

Rzut siły wypadkowej zewnętrznej działającej na układ złożony z armaty i pocisku na kierunek równoległy do podłoża jest równy zeru. Wynika stąd iż rzut pędu układu złożonego z armaty i pocisku na ten kierunek jest zachowany i nie ulega zmianie w czasie wystrzału pocisku.

$$F_x=0\Rightarrow p_{ux}(t=t_p)=p_{ux}(t=t_k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=mV_p\cos(\alpha)-MV_A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A=\frac{mV_p\cos(\alpha)}{M}=\frac{10kg\cdot 60\frac{m}{s}\cdot\cos\left(60^0\right)}{3000kg}=\frac{600\cdot\frac{1}{2}}{3000}\frac{m}{s}=0{,}1m/s$$

Środek masy układu ciał

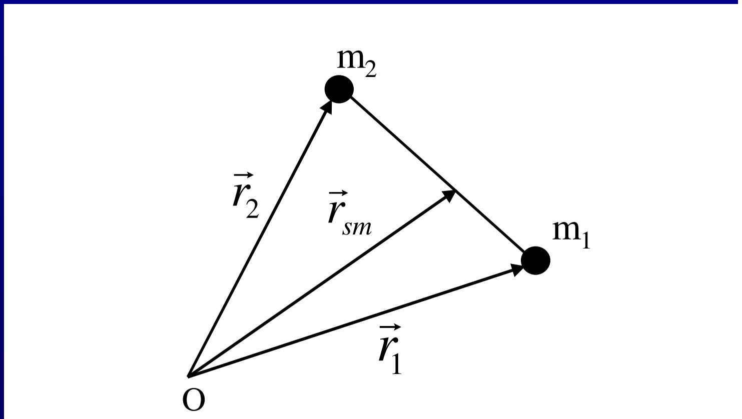
Położenie środka masy $\vec{r}_{sm} = [x_{sm}, y_{sm}, z_{sm}]$ układu złożonego z punktów materialnych można określić ze wzoru:

$$\vec{r}_{sm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

gdzie $\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$ -wektor wodzący *i*-tego punktu.

Dla układu złożonego z dwóch ciał środek masy leży na odcinku łączącym oba ciała.

$$\vec{r}_{sm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



W przypadku bryły sumowanie obejmuje nieskończona ilość części na jaką dzielimy bryłę, które traktujemy jak punkty materialne

Jeżeli bryła ma stałą gęstość oraz ma środek, oś lub płaszczyznę symetrii to środek masy leży na tym elemencie symetrii

Prędkość środka masy

$$\vec{V}_{sm} = \frac{d\vec{r}_{sm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) \overset{m_i=const}{=} \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M} = \frac{\vec{p}_u}{M}$$

(sumowanie po wszystkich ciałach wchodzących w skład układu)

