Dynamika

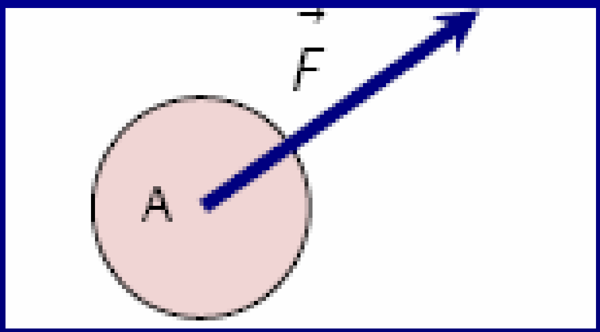
Zakładać będziemy, iż prędkość z jaką poruszają się ciała jest niewielka w stosunku do prędkości światła.

Ponadto analizowane ciało jest punktem materialnym lub tez prędkość wszystkich jego punktów jest jednakowa tak iż ruch ciała może być reprezentowany przez ruch dowolnego jego punktu.

Ruch ciała będziemy analizować w inercjalnych układach odniesienia. **Układ poruszający się względem układu inercjalnego ruchem jednostajnym i prostoliniowym jest układem inercjalnym. Każdy punkt spoczywający w analizowanym układzie ruchomym porusza się w układzie wyjściowym inercjalnym ze stałą w czasie jednakową prędkością (rozumianą jako wektor)**

Siła

Siła jest wielkością wektorową. Posiada wartość, kierunek i zwrot.



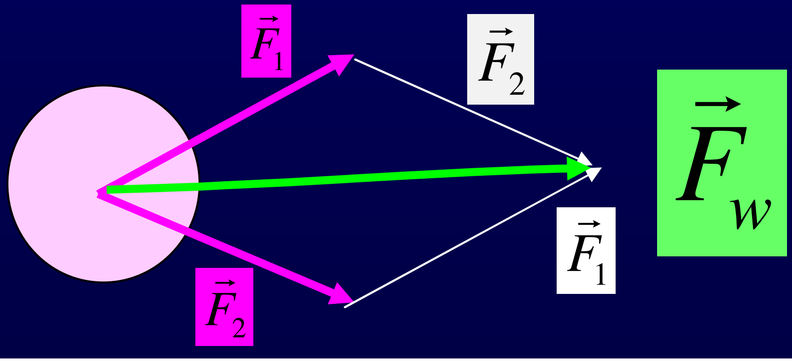
W układzie kartezjańskim można siłę określić przez podanie trzech składowych F_x, F_y, oraz F_z wektora siły

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{F} = \left[F_x, F_y, F_z\right]$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - wersory określające zwroty osi Ox,Oy i Oz układu kartezjańskiego

Siła wypadkowa działająca na dane ciało jest równa wektorowej sumie wszystkich sił działających na to ciało.



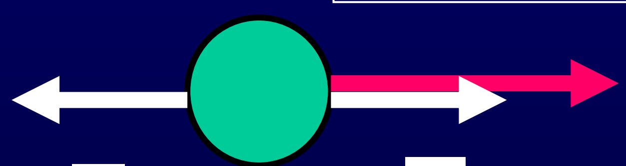
$$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

I Zasada dynamiki Newtona

Jeżeli siła wypadkowa działająca na ciało jest równa zeru to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej. Siła wypadkowa jest suma wektorową wszystkich ciał

$$\vec{F}_w = 0 \Rightarrow \vec{V} = const$$

$\vec{v}$ = const.



$\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$

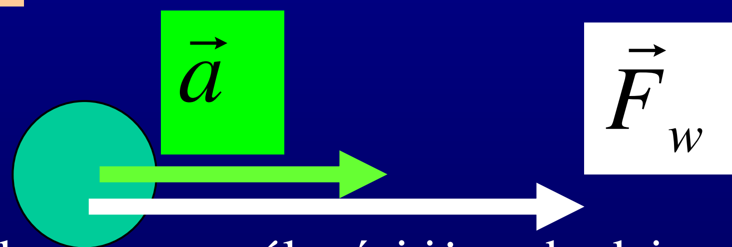
$$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

II Zasada dynamiki Newtona

Przyspieszenie $\vec{a}$ z jakim porusza się ciało jest proporcjonalne do wypadkowej siły działającej na ciało $\vec{F}_w$ i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała *m*.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

$$\vec{F}_w = m\vec{a}$$



Z równania tego wynika w szczególności iż zachodzi

$$\vec{F}_{w\parallel} = m\vec{a}_{\parallel}$$

$$\vec{F}_{w\perp} = m\vec{a}_{\perp}$$

$\vec{F}_{\parallel}(\vec{F}_{\perp})$ -rzut siły wypadkowej na kierunek równoległy do dowolnie wybranej prostej (prostopadły do pewnej powierzchni)

$\vec{a}_{\parallel}(\vec{a}_{\perp})$ rzut (wektora) wektora przyspieszenia na ten wybrany kierunek

- Jednostką siły jest niuton. Siła wypadkowa ma wartość F=1N jeżeli nadaje ciału o masie m=1kg przyspieszenie o wartości a=1m/s^2

$$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Z równania wektorowego $\vec{F}_w = m\vec{a}$ w układzie kartezjańskim wynikają m.in. 3 równania skalarne

$$F_{wx} = ma_x \qquad F_{wy} = ma_y \qquad F_{wz} = ma_z$$

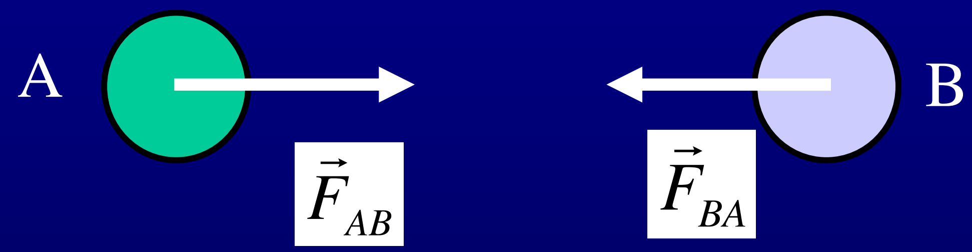
Jeśli wypadkowa siła działająca na ciało o stałej masie nie zależy od czasu (nie zmienia wartości, kierunku i zwrotu w trakcie ruchu ciała) to również przyspieszenie tego ciała nie zależy od czasu

Zasady I i II dynamiki Newtona obowiązują tylko w inercjalnych układach odniesienia o ile uwzględniamy tylko siły wynikające z oddziaływania z innymi ciałami, polami itp. Po to aby można je można stosować w układach nieinercjalnych należy uwzględnić siły pozorne bezwładności

III Zasada dynamiki Newtona

Jeżeli ciało A działa na B pewną siłą $\vec{F}_{BA}$ to ciało B działa na A siłą $\vec{F}_{AB}$ równą co do wartości ale przeciwnie skierowaną

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

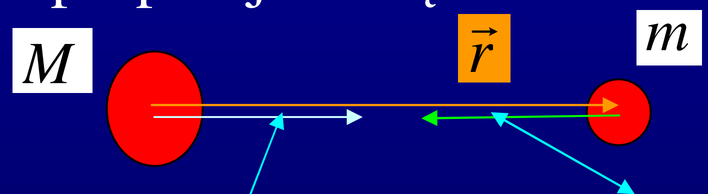


Przykłady wyróżnienia sił ze względu na ich pochodzenie

Siła grawitacyjna, Prawo Powszechnego ciążenia

(odkryte przez I. Newtona w XVII wieku)

Siła grawitacyjna działająca między ciałami (punktami materialnymi) jest siłą przyciągającą o wartości proporcjonalnej do mas obu ciał i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi



$$\vec{F}_{Mm} = G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{mM} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

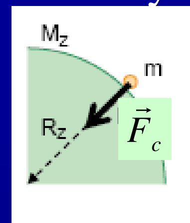
$$r = \left|\vec{r}\right|$$

$$\left|\vec{F}_{Mm}\right| = \left|\vec{F}_{mM}\right| = G\frac{mM}{r^2}$$

$$G = 6{,}673\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} = 6{,}673\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kgs^2}$$

Wzory słuszne dla punktów materialnych lub ciał kulistych o gęstości o symetrii sferycznej , r oznacza odległość pomiędzy środkami tych ciał

Siłę grawitacyjną działającą na ciało ze strony Ziemi określa się mianem siły ciężkości i zapisujemy ja wzorem $\vec{F}_c = m\vec{g}$ gdzie $\vec{g}$ to wektor przyspieszenia ziemskiego skierowany w kierunku ziemi



Wartość siły ciężkości działającej na ciało o masie m nie znajdujące się we wnętrzu Ziemi można określić jako: $\left|\vec{F}_c\right| = G\dfrac{mM_z}{r^2}$

M_z=5,97*10^{24}kg - masa Ziemi, r- odległość ciała od środka Ziemi

Wzór powyższy obowiązuje w przypadku gdy $r \geq R_z$

gdzie $R_z \approx 6371 km$ -promień Ziemi

Ponieważ wartość tej siły jest równa wartości siły ciężkości

$\left|\vec{F}_c\right| = mg$ $g = \left|\vec{g}\right|$- wartość przyspieszenia ziemskiego

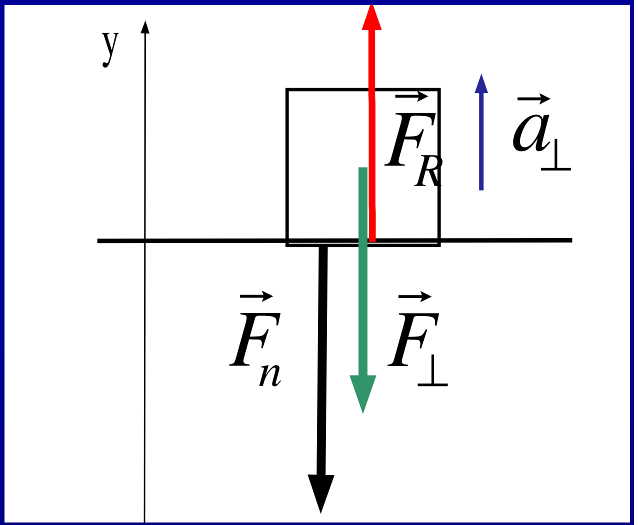
to wartość przyspieszenia ziemskiego maleje ze wzrostem odległości *r* od środka Ziemi gdy $r \geq R_z$ zgodnie ze wzorem $g = G\dfrac{M_z}{r^2}$

Na powierzchni Ziemi *r* jest równe promieniowi Ziemi

$r = R_z$ zatem *g* na powierzchni Ziemi jest równe: $g = G\dfrac{M_z}{R_z^2} \approx 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$

W dalszej części zajęć przez g będziemy oznaczać wartość przyspieszenia ziemskiego na powierzchni Ziemi i gdy będziemy analizowac ruch blisko powierzchni Ziemi to będziemy uważać iż g nie zależy od odległości ciała od powierzchni Ziemi.

