

Drgania w obwodach elektrycznych

Obwody prądu zmiennego

W skład modelowego obwodu elektrycznego może wchodzić oprócz oporników i źródeł siły elektromotorycznej także cewki indukcyjne o pewnej indukcyjności (nie wpływające na przepływ prądu o stałym natężeniu) i kondensatory o pewnej pojemności.

Z cewką indukcyjną włączoną do obwodu przez który płynie prąd o zmiennym w czasie natężeniu I związana jest siła elektromotoryczna indukcji dana wzorem

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$$

gdzie L – indukcyjność cewki

Znak siły elektromotorycznej indukcji jest taki że przeciwdziała ona zmianie natężenia prądu. Gdy natężenie rośnie to gdyby nie było innych sił elektromotorycznych w obwodzie to siła elektromotoryczna indukcji wywołałaby przepływ w obwodzie prądu w przeciwnym kierunku niż kierunek płynącego prądu. Gdy natężenie prądu maleje wywoływałaby ona przepływ prądu w tym samym kierunku w jakim płynie prąd w obwodzie. Jej powstanie warunkowane jest zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej omawianym w ramach wykładu 11.

Nie jest możliwy przepływ prądu stałego o stałym natężeniu przez kondensator. Po podłączeniu go do źródła siły elektromotorycznej można obserwować tylko jego ładowanie się ładunkiem elektrycznym trwające efektywnie skończony czas zależny od indukcyjności i oporu obwodu, któremu towarzyszy przepływ prądu w przewodach dołączonych do okładek kondensatora. Przepływ prądu o malejącym w czasie natężeniu można obserwować także po połączeniu jego naładowanych okładek w trakcie rozładowania kondensatora.

W obwodzie w skład którego wchodzi kondensator jest możliwy przepływ prądu zmiennego. W obwodach w skład którego wchodzi cewka indukcyjna i kondensator można obserwować drgania elektryczne.

Drgania w obwodzie LC

Z II Prawa Kirchoffa

$$\varepsilon_i + U_c = 0$$

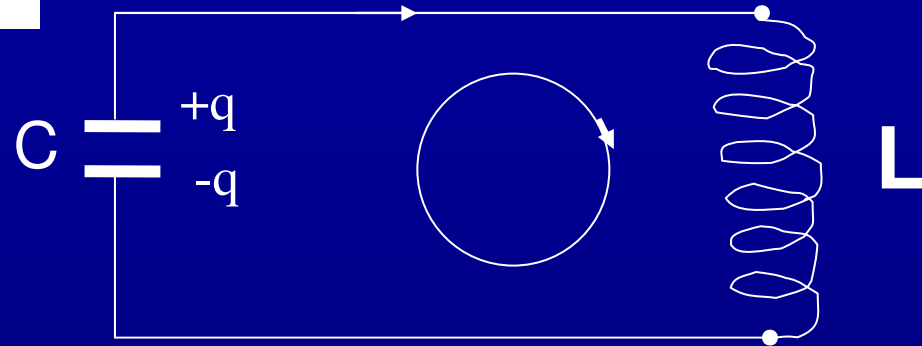
$I > 0$ gdy płynie w kierunku ruchu wskazówek zegara

$$U_c = \frac{q}{C}$$

-napięcie między
okładkami kondensatora

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$$



Otrzymaliśmy równanie różniczkowe

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Porównanie powyższego równania z równaniem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

opisującym wychylenie z położenia równowagi x oscylatora harmonicznego o masie m na który działa siła harmoniczna $\vec{F} = -kx\vec{i}$

wskazuje na jednakową postać powyższych równań przy zamianie

$$x \Leftrightarrow q$$

$$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$m \Leftrightarrow L$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

gdzie

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Zmiany w czasie ładunku zgromadzonego na kondensatorze w obwodzie LC opisywane są tą samą funkcją trygonometryczną co wychylenie ciała z położenia równowagi podczas drgań harmonicznym prostym. Drgania w obwodzie elektrycznym zachodzą z częstością kołową zależną od pojemności kondensatora i indukcyjności cewki. W czasie drgań następuje okresowe zmiany energii pola elektrycznego kondensatora równej $E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ na energie pola magnetycznego cewki równej $E = \frac{1}{2} LI^2$, przy czym suma tych energii jest stała i równa $E = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$.