$$M = \sum_i m_i$$

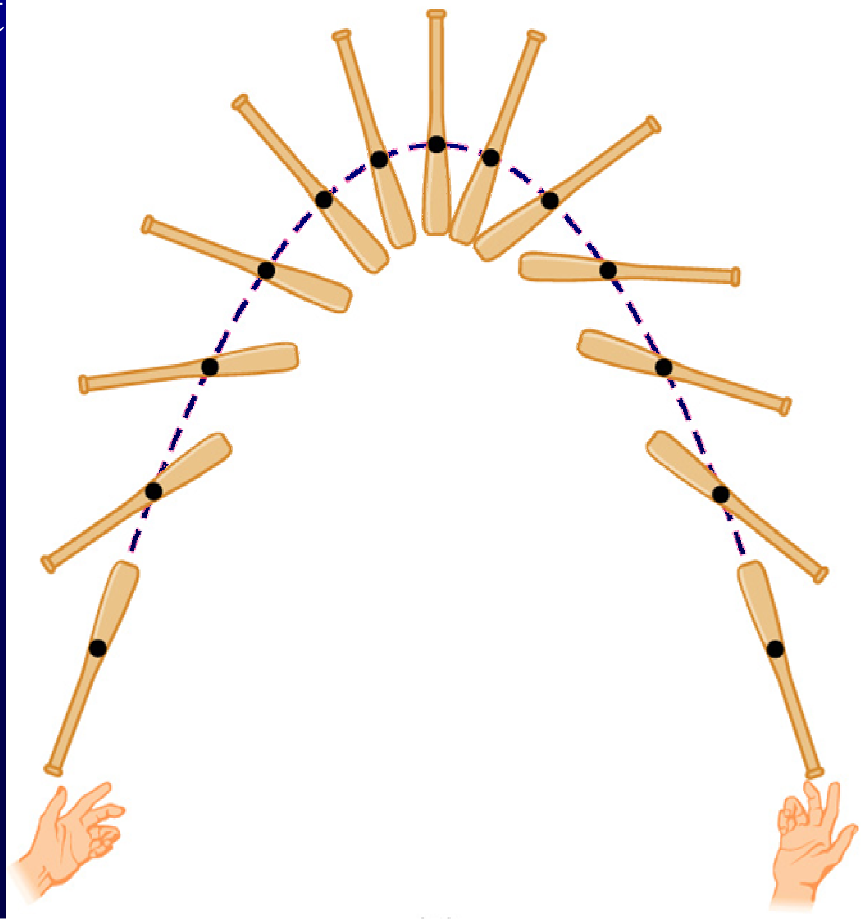
Przyspieszenie środka masy

$$\vec{a}_{sm} = \frac{d\vec{V}_{sm}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d\vec{p}_u}{dt} = \frac{\vec{F}_{zw}}{M}$$

Środek masy zachowuje się jak punkt o masie równej sumie mas wszystkich ciał układu , na który działa siła wypadkowa równa wektorowej sumie sił zewnętrznych działających na wszystkie ciała wchodzące w skład układu. Wniosek słuszny również w przypadku bryły złożonej z nieskończonej ilości punktów materialnych.

Ruch maczugi

Ruch środka masy maczugi (będącej bryła złożoną z nieskończonej ilości punktów materialnych) odbywa się tak jak ruch punktu materialnego na który działa siła ciężkości równa sumie wektorowej sił ciężkości działających na wszystkie punkty bryły. Ze względu iż można przyjąć iż przyspieszenie ziemskie jest stałe w obszarze bryły to jest ona równa sile ciężkości działającej na punkt materialny o masie równej masie całej bryły. Dodatkowo można przyjąć iż jest ona przyłożona do środka masy bryły



Ruch środka masy ma taki sam charakter jak ruch punktu materialnego w polu siły ciężkości. Przyspieszenie w tym ruchu jest równe przyspieszeniu ziemskiemu $\vec{a} = \vec{g}$

Ruch pozostałych punktów jest znacznie bardziej złożony.

Zachowanie się środka masy układu na który nie działają siły zewnętrzne (lub siły działające się równoważą)

$$\vec{a}_{sm} = \frac{\vec{F}_{zw}}{M}$$

$$\vec{F}_{zw} = 0$$

$$\vec{a}_{sm} = 0 \Rightarrow \vec{V}_{sm} = const$$

Gdy wypadkowa siła zewnętrzna działająca na układ ciał znika to środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej lub pozostaje w spoczynku

Można przyjąć iż sytuacja taka zachodzi podczas zderzenia się ciał ze sobą , dlatego położenie środka masy układu zderzających się ciał może być przyjęte jako początek układu inercjalnego w którym badamy zderzenie się ciał.

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna jest wielkością skalarną .
Energia kinetyczna ciała będącego punktem materialnym zależy od jego masy *m* i kwadratu szybkości (wartości prędkości) *V* z jaką ciało się porusza