Siła reakcji (normalna) $\vec{F}_R$ -siła ta jest wywierana na ciało przez powierzchnie na której ciało się znajduje. Skierowana jest ona prostopadle do powierzchni



Z II zasady dynamiki wynika iż $m\vec{a}_\perp = \vec{F}_{w\perp} = \vec{F}_R + \vec{F}_\perp$

$\vec{a}_\perp$ - rzut przyspieszenia na kierunek prostopadły do powierzchni

$\vec{F}_\perp$ -rzut siły wypadkowej (bez uwzględnienia siły reakcji) na kierunek prostopadły do powierzchni

W przypadki gdy ciało nie porusza się w kierunku pionowym z przyspieszeniem $\vec{a}_\perp = 0$ to siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$ równoważy siłę $\vec{F}_\perp$ działającą na ciało $\vec{F}_R + \vec{F}_\perp = 0 \Rightarrow \vec{F}_R = -\vec{F}_\perp \Rightarrow \left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_\perp\right|$

Siła nacisku $\vec{F}_n$ -wywiera tą siłę ciało na podłoże .

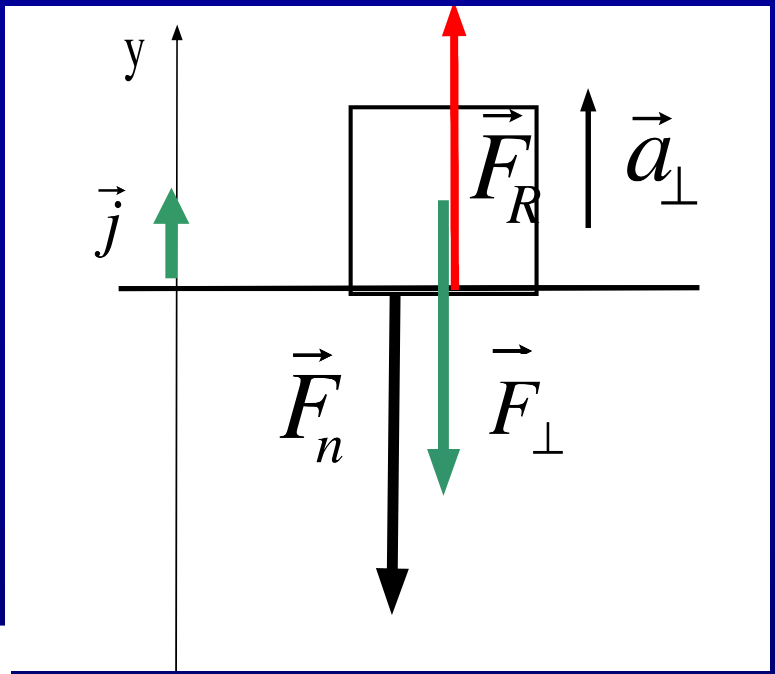
Na mocy III zasady dynamiki Newtona zachodzi: $\vec{F}_n = -\vec{F}_R \rightarrow \left|\vec{F}_n\right| = \left|\vec{F}_R\right|$

Gdy powierzchnia jest ustawiona równolegle do powierzchni ziemi i na ciało nie działają żadne inne siły nierównoległe do powierzchni niż siła ciężkości $\vec{F}_c$ i reakcji $\vec{F}_R$ to $\vec{F}_\perp = \vec{F}_c$ i w przypadku gdy $\vec{a}_\perp = 0$ to $\left|\vec{F}_n\right| = \left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_c\right| = mg$ m –masa ciała

Siła reakcji w przypadku występowania składowej przyspieszenia prostopadłej do podłoża

W układzie z osią Oy pionowo do góry $\vec{a}_\perp = a_y \vec{j}$

$\vec{F}_R = F_{Ry}\vec{j} = \left|\vec{F}_R\right|\vec{j}$ $\quad$ $\vec{F}_\perp = F_{\perp y}\vec{j} = -\left|\vec{F}_\perp\right|\vec{j}$



$$ma_y = F_{Ry} + F_{\perp y} = \left|\vec{F}_R\right| - \left|\vec{F}_\perp\right|$$

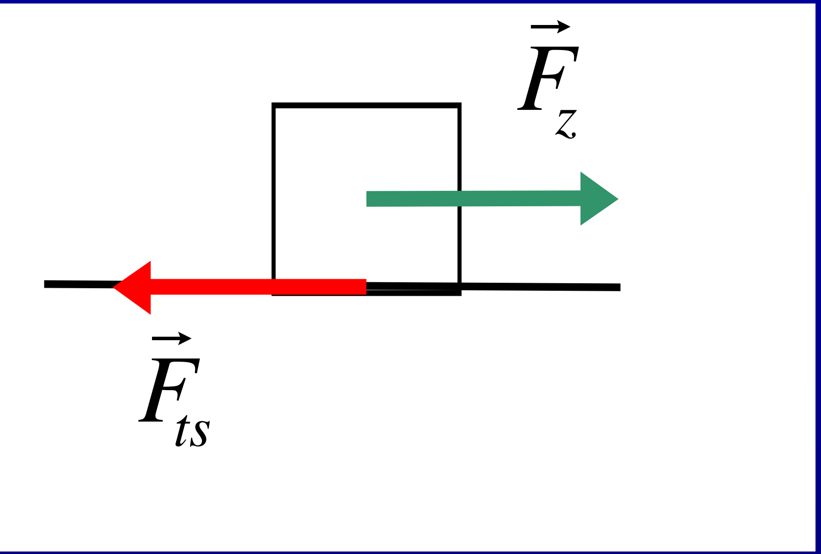
$$\left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_\perp\right| + ma_y$$

Gdy $\vec{F}_\perp = \vec{F}_c$ to $\left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_c\right| + ma_y$

Gdy ciało porusza się z przyspieszeniem skierowanym do dołu (odwrotnie niż na rysunku) czyli $a_y<0$ (np. hamująca winda poruszająca się do góry czy przyspieszająca winda poruszająca się w dół) to wartość siły reakcji działającej na ciało w windzie i siły nacisku ciała na podłogę windy jest mniejsza od wartości siły ciężkości.

Gdy ciało porusza się z przyspieszeniem skierowanym do góry czyli $a_y>0$ (np. przyspieszająca winda poruszająca się do góry, hamująca winda poruszająca się w dół) to wartość siły reakcji działającej na ciało w windzie i siły nacisku ciała na podłogę windy jest większa od wartości siły ciężkości.

Siła tarcia statycznego



Przeciwdziała poruszeniu ciała pod wpływem przyłożonej do układu siły zewnętrznej $\vec{F}_z$.

Spełnia relację

$$\vec{F}_{ts} = -\vec{F}_z \rightarrow \left|\vec{F}_{ts}\right| = \left|\vec{F}_z\right|$$

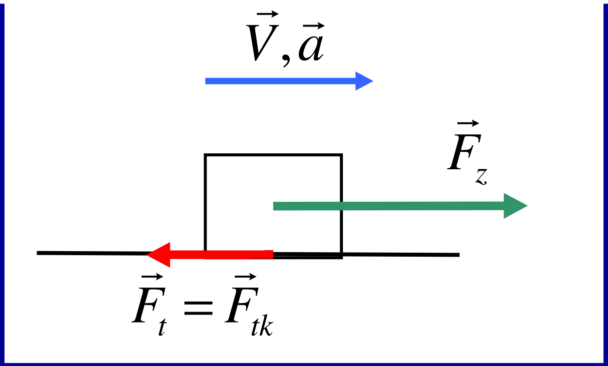
Maksymalna wartość siły tarcia statycznego

$$F_{ts,\max} = \left|\vec{F}_{ts,\max}\right| = \mu_s F_n = \mu_s F_R$$

μ_s -statyczny współczynnik tarcia

F_n -wartość siły nacisku równa wartości siły reakcji $F_n = F_R$

Siła tarcia kinetycznego przy przesuwaniu ciała po podłożu



Gdy $F_z > F_{ts,\max}$ to ciało porusza się z przyspieszeniem o wartości

$$a = |\vec{a}| = \frac{F_z - F_{tk}}{m}$$

$F_{tk} = |\vec{F}_{tk}|$ -siła tarcia kinetycznego.

$F_z = |F_z|$

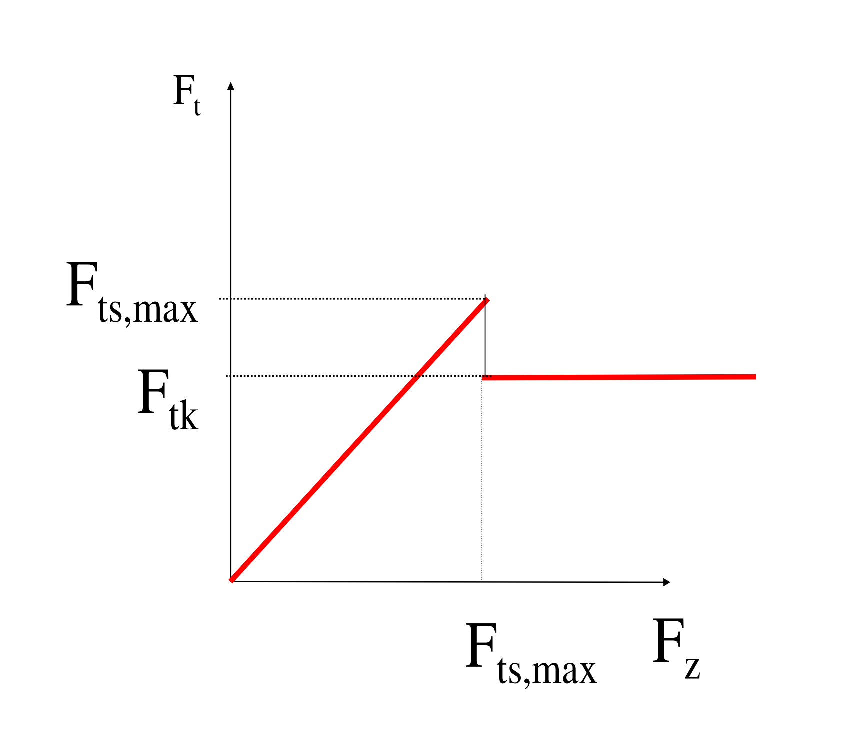
Gdy ciało sunie po powierzchni to wartość siły tarcia można określić ze wzoru

$$F_t = F_{tk} = \mu F_n = \mu F_R$$

μ -kinetyczny współczynnik tarcia

F_n -siła nacisku

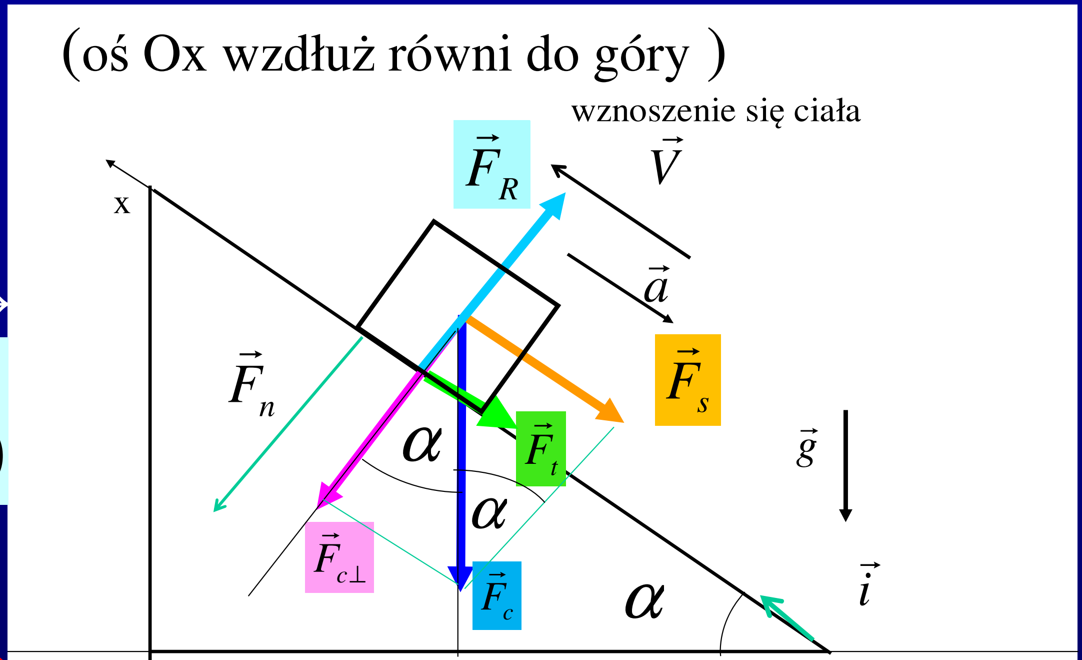
$\mu \le \mu_s$



Siła tarcia działa w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu ciała (Wektor siły tarcia $\vec{F}_t$ ma przeciwny zwrot niż wektor prędkości $\vec{V}$)