Drgania tłumione w obwodzie RLC

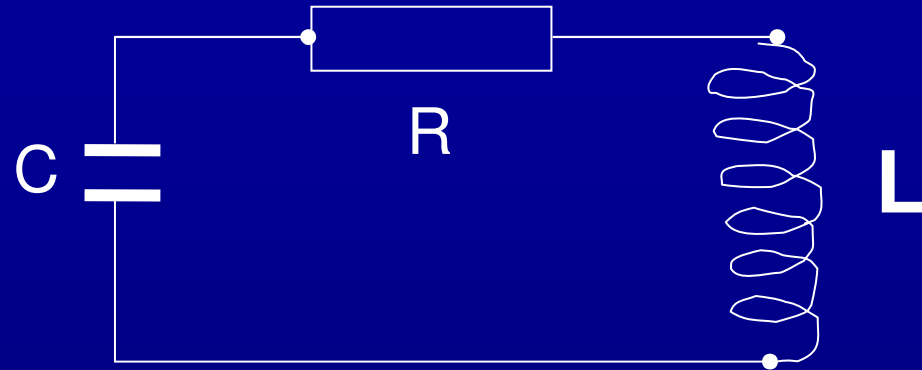
Z II Prawa Kirchoffa

$$\mathcal{E}_i + U_C - IR = 0$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2 q}{dt^2}$$



Otrzymaliśmy równanie różniczkowe

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Porównanie powyższego równania z równaniem

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

opisującym wychylenie z położenia równowagi x oscylatora harmonicznego o masie m na który działa siła harmoniczna $\vec{F} = -kx\vec{i}$ i oporów ruchu $\vec{F}_{op} = -b\vec{v}$ wskazuje na jednakową postać powyższych równań przy zamianie

$$x \Leftrightarrow q$$

$$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$m \Leftrightarrow L$$

$$b \Leftrightarrow R$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Gdy $\beta = \frac{b}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x = A \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Gdy $\beta = \frac{R}{2L} < \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$$q = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi_0)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

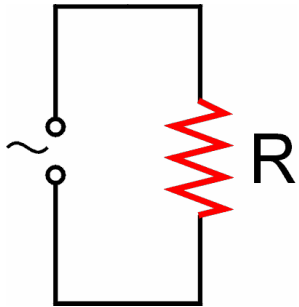
Zmiany w czasie ładunku zgromadzonego na kondensatorze w obwodzie RLC opisywane są tą samą funkcją co wychylenie z położenia równowagi oscylatora harmonicznego na który działa dodatkowa siła tłumiąca.

Gdy opór jest nieduży obserwujemy harmoniczne drgania tłumione, przy czym suma energii pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego cewki maleje w czasie.

Obwody prądu zmiennego

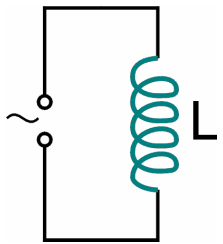
Zmienna w czasie siła elektromotoryczna $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t)$

Natężenie prądu zmiennego płynącego w obwodzie $I = I_m \sin(\omega t - \varphi)$



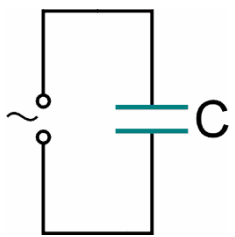
$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{R} \quad \varphi = 0$$

Natężenie prądu płynącego przez opornik jest w fazie z napięciem wymuszającym (maksimum natężenia odpowiada maksimum napięcia), zatem faza $\varphi = 0$



$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\chi_L} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$
$$\chi_L = \omega L$$

χ_L -reaktancja cewki. Natężenie opóźnia się względem napięcia wymuszającego o $\pi/2$.