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m V^2 \qquad (*)$$

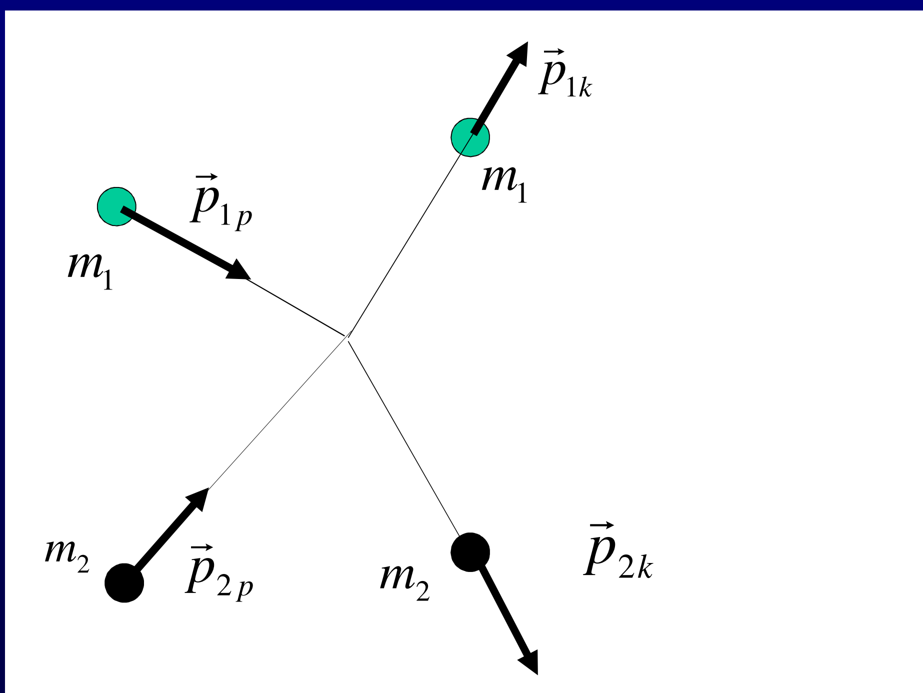
Wzór obowiązuje gdy szybkość ciała jest znacznie mniejsza od prędkości światła
Energia kinetyczna układu złożonego z wielu punktów materialnych jest równa sumie (algebraicznej) energii kinetycznej tych punktów.
Wzór (*) można również stosować dla bryły sztywnej o ile wszystkie punkty bryły poruszają się z jednakową prędkością w tym samym kierunku (bryła podlega ruchowi postępowemu). W innym przypadku trzeba bryłę podzielić na punkty materialne, a energia kinetyczna bryły jest sumą energii kinetycznych wszystkich punktów materialnych z których składa się bryła.
Energię kinetyczną ciała podobnie jak każdą energię mierzymy w układzie SI w dżulach (symbol jednostki *J*)

$$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

Powyższy związek między jednostkami zostanie wyjaśniony przy omawianiu wielkości zwanej pracą.

Zderzenia

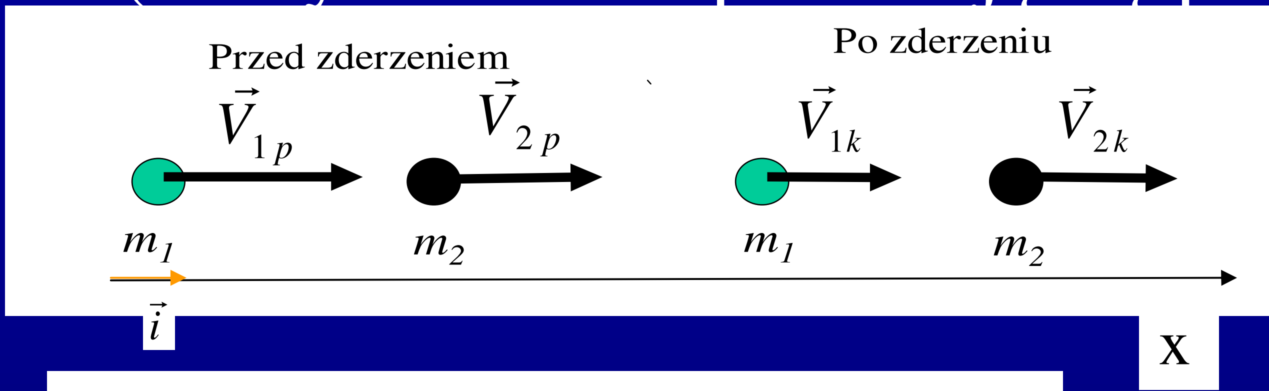
W trakcie zderzenia ciała zderzające się oddziałują na siebie dużymi siłami w krótkim czasie co prowadzi do zmiany pędu pojedynczych ciał
W trakcie zderzenia zmiana pędu układu zderzających się ciał zaniedbywalnie mała gdyż siły zewnętrzne są pomijalnie małe w stosunku do sił jakimi działają na siebie ciała wchodzące w skład układu, a czas zderzenia jest bardzo krótki. Wynika z tego też to iż w trakcie zderzenia pęd układu jest zachowany a także prędkość środka masy układu nie ulega zmianie w trakcie zderzenia