Ruch ciała wzdłuż równi pochyłej do góry

Na ciało działają siły: ciężkości $\vec{F}_c$, reakcji $\vec{F}_R$ oraz tarcia $\vec{F}_t$. Dokonujemy rozkłady siły $\vec{F}_c$ na styczną do równi siłę zsuwająca $\vec{F}_s$ i prostopadła do równi siłę $\vec{F}_{c\perp}$ $\vec{F}_c = \vec{F}_s + \vec{F}_{c\perp}$



$$F_s = \left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}_c\right|\sin(\alpha) = mg\sin\alpha$$

$$F_{c\perp} = \left|\vec{F}_{c\perp}\right| = F_c\cos(\alpha) = mg\cos(\alpha)$$

Ruch prostoliniowy wzdłuż równi→

$$\vec{a}_\perp = 0 \Rightarrow \vec{F}_{w\perp} = \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R = m\vec{a}_\perp = 0$$

$$\to \vec{F}_R = -\vec{F}_{c\perp} \to F_R = \left|\vec{F}_R\right| = F_{c\perp} = mg\cos(\alpha)$$

Siła tarcia

$$\left|\vec{F}_t\right| = F_{tk} = F_n\mu = F_R\mu = mg\cos(\alpha)\mu$$

Siła wypadkowa skierowana wzdłuż równi do dołu

$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_R + \vec{F}_t = \vec{F}_s + \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R + \vec{F}_t = -(F_s + F_t)\vec{i} = F_{wx}\vec{i}$$

$$F_{wx} = -F_s - F_t$$

$$\vec{a} = a\vec{i}$$

$$a = a_x = \frac{F_{wx}}{m} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = const < 0$$

Ruch jednostajnie opóźniony z przyspieszeniem $\vec{a} = a\vec{i}$ i prędkością $\vec{V} = V\vec{i}$

$$V = V_0 + at = V_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t > 0$$

$$V_0 = V(t = 0)$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$S = V_0 t - \frac{1}{2}a_{op}t^2$$

Opóźnienie $a_{op} = \left|\vec{a}\right| = -a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

Ruch ciała po równi pochyłej do dołu

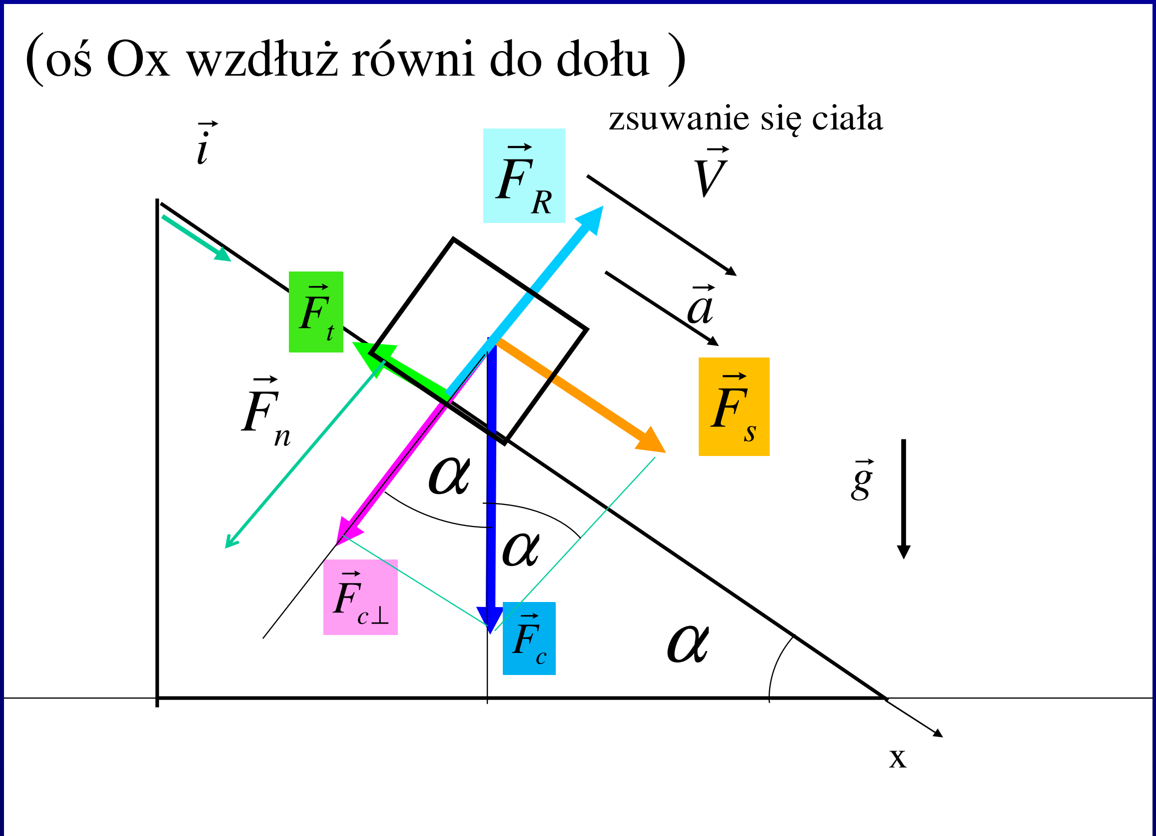
$$\vec{F}_{w\perp} = \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R = 0$$

Siła wypadkowa

$$\vec{F}_w = \vec{F}_s + \vec{F}_t = (F_s - F_t)\vec{i} = = F_{wx}\vec{i} \qquad F_{wx} = F_s - F_t$$

Siła zsuwająca $\vec{F}_s$ skierowana wzdłuż zbocza równi do dołu

Siła tarcia $\vec{F}_t$ skierowana wzdłuż zbocza równi do góry



Gdy $F_s \neq F_t$ ruch jednostajnie zmienny z przyspieszeniem $\vec{a} = a\vec{i}$ i prędkością $\vec{V} = V\vec{i}$ gdzie

$$a = a_x = \frac{F_{wx}}{m} = \frac{F_s - F_t}{m} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = const$$

$$V = V_0 + at > 0$$

$$V_0 = V(t=0)$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Gdy $F_s > F_t$ to $a > 0$ ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym

Gdy $F_s < F_t$ to $a < 0$ ciało porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym

Gdy $F_s = F_t$ to $a = 0$ ciało porusza się ruchem jednostajnym

Spoczynek ciała na równi pochyłej

W stanie równowagi musi zachodzić

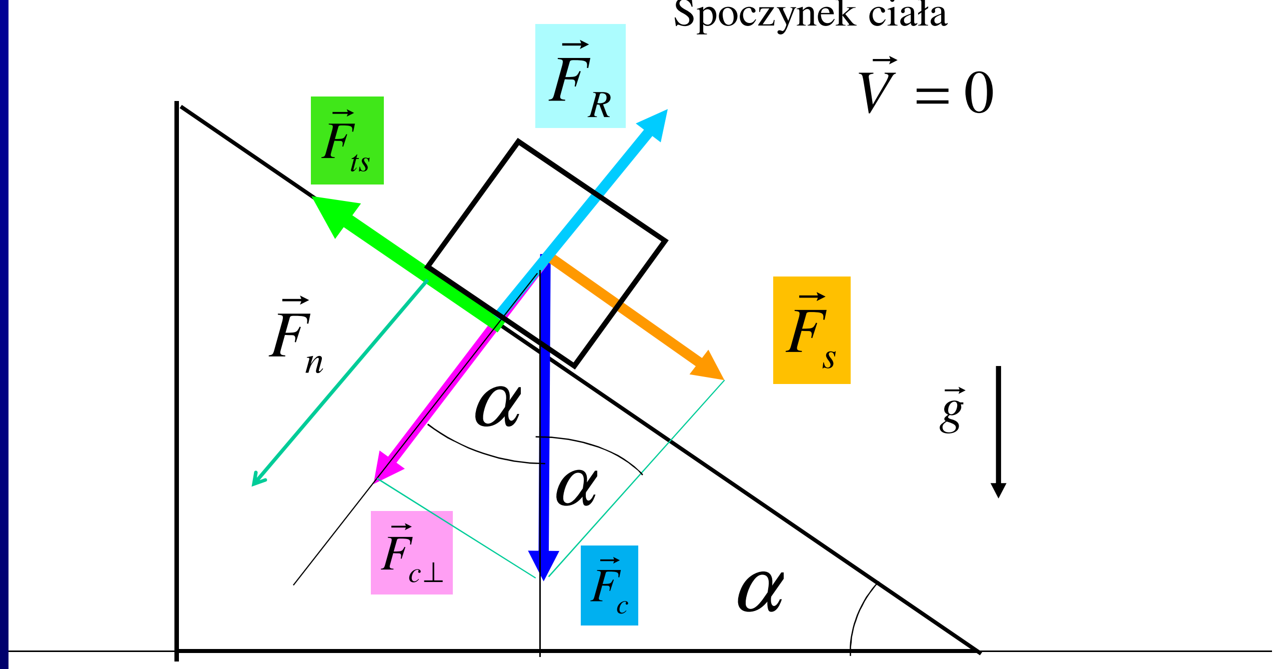
$$\vec{F}_w = \vec{F}_{w\|} = \vec{F}_s + \vec{F}_{ts} = 0$$

Siła zsuwająca $\vec{F}_s$ skierowana wzdłuż zbocza równi do dołu

Siła tarcia $\vec{F}_t = \vec{F}_{ts}$ skierowana wzdłuż zbocza równi do góry

$$\vec{F}_w = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ts} = -\vec{F}_s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{ts}\right| = \left|\vec{F}_s\right| = mg \sin\alpha$$

$$\vec{F}_{w\perp} = \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R = 0$$



Wartość siły tarcia statycznego nie może być większa od

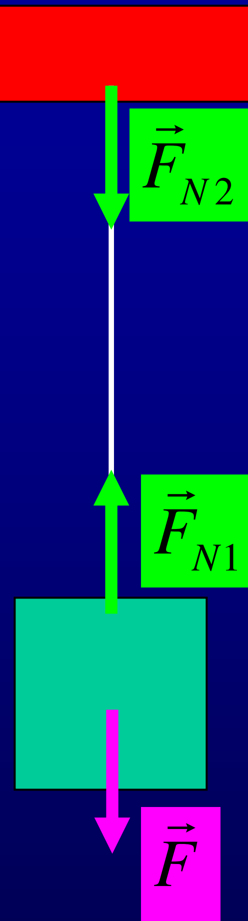
$$F_{ts,\max} = F_n \mu_s = F_R \mu_s = mg \cos\alpha \mu_s$$

