

VD

Zadanie 1. Elektron o ładunku $e < 0$ i masie m porusza się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego opisanego potencjałem wektorowym $\vec{A} = [0, 0, By]$ gdzie B -stała, y -kowa składowa wektora wodzącego elektronu.

- 1) Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$.
- 2) Znaleźć funkcję Lagrange'a przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie kartezjańskim.
- 3) Znaleźć pędy uogólnione oraz funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Które z pędów uogólnionych są stałymi (całkami) ruchu?
- 4) Pokazać iż w przypadku gdy ruch elektronu jest ograniczony do płaszczyzny $x=0$ to funkcje Hamiltona można przedstawić jak dla jednowymiarowego oscylatora

harmonicznego: $H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_k)^2$ gdzie $\omega_c = \frac{|e|B}{m}$, y_k -stała.

Zadanie 2. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni walca o równaniu $x^2 + y^2 = R^2$ pod działaniem siły proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ ($k > 0$) oraz siły ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$.

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Napisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

Zadanie 3. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej, drgającej powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca równy w chwili początkowej ρ_0 zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

$$\rho(t) = \rho_0 + A \sin(\omega t) \quad (\rho_0, A, \omega = \text{const})$$

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Napisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

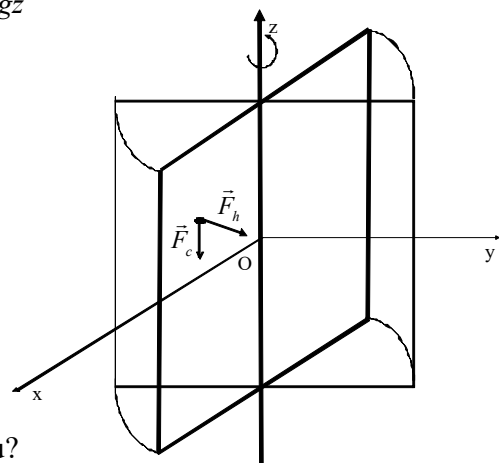
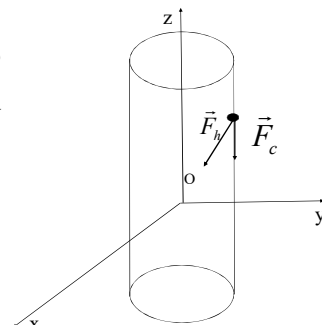
Odp. (częściowa) $H = \frac{p_\phi^2}{2m(\rho_0 + A \sin(\omega t))^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + mgz$

Zadanie 4. Pionowo ustawiona, gładka płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz , która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Wiadomo, iż w chwili $t=0$ oś Ox leżała na obracającej się płaszczyźnie. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego k -znana dodatnia stała.

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Zapisać równania Hamiltona.

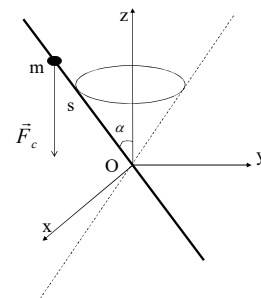
Odp. (częściowa) $H(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 + mgz + \frac{k}{2} (\rho^2 + z^2)$

Zadanie 5. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni kuli o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Na ciało działają jednocześnie siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego k -znana dodatnia stała.



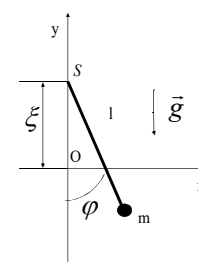
- 1) Znaleźć funkcje Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Zapisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

Zadanie 6. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinającą oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia punkt materialny o masie m . Na punkt działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równanie ruchu Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Można przyjąć, iż w chwili początkowej ruchu prosta leżała w płaszczyźnie $y=0$.



Zadanie 7.

- 1) Znaleźć funkcje Hamiltona opisującą wahadło