$$\vec{p}_{1p} + \vec{p}_{2p} = \vec{p}_{1k} + \vec{p}_{2k}$$

$$m_1\vec{V}_{1p} + m_2\vec{V}_{2p} = m_1\vec{V}_{1k} + m_2\vec{V}_{2k}$$

Zderzenia sprężyste ciał centralne
(wszystkie ciała poruszają się po linii prostej)



$$\left|\vec{i}\right| = 1$$

$$m_1 V_{1p} + m_2 V_{2p} = m_1 V_{1k} + m_2 V_{2k}$$ (zasada zachowania pędu)

$$\frac{m_1 V_{1p}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2}$$ (zasada zachowania energii)

$V_{1p}, V_{2p}, V_{1k}, V_{2k}$ -- x-owe (jedyne niezerowe) składowe wektora prędkości (mogące przyjmować wartości dodatnie lub ujemne)

Znając prędkości ciał przed zderzeniem można określić w oparciu o zasady zachowania prędkości ciał po zderzeniu

(z zasady zach. pędu)

$$m_1 V_{1p} + m_2 V_{2p} = m_1 V_{1k} + m_2 V_{2k}$$

$$m_1 \left(V_{1p} - V_{1k} \right) = m_2 \left(V_{2k} - V_{2p} \right)$$

$$\frac{m_1 \left(V_{1p}^2 - V_{1k}^2 \right)}{2} = \frac{m_2 \left(V_{2k}^2 - V_{2p}^2 \right)}{2}$$

(z zasady zach. energii)

$$\frac{m_1 \left(V_{1p} - V_{1k} \right)\left(V_{1p} + V_{1k} \right)}{2} = \frac{m_2 \left(V_{2k} - V_{2p} \right)\left(V_{2k} + V_{2p} \right)}{2}$$

$$V_{1p} + V_{1k} = V_{2k} + V_{2p}$$

$$V_{1k} = V_{2k} + V_{2p} - V_{1p}$$

$$2m_1 V_{1p} + (m_2 - m_1) V_{2p} = (m_1 + m_2) V_{2k}$$

$$V_{2k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1p} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2p}$$

$$V_{1k} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1p} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2p}$$

Gdy przed zderzeniem drugie ciało spoczywało to $V_{2p} = 0$

$$V_{1k} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1p} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2p} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1p}$$

$$V_{2k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1p} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2p} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1p}$$

Energia kinetyczna ciała 1 przed zderzeniem $E_{kin1,p} = \frac{m_1 V_{1p}^2}{2}$

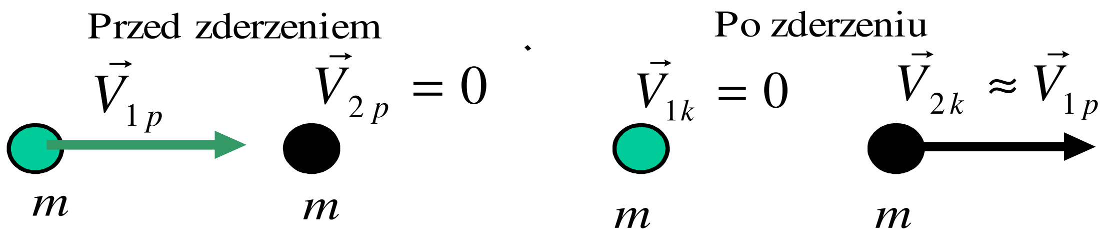
Energia kinetyczna ciała 1 po zderzeniu

$$E_{kin1,k} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1p}^2}{2} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

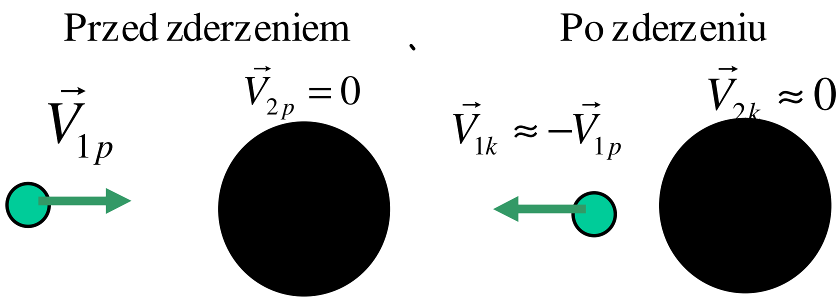
Stosunek obu energii $\frac{E_{kin1,k}}{E_{kin1,p}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$ jest najmniejszy

wtedy gdy masy obu ciał są do siebie zbliżone. Wykorzystuje się ten fakt w reaktorach jądrowych gdzie do spowolnienia neutronów wykorzystuje się jądra lekkich pierwiastków