Spoczynek na równi ciała umieszczonego na niej bez prędkości początkowej możliwy wówczas gdy

$$\left|\vec{F}_{ts}\right| \le F_{ts,\max} \Leftrightarrow mg \sin\alpha \le mg \cos\alpha \mu_s \Leftrightarrow \mu_s \ge tg\,\alpha$$

Przykłady wyróżnienia sił ze względu na ich pochodzenie

Siła naciągu nici $\vec{F}_N = \vec{N}$



$$\vec{F}_{N2} = -\vec{F}_{N1}$$

$$\left|\vec{F}_{N2}\right| = \left|\vec{F}_{N1}\right|$$

Zakładamy iż na ciało działa tylko siła $\vec{F}$ i siła naciągu nici $\vec{F}_{N1}$
Na przykład siłą $\vec{F}$ może być siła ciężkości

$$\vec{F} = \vec{F}_c = m\vec{g}$$

Zakładamy iż ciało nie porusza się ruchem w którym występuje przyspieszenie

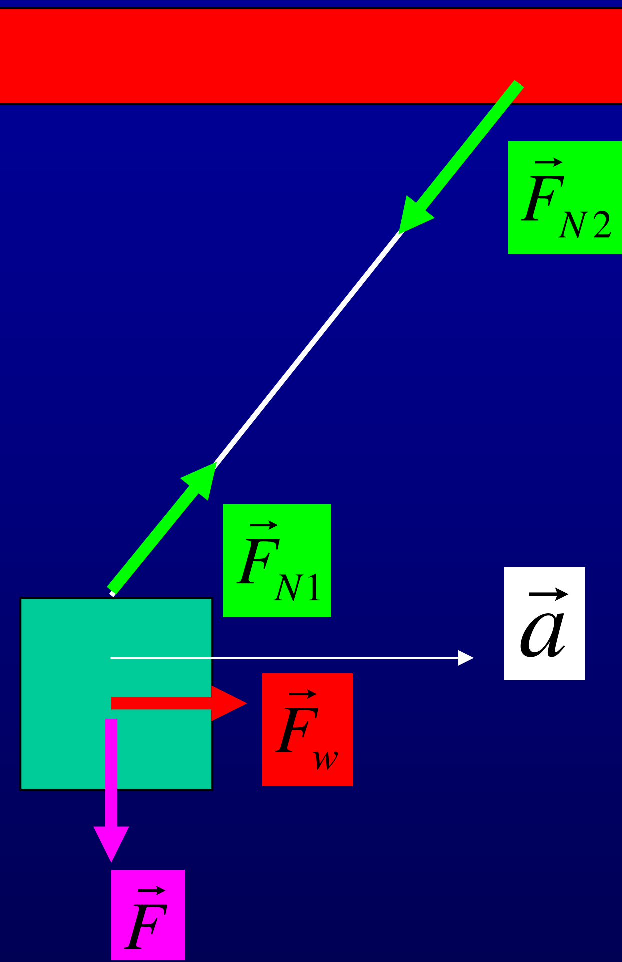
$$\vec{F}_w = \vec{F}_{N1} + \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{N1} = -\vec{F}$$

$$\left|\vec{F}_{N1}\right| = \left|\vec{F}\right|$$

Przykłady wyróżnienia sił ze względu na ich pochodzenie

Siła naciągu nici $\vec{F}_N = \vec{N}$



Zakładamy iż na ciało działa tylko siła $\vec{F}$ i siła naciągu nici $\vec{F}_{N1}$

Gdy ciało porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}$ to

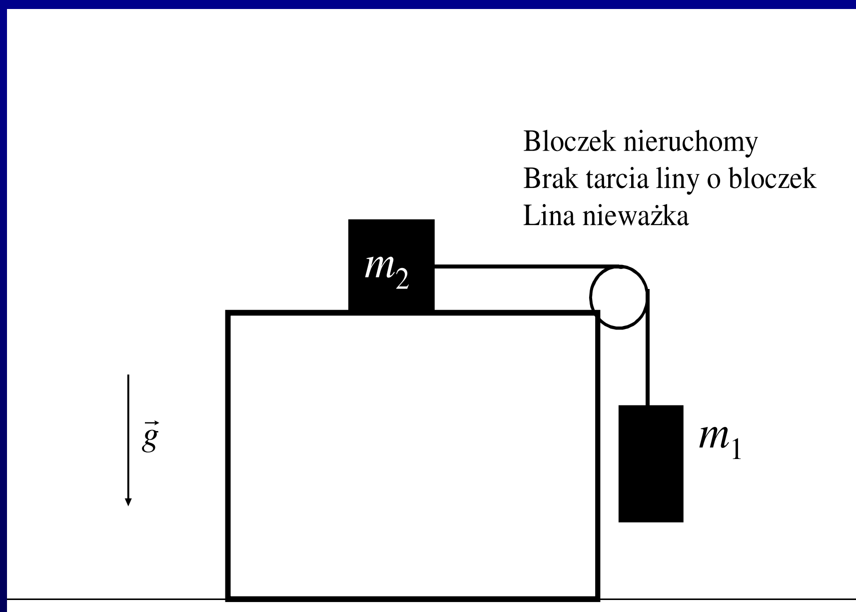
$$\vec{F}_w = \vec{F}_{N1} + \vec{F} = m\vec{a}$$

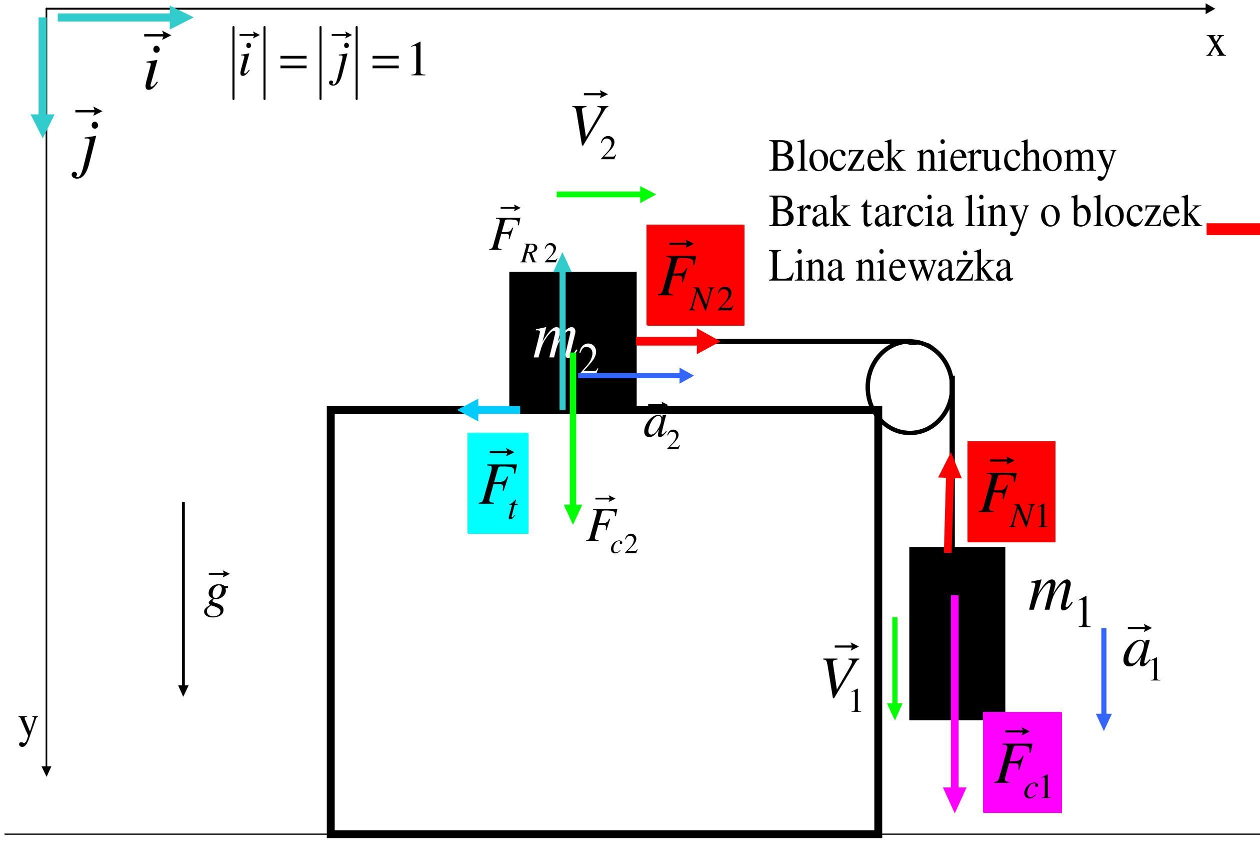
Gdy zakładamy iż masa nici jest pomijalnie mała i nie styka się z innymi ruchomymi ciałami oraz pomijamy tarcie liny o te ciała to można przyjąć iż $\left|\vec{F}_{N2}\right| = \left|\vec{F}_{N1}\right|$

W sytuacji gdy nić jest prosta to $\vec{F}_{N2} = -\vec{F}_{N1}$

Przykład (analiza ruchu dwu ciał). Dwa klocki są połączone nierozciągliwą nicią. Nić łączącą zwisający klocek o masie m_1 z położonym na stole klockiem o masie m_2 przerzucono przez nieruchomy bloczek. Znaleźć przyspieszenie z jakim mogą poruszać się te klocki oraz wartość siły naciągu (naprężenia) nici. Tarcie nici o bloczek pominąć.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g oraz wartość współczynnika tarcia klocka o masie m_2 o stół.





$$\left|\vec{F}_{R2}\right| = F_{R2}, \left|\vec{F}_{c2}\right| = F_{c2} = m_2 g$$

$$\left|\vec{F}_{t}\right| = F_{t}, \left|\vec{F}_{c1}\right| = F_{c1} = m_1 g$$

$$\left|\vec{F}_{N1}\right| = \left|\vec{F}_{N2}\right| = F_N$$

Oś Oy równoległa do kierunku ruchu ciała 1 i prostopadła do powierzchni po której porusza się ciało 2. Oś Ox równoległa do kierunku ruchu ciała 2

$$\vec{a}_n = a_{nx}\vec{i} + a_{ny}\vec{j} \quad (n = 1,2)$$

Ruch ciał prostoliniowy- przyspieszenia styczne do toru ruchu $\vec{a}_1 = a_1\vec{j}$ $\vec{a}_2 = a_2\vec{i}$