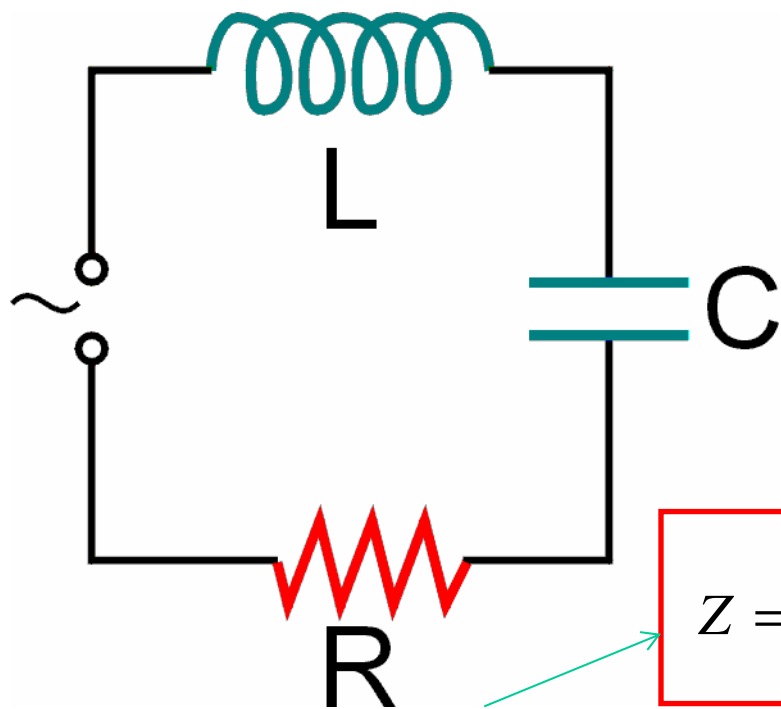


$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\chi_C} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$
$$\chi_C = \frac{1}{\omega C}$$

χ_C -reaktancja kondensatora. Natężenie wyprzedza napięcie wymuszające o $\pi/2$.

Zmienna w czasie siła elektromotoryczna

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t)$$



Natężenie prądu zmiennego płynącego w obwodzie $I = I_m \sin(\omega t - \varphi)$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\chi_L - \chi_C}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

zawada

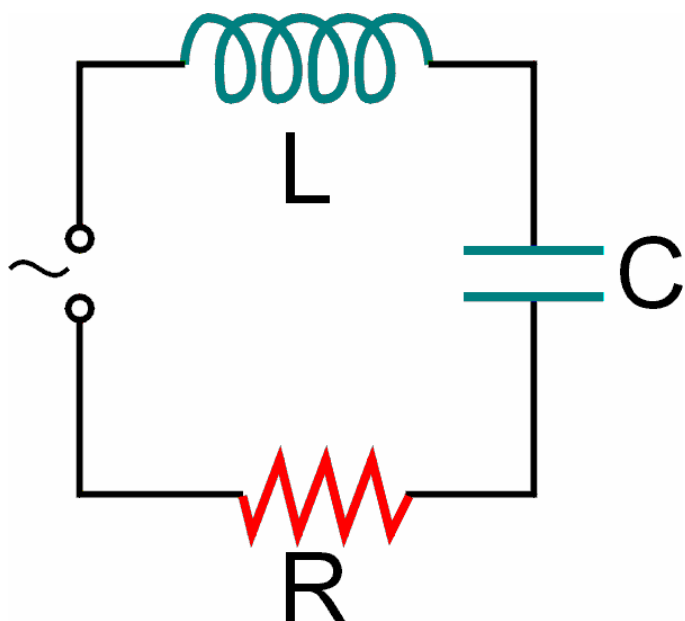
$$\chi_L = \omega L$$

$$\chi_C = \frac{1}{\omega C}$$

Gdy częstość zmian napięcia jest taka iż $\chi_L = \chi_C \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$

to zmiany prądu zachodzą w tej samej fazie co zmiany napięcia a wartość prądu jest maksymalna

$$I = I_{m,\max} = \frac{\varepsilon_m}{R}$$



Moc chwilowa wydzielana na oporniku

$$P = I^2 R = I_m^2 R \sin^2(\omega t - \varphi)$$

$$\text{Średnia po czasie } \langle \sin^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

Średnia moc wydzielana na oporniku

$$P_{sr} = I_m^2 R \langle \sin^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R = I_{sk}^2 R$$

$$I_{sk} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- natężenie skuteczne prądu zmiennego

$$\text{Ponadto } P_{sr} = I_{sk}^2 R = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m I_{sk} R = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_m}{Z} I_{sk} R = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} I_{sk} \frac{R}{Z} = U_{sk} I_{sk} \cos(\varphi)$$

$$U_{sk} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- napięcie skuteczne prądu zmiennego

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi_l - \chi_c}{R} \right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\chi_l - \chi_c)^2}} = \frac{R}{Z}$$