1) Gdy $m_1 = m_2$ oraz $V_{2p} = 0$ to $V_{2k} = V_{1p}$ oraz $V_{1k} = 0$



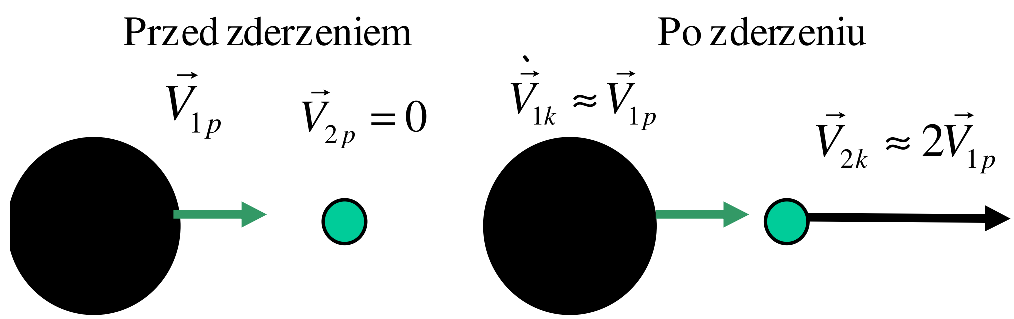
2) Gdy $V_{2p} = 0$ oraz $m_2 >> m_1$ to $V_{1k} \approx -V_{1p}$ oraz $V_{2k} \approx 0$



$$V_{1k} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1p}$$

$$V_{2k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1p}$$

3) Gdy $V_{2p} = 0$ oraz $m_2 << m_1$ to $V_{1k} \approx V_{1p}$ oraz $V_{2k} \approx 2V_{1p}$



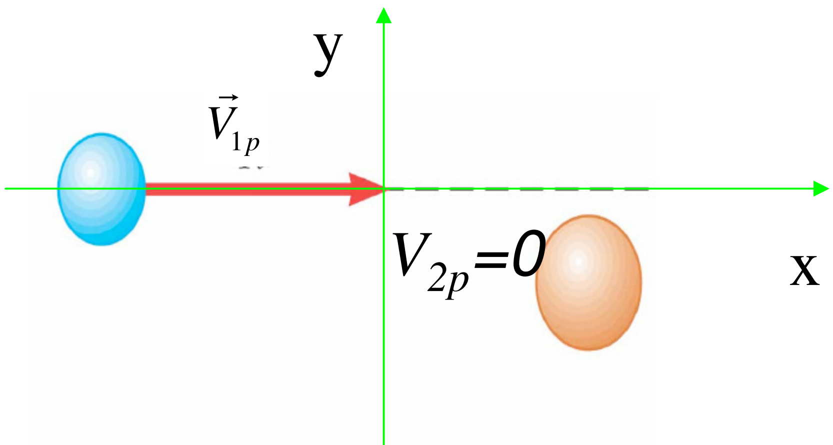
Zad. 7 (seria III). Kula o masie m_1 i szybkości V_{1p} zderza się sprężyście niecentralnie z inną kulą znajdującą się w spoczynku o masie $m_2 = 3m_1$. Po zderzeniu kula o masie m_2 porusza się pod katem $\phi < \frac{\pi}{2}$ względem pierwotnego kierunku ruchu kuli o masie m_1. Znaleźć szybkości V_{1k} oraz V_{2k} obu kul po zderzeniu.