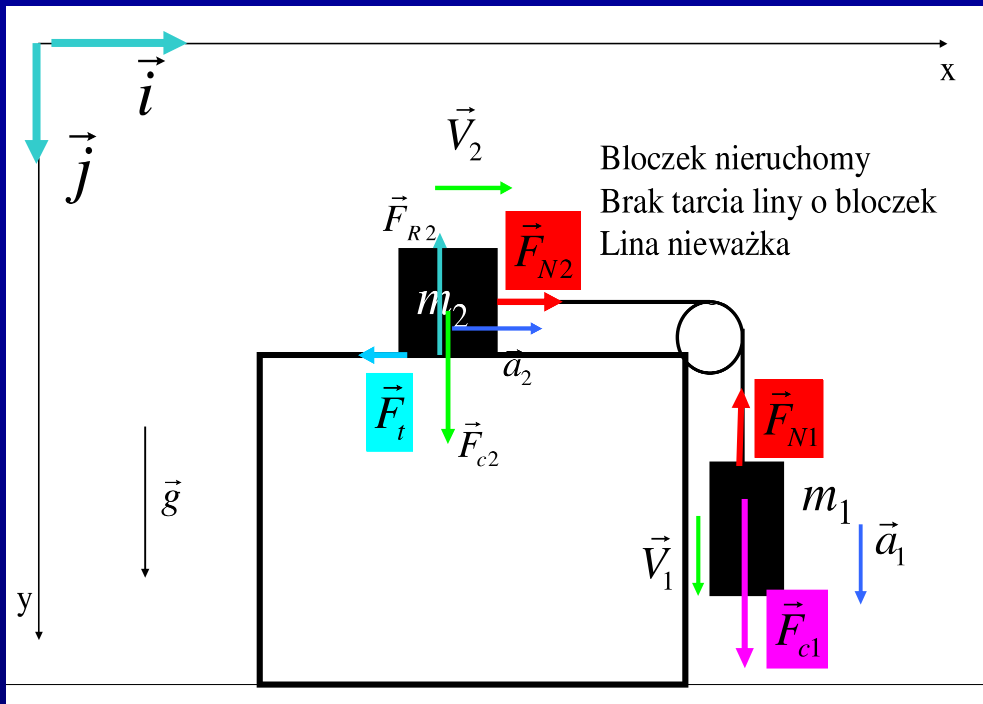
$$\left|\vec{V}_1\right| = \left|\vec{V}_2\right| \Rightarrow a_1 = a_2 = a$$

Z II zasady dynamiki Newtona $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{N1} \Rightarrow m_1 a\vec{j} = F_{c1}\vec{j} - F_N\vec{j} \Rightarrow \boxed{m_1 a = m_1 g - F_N}$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_t + \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{R2} \Rightarrow m_2 a\vec{i} = F_N\vec{i} - F_t\vec{i} + F_{c2}\vec{j} - F_{R2}\vec{j} \Rightarrow \boxed{m_2 a = F_N - F_t} \quad F_{c2} = F_{R2}$$

Korzystając z relacji w ramkach można określić F_N oraz a

$$\boxed{F_t = \mu F_{R2} = \mu F_{c2} = \mu m_2 g}$$



$$m_1 a = m_1 g - F_N$$

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g - F_t = m_1 g - \mu m_2 g$$

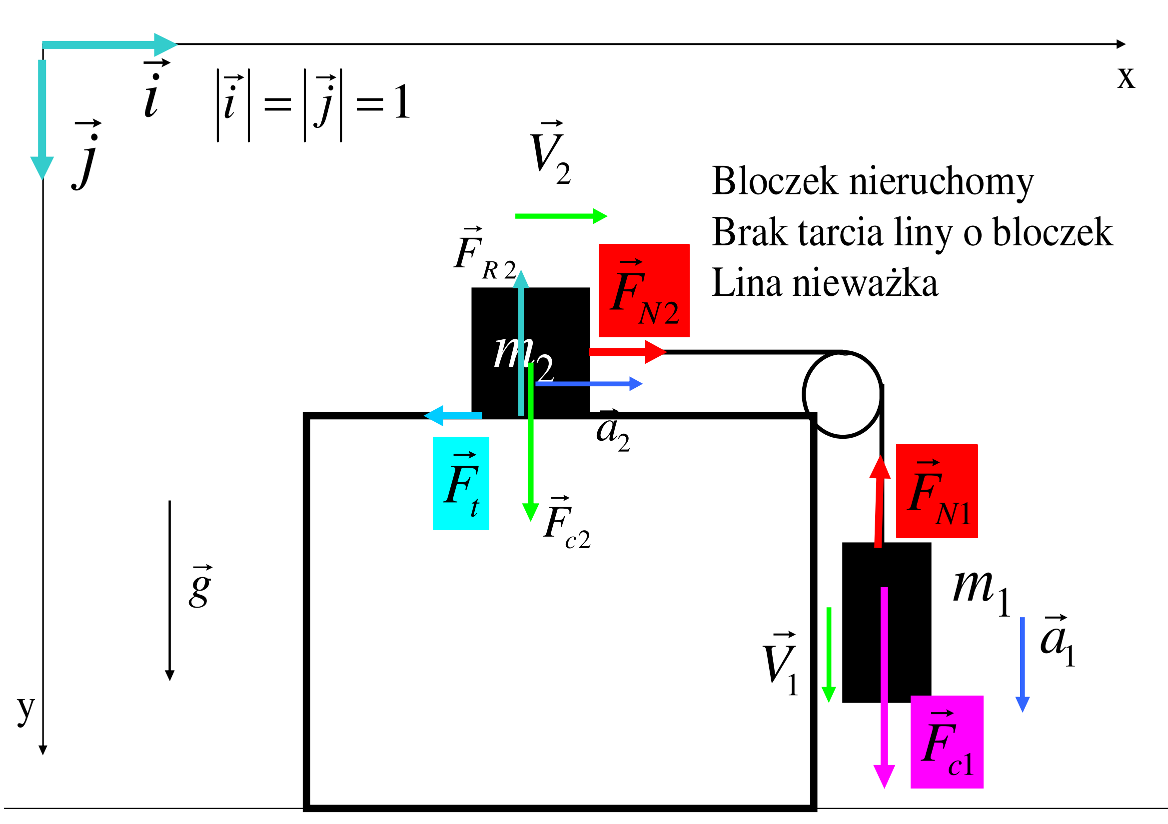
$$m_2 a = F_N - F_t$$

$$F_t = \mu m_2 g$$

$$a = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$F_N = m_2 a + F_t = \frac{m_1 m_2 g (1 + \mu)}{m_1 + m_2}$$

Inny zapis



$$\left|\vec{F}_{R2}\right| = F_{R2}, \left|\vec{F}_{c2}\right| = F_{c2} = m_2 g$$

$$\left|\vec{F}_t\right| = F_t, \left|\vec{F}_{c1}\right| = F_{c1} = m_1 g$$

Rozkład na składowe wektorów

$$\vec{a}_1 = a\vec{j} \Rightarrow a_{1x} = 0, a_{1y} = a$$

$$\vec{a}_2 = a\vec{i} \Rightarrow a_{2x} = a, a_{2y} = 0$$

$$\vec{F}_{N1} = -F_N \vec{j} \Rightarrow F_{N1x} = 0, F_{N1y} = -F_N$$

$$\vec{F}_{c1} = F_{c1}\vec{j} \Rightarrow F_{c1x} = 0, F_{c1y} = F_{c1}$$

$$\vec{F}_{N2} = F_N \vec{i} \Rightarrow F_{N2x} = F_N, F_{N2y} = 0$$

$$\vec{F}_{R2} = -F_{R2}\vec{j} \Rightarrow F_{R2x} = 0, F_{R2y} = -F_{R2}$$

$$\vec{F}_t = -F_t \vec{i} \Rightarrow F_{tx} = -F_t, F_{ty} = 0$$

$$\vec{F}_{c2} = F_{c2}\vec{j} \Rightarrow F_{c2x} = 0, F_{c2y} = F_{c2}$$

Z II zasady dynamiki Newtona

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{N1} \Rightarrow$$

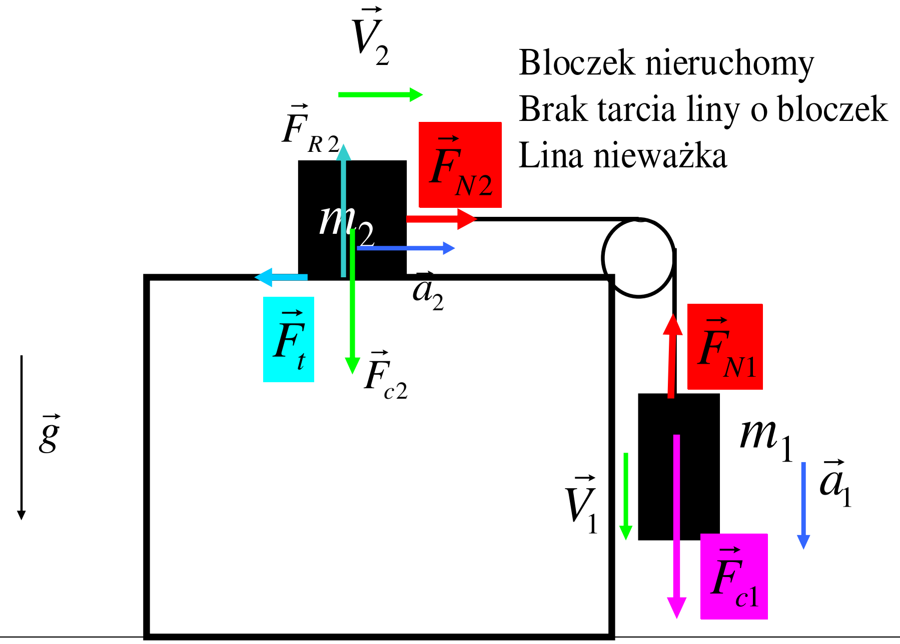
$$m_1 a_{1y} = F_{c1y} + F_{N1y} \Rightarrow m_1 a = m_1 g - F_N$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{t2} + \vec{F}_{R2} \Rightarrow$$

$$m_2 a_{2x} = F_{N2x} + F_{tx} + F_{c2x} + F_{R2x} \Rightarrow m_2 a = F_N - F_t$$

$$m_2 a_{2y} = F_{N2y} + F_{ty} + F_{c2y} + F_{R2y} \Rightarrow 0 = F_{c2} - F_{R2} \Rightarrow F_{c2} = F_{R2}$$

Gdyby ruch obu ciał nie zachodził w kierunkach wzajemnie prostopadłych to nie można by wprowadzić jednego układu opisującego wszystkie wektory a trzeba by wprowadzić oddzielne układy współrzędnych przy zapisie zasady II dynamiki dla każdego z ciał o dogodnym wyborze osi (np. jedna z osi równoległa do kierunku ruchu). Można tez uniknąć wprowadzenia układów współrzędnych dążąc np. do otrzymania równań wektorowych zawierających tylko wektory równoległe lub antyrównoległe do siebie



$$\vec{F}_{w2} = \vec{F}_{w2\perp} + \vec{F}_{w2\parallel}$$

$$\vec{F}_{w2\perp} = \vec{F}_{R2} + \vec{F}_{c2} \qquad \vec{F}_{w2\parallel} = \vec{F}_{t} + \vec{F}_{N2}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{w2} \Rightarrow$$

$$m_2\vec{a}_{2\parallel} = \vec{F}_{w2\parallel} \qquad m_2\vec{a}_{2\perp} = \vec{F}_{w2\perp}$$

$$\vec{a}_{2\perp} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{w2\parallel} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{R2} + \vec{F}_{c2} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{R2} = -\vec{F}_{c2} \Rightarrow \left|\vec{F}_{R2}\right| = \left|\vec{F}_{c2}\right| = m_2 g$$

$$m_2\vec{a}_{2\parallel} = m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_t$$

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{N1}$$

Jak przejść od równania wektorowego do skalarnego gdy wszystkie wektory stojące w równaniu są równoległe lub antyrównoległe do siebie?

Wyróżniamy jeden zwrot i wektory o tym zwrocie zastępujemy przez ich długości , a wektory o zwrocie przeciwnym przez ich długości pomnożone przez (-1)

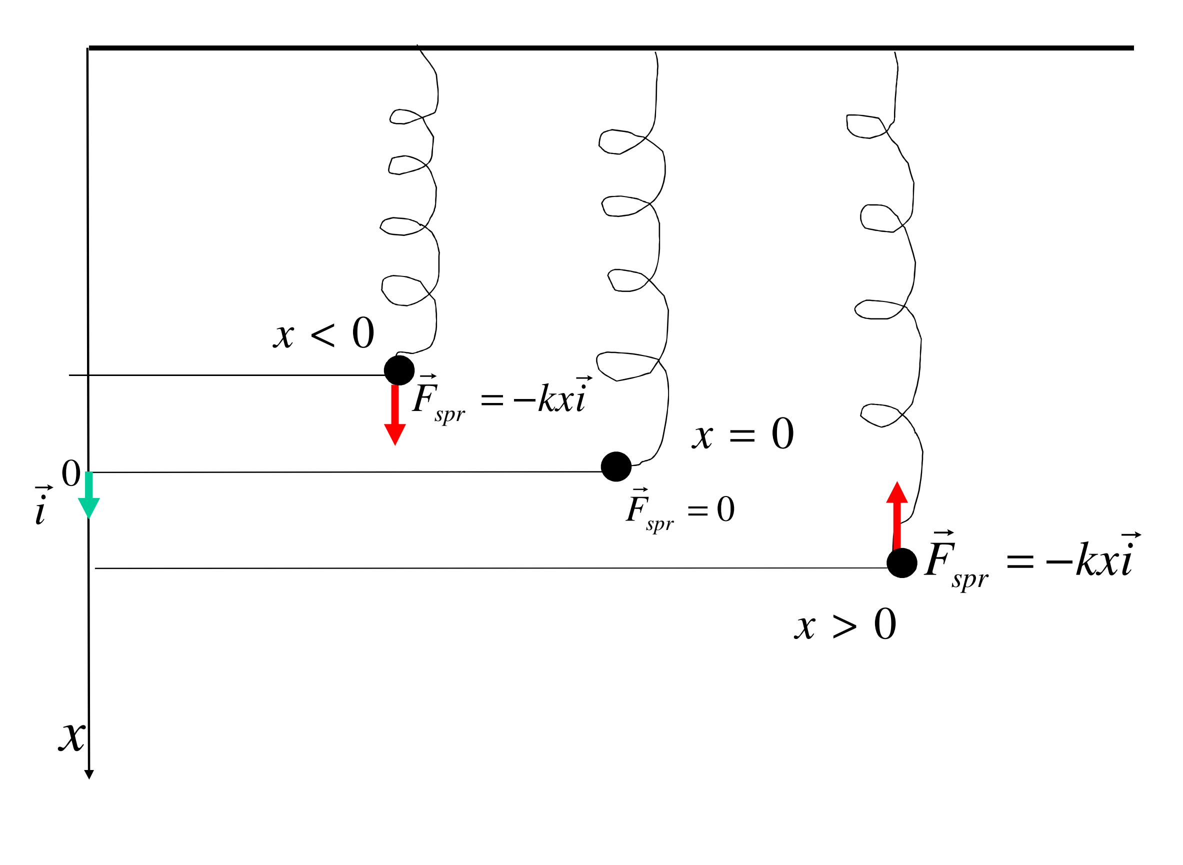
$$\left|\vec{F}_{N1}\right| = \left|\vec{F}_{N2}\right| = F_N$$

$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a$$

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{N1} \Rightarrow m_1\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{F}_{c1}\right| - \left|\vec{F}_{N1}\right| \Rightarrow \quad m_1 a = m_1 g - F_N$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_t \Rightarrow m_2 a = F_N - \left|\vec{F}_t\right|$$

Siła sprężystości



Według prawa Hooke'a jeżeli wydłużenie (skrócenie) sprężyny nie jest zbyt duże to wartość siły działającej na ciało umieszczone na końcu sprężyny jest proporcjonalna do wydłużenia (skrócenia) sprężyny, a jej zwrot jest skierowany w kierunku położenia równowagi końca sprężyny $\boxed{\vec{F}_{spr} = -kx\vec{i}}$ k-stała sprężystości

Przykłady wyróżnienia sił ze względu na rodzaj ruchu przez nie wywoływany

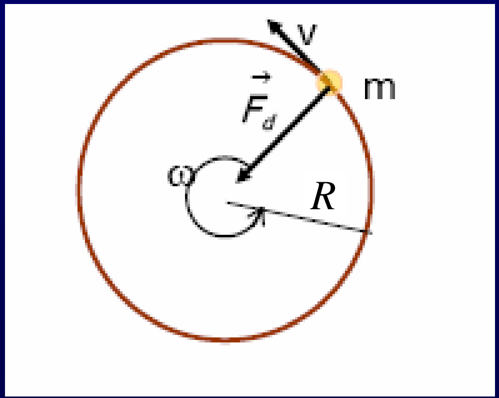
Siła dośrodkowa

Ciało poruszające się po okręgu o promieniu *R* z szybkością *V* doznaje przyspieszenia dośrodkowego o wartości

$$a_d = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki na ciało to działa siła dośrodkowa (skierowana do środka okręgu) o wartości

$$F_d = \left|\vec{F}_d\right| = m a_d = m\frac{V^2}{R} = m\omega^2 R$$



ω -prędkość kątowa, *m*-masa ciała

Pochodzenie tej siły zależy od analizowanego układu

Ruch ciała o masie *m* wokół nieruchomego ciała o masie *M>>m* (np. satelity wokół Ziemi) po orbicie kołowej

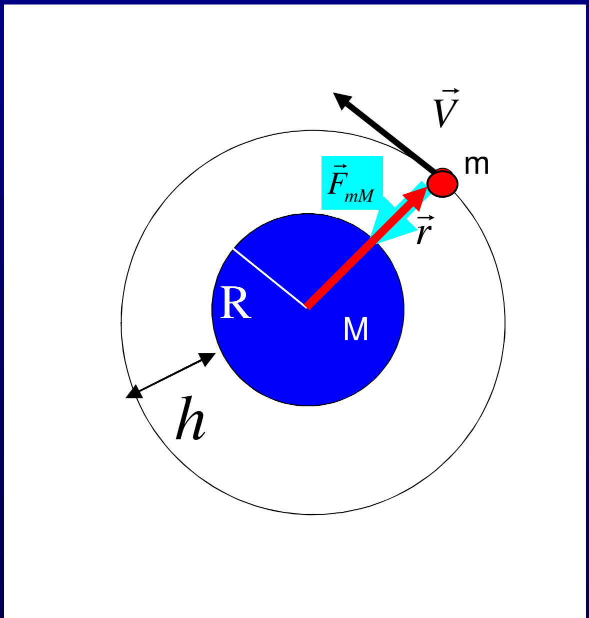
Siła grawitacyjna $\vec{F}_{mM} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ pełni rolę siły dośrodkowej.

$$\left|\vec{F}_d\right| = \left|\vec{F}_{mM}\right|$$

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$r = \left|\vec{r}\right| = R + h$$

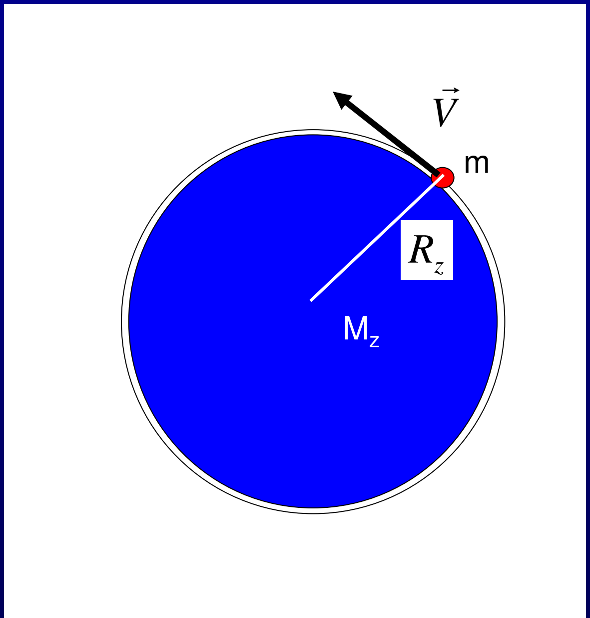


I prędkość kosmiczna

I prędkość kosmiczna (prędkość skierowana równolegle do powierzchni ziemi   jaką należy nadać ciału na powierzchni Ziemi w celu umieszczenia go na orbicie okołoziemskiej o promieniu *r* równym promieniowi ziemi $r=R_z=6371$ km)

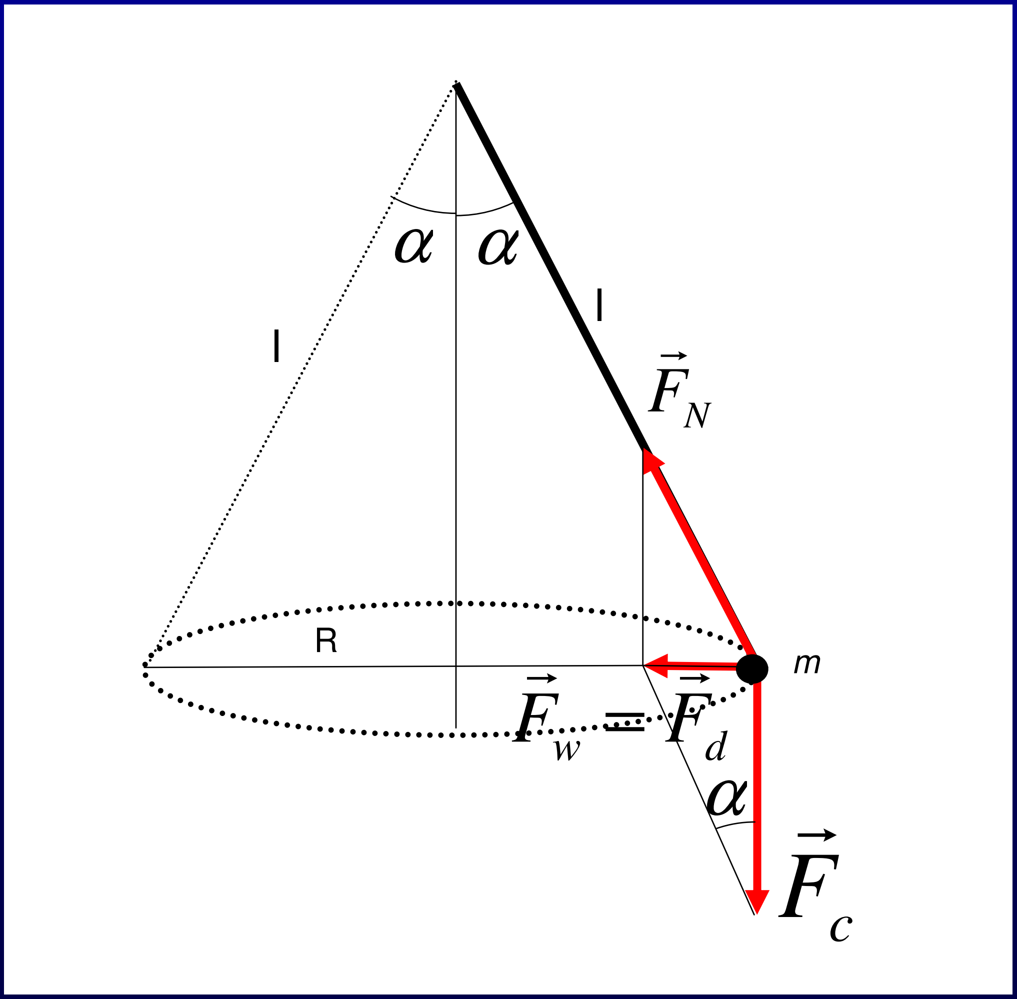
$$V_I = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}} = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z^2} R_z} = \sqrt{gR_z} \approx 7{,}9 km/s$$

$$g = \frac{GM_z}{R_z^2}$$



m –masa ciała poruszającego się wokół Ziemi
M_z-masa Ziemi, R_z- promień Ziemi
Gdy prędkość nadana ciału będzie mniejsza od V_I to ciało spadnie na Ziemie
Gdy ciału nadamy prędkość większą od pierwszej prędkości kosmicznej ale mniejszą od drugiej prędkości kosmicznej to będzie ono poruszało się wokół Ziemi po orbicie w kształcie elipsy.