Dane: $m_2/m_1=3$, V_1, ϕ

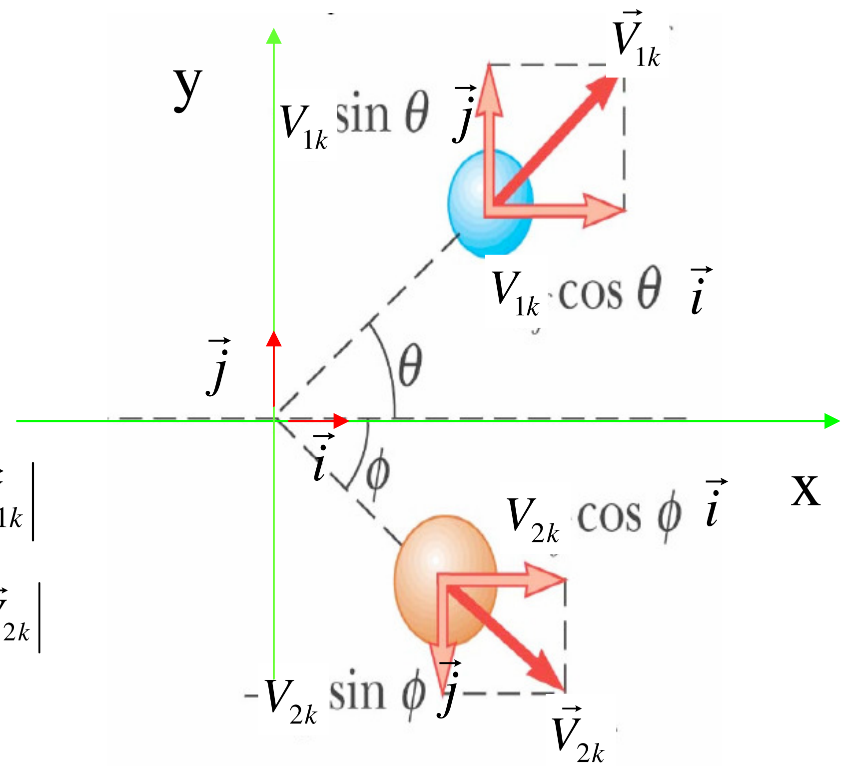
Szukane: V_{1k}, V_{2k}

Zderzenie sprężyste (niecentralne) ciała poruszającego się z ciałem spoczywającym

Przed zderzeniem



Po zderzeniu



$$V_{1k} = \left|\vec{V}_{1k}\right|$$

$$V_{2k} = \left|\vec{V}_{2k}\right|$$

Zasada zachowania energii

$$\frac{m_1 V_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2}$$

Zasada zachowania pędu

$$m_1 V_{1p} = m_1 V_{1k}\cos(\theta) + m_2 V_{2k}\cos(\phi)$$ Składowa x pędu

$$0 = m_1 V_{1k}\sin(\theta) - m_2 V_{2k}\sin(\phi)$$ Składowa y pędu

Do określenia ruchu układu po zderzeniu trzeba znać oprócz prędkości $\vec{V}_{1p}$ jedną z 4 wielkości: V_{1k}, V_{2k}, θ, ϕ opisujących ruch obu ciał po zderzeniu W zadaniu jest nią kąt ϕ.

$m_2 = 3m_1$

$$\frac{m_1 V_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2} \Rightarrow V_{1p}^2 = V_{1k}^2 + 3V_{2k}^2 \qquad (1)$$

$$m_1 V_{1p} = m_1 V_{1k}\cos(\theta) + m_2 V_{2k}\cos(\phi) \Rightarrow V_{1p} = V_{1k}\cos(\theta) + 3V_{2k}\cos(\phi) \qquad (2)$$

$$0 = m_1 V_{1k}\sin(\theta) - m_2 V_{2k}\sin(\phi) \Rightarrow 0 = V_{1k}\sin(\theta) - 3V_{2k}\sin(\phi) \qquad (3)$$

Z (2) $\cos(\theta) = \dfrac{V_{1p} - 3V_{2k}\cos(\phi)}{V_{1k}}$ Z (3) $\sin(\theta) = \dfrac{3V_{2k}\sin(\phi)}{V_{1k}}$

$$1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right)}{V_{1k}^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2$$

Z (1) $V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 \longrightarrow V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2$

$$V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 12V_{2k}^2 = 0 \Rightarrow V_{2k} = \frac{1}{2}V_{1p}\cos(\phi)$$

$$V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2(\phi)\right) = \frac{V_{1p}^2}{4}\left(4 - 3\cos^2(\phi)\right)$$

$$V_{1k} = \frac{V_{1p}}{2}\sqrt{4 - 3\cos^2(\phi)}$$