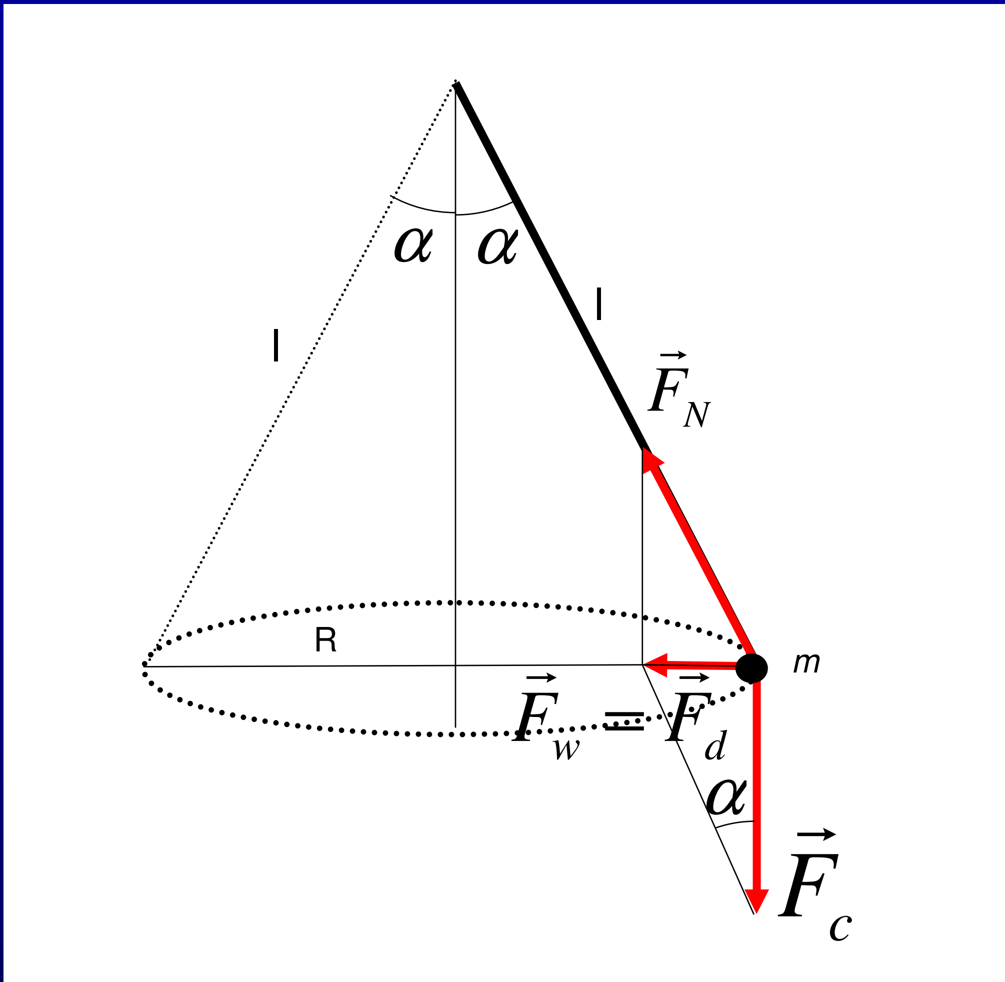
Przykład- wahadło stożkowe. Ciężarek zawieszony na nici o długości *l* obraca się po okręgu ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu R w płaszczyźnie poziomej. W czasie ruchu nić odchylona jest od pionu o kąt α.



Żeby ciężarek poruszał się po okręgu o promieniu *R* ze stałą prędkością o wartości *V* to siła wypadkowa będąca sumą wektorową siły ciężkości $\vec{F}_c$ i siły naciągu nici $\vec{F}_N$

$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_N$$

musi być równa sile dośrodkowej $\vec{F}_w = \vec{F}_d$ czyli być skierowana do środka okręgu i mieć wartość równą $F_w = F_d = \frac{mV^2}{R}$.



$$F_w = F_d = \frac{mV^2}{R} = \frac{mV^2}{l\sin(\alpha)}$$

$$V = \sqrt{\frac{F_d l \sin(\alpha)}{m}}$$

$$F_d = F_c tg(\alpha) = mgtg(\alpha)$$

$$V = \sqrt{\frac{mgtg(\alpha) l \sin(\alpha)}{m}} = \sin(\alpha)\sqrt{\frac{gl}{\cos(\alpha)}}$$

Okres ruchu (obiegu okręgu)

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi l \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)\sqrt{\frac{gl}{\cos(\alpha)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos(\alpha)}{g}} \overset{\alpha \to 0}{\approx} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

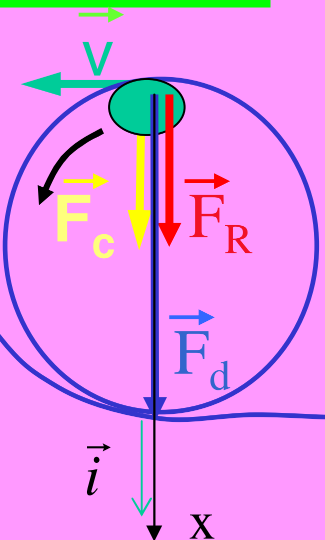
Przykład Pętla (analiza w układzie inercjalnym)

Jaka musi być prędkość, aby samochód wykonał pętlę o promieniu *R*?

$$\vec{F}_R + \vec{F}_c = \vec{F}_d \Rightarrow (F_R + F_c)\vec{i} = F_d\vec{i}$$

$$\Rightarrow F_R + mg = F_d \Rightarrow F_R = F_d - mg$$

Zwrot $\vec{F}_R$ zgodny z przyjętym zwrotem osi OX (wersora $\vec{i}$)



Gdy siła dośrodkowa $F_d > F_c$ to pojawia się siła reakcji podłoża $F_R = F_d - F_c$ skierowana do dołu. Siła ta nie może być zwrócona do góry czyli $F_R \geq 0$ skąd wynika warunek na minimalną szybkość V w najwyższym punkcie na torze ruchu. Szybkość ta musi być taka aby siła dośrodkowa była co najmniej równa sile ciężkości.

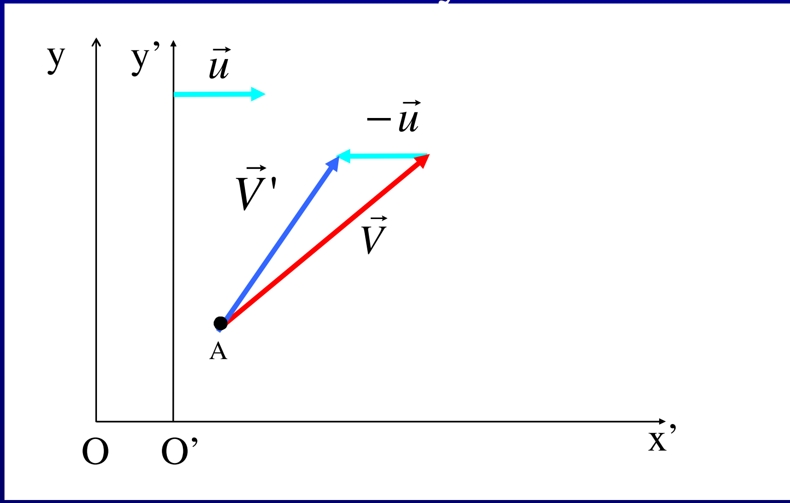
$$F_R \geq 0 \Rightarrow F_d \geq F_c \Rightarrow mV^2/R \geq mg \Rightarrow V \geq (gR)^{1/2}$$

Informacje dodatkowe (dla zainteresowanych)

Niezależność przyspieszenia od wyboru układu inercjalnego

Zakładamy iż każdy punkt nieruchomy w układzie O' porusza się w układzie O z prędkością $\vec{u}$ czyli układ O' porusza się względem układu O ruchem translacyjnym z prędkością $\vec{u}$. Jeżeli prędkość ciała w układzie inercjalnym O jest równa $\vec{V}$ to prędkość ciała w układzie O' możemy określić ze wzoru

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{u} \qquad (*)$$



Układ O' jest układem inercjalnym gdy $\vec{u}$ nie zależy od czasu a zatem $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$. Ze wzoru (*) wynika wówczas relacja wiążąca przyspieszenia ciała w obu układach

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$$

Wynika z niej niezależność przyspieszenia od wyboru układu inercjalnego, zapewniająca jednakową postać równań Newtona w wszystkich układach inercjalnych

Związki miedzy przyspieszeniem w układzie inercjalnym i nieinercjalnym. Siła bezwładności

W ogólnym przypadku przyspieszenie ciała w układzie inercjalnym $\vec{a}$ rożni się od przyspieszenia w układzie nieinercjalnym $\vec{a}'$ o wektor $\vec{a}_{un}$ zależny zarówno do położenia jak i prędkości tego ciała określonych w układzie nieinercjalnym

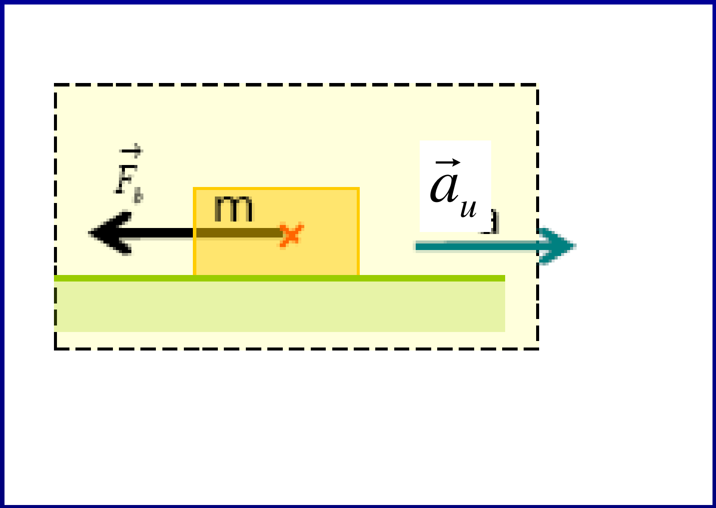
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{un}$$

Żeby relacje zachodząca w układzie inercjalnym $m\vec{a} = \vec{F}$
można było zapisać w układzie nieinercjalnym w postaci

$$m\vec{a}' = \vec{F}' \Leftrightarrow m(\vec{a} - \vec{a}_{un}) = \vec{F} + \vec{F}_b$$

to trzeba przyjąć iż na ciało działa siła bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_{un}$
Gdy wszystkie nieruchome punkty w układzie nieinercjalnym poruszają się w układzie inercjalnym z jednakowa prędkością $\vec{u}$ i przyspieszeniem $\vec{a}_{un} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}_u$ to wówczas siła bezładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_{un} = -m\vec{a}_u$ nie zależy od prędkości i położenia analizowanego ciała w układzie inercjalnym

Siły bezwładności w układzie nieinercjalnym poruszającym się ruchem translacyjnym



Jeżeli układ porusza się po linii prostej z przyspieszeniem $\vec{a}_u$ (dowolny punkt nieruchomy w tym układzie porusza się z tym przyspieszeniem) to na ciało o masie *m* znajdujące się w tym układzie działa siła bezwładności

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$$

w kierunku przeciwnym do kierunku wektora przyspieszenia. Doświadcza takiej siły np. człowiek znajdujący się w przyspieszającym lub hamującym autobusie poruszającym się po prostej.

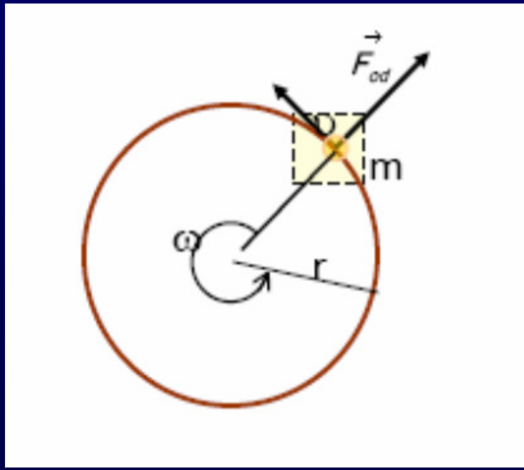
Siła odśrodkowa bezwładności

Szczególnym przypadkiem układu nieinercjalnego jest układ poruszający się ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową ω. Dowolny punkt nieruchomy w tym układzie porusza się po okręgu z przyspieszeniem dośrodkowym skierowanym do środka okręgu o wartości zależnej od odległości jego od środka okręgu, a Na ciało znajdujące się w układzie obracającym się działa siła odśrodkowa (bezwładności) o wartości

$$F_b = F_{od} = m\omega^2 r$$

Jest ona skierowana w kierunku przeciwnym do zwrotu wektora przyspieszenia dośrodkowego i zależy od odległości ciała od osi obrotu .

Ciało pozostające w spoczynku w układzie nieinercjalnym doświadcza ze siła odśrodkowa jest równoważona przez inną siłę, która w układzie inercjalnym pełni rolę siły dośrodkowej powodującej to że w układzie inercjalnym ciało porusza się po okręgu.



Pętla (analiza w układzie nieinercjalnym związanym z samochodem o prędkości kątowej $\omega=V/R$ w którym $F_{od}=mV^2/R$)

Jaka musi być minimalna prędkość, aby samochód wykonał pętlę o promieniu *R*?

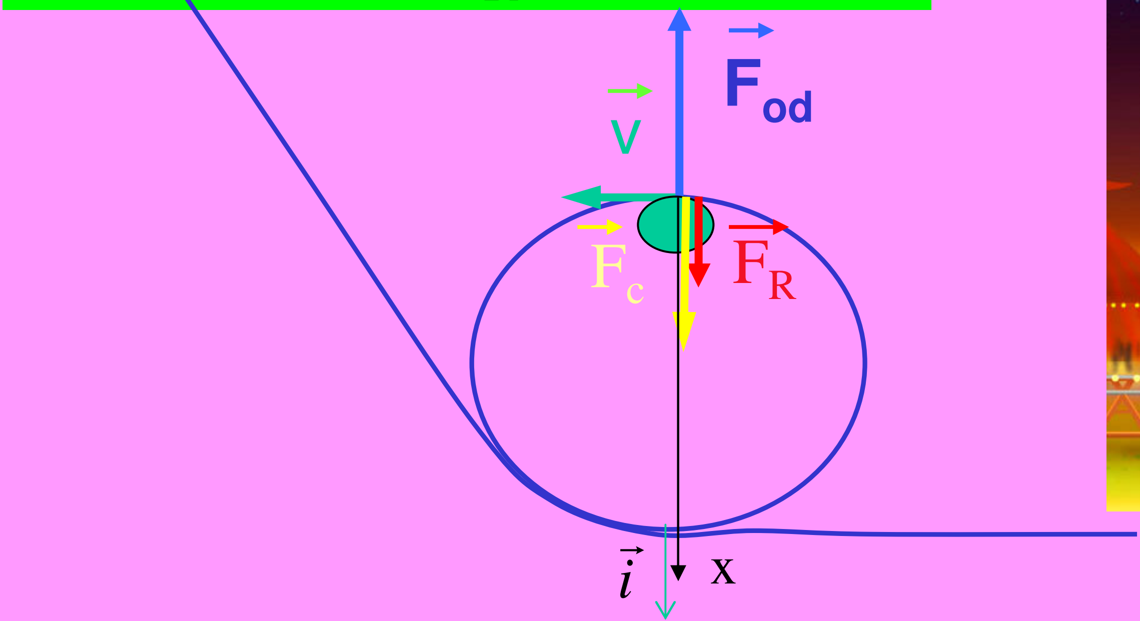
Prędkość musi być taka aby siła odśrodkowa co najmniej równoważyła siłę ciężkości

$$F_{od} \geq F_c \Rightarrow mV^2/R \geq mg \Rightarrow V \geq (gR)^{1/2}$$

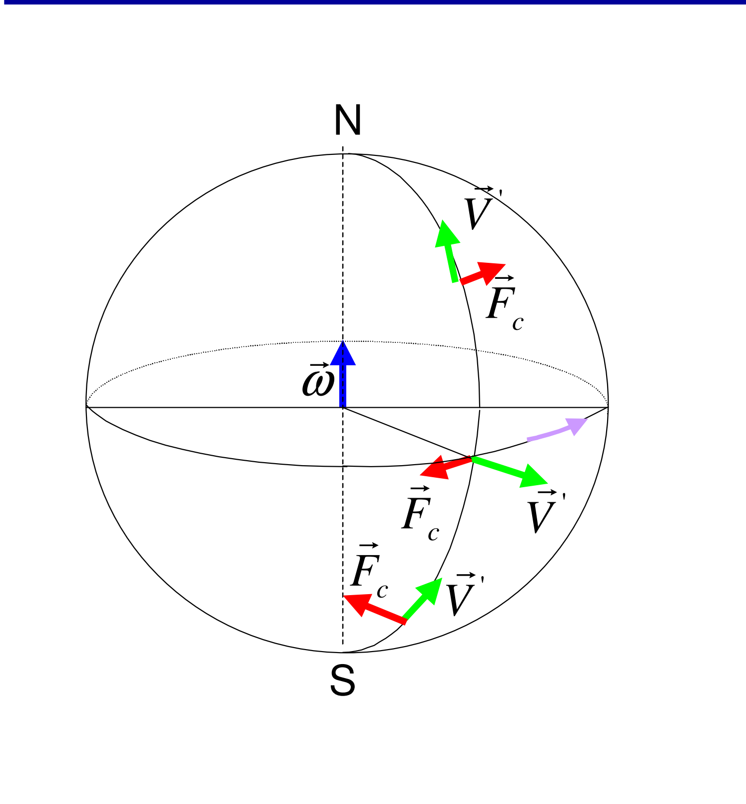
W najwyższym punkcie na pętli

$$\vec{F}_R + \vec{F}_c + \vec{F}_{od} = 0 \Rightarrow (F_R + F_c - F_{od})\vec{i} = 0$$

$$\Rightarrow F_R = F_{od} - F_c = \frac{mV^2}{R} - mg$$



Gdy siła odśrodkowa $F_{od}>F_c$ to pojawia się siła reakcji podłoża $F_R=F_{od}-F_c$ skierowana do dołu. Siła ta nie może być zwrócona do góry czyli $F_R \geq 0$ skąd wynika warunek na V



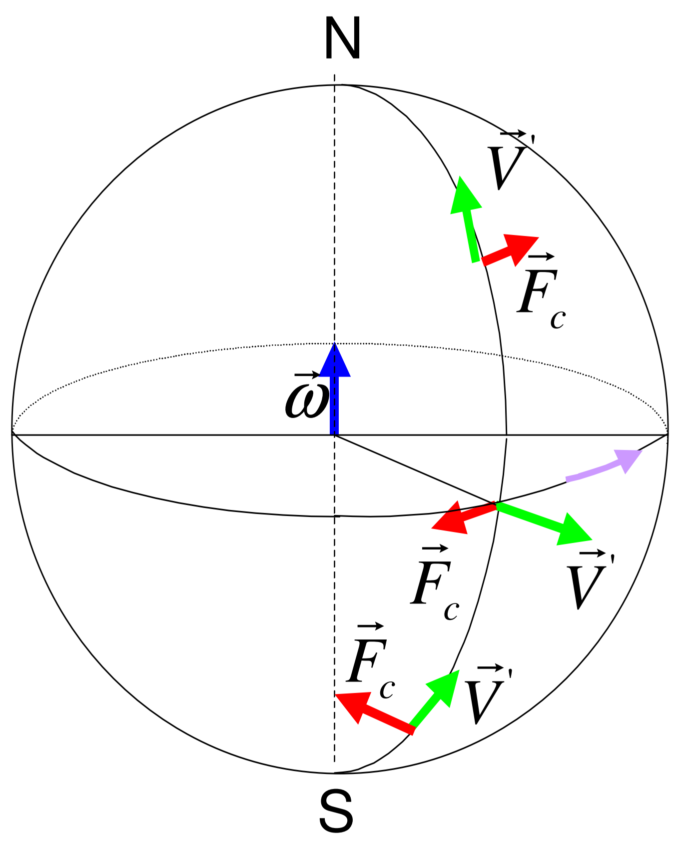
Siła Coriolisa

Na ciało o masie *m* poruszające się z prędkością $\vec{V}'$ w układzie obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ w kierunku nierównoległym do osi obrotu działa dodatkowo siła bezwładności Coriolisa

$$\vec{F}_c = 2m\vec{V}' \times \vec{\omega}$$

Przykładem układu w którym można zauważyć występowanie siły Coriolisa jest układ związany z Ziemią, która podlega ruchowi obrotowemu o prędkości kątowej $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 0{,}75 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

($T \approx 86400 s = 24 h$ okres ruchu obrotowego Ziemi).



Siła Coriolisa powoduje m.in. odchylenie toru ciał poruszających się stycznie do powierzchni Ziemi. Wartość składowej stycznej do powierzchni Ziemi siły Coriolisa zależy od szerokości geograficznej φ punktu na Ziemi, gdzie porusza się ciało i jest proporcjonalna do sin(φ). Siła ta jest skierowana w prawo w stosunku do kierunku ruchu ciała na półkuli północnej i w lewo na półkuli południowej. Siła ta powoduje także odchylenie od pionu w ruchu ciał poruszających się prostopadle do powierzchni ziemi. Ta siła jest proporcjonalna do cos(φ). Na równiku przy spadku z wysokości 100m odchylenie ciuła w kierunku wschodnim jest rzędu 2 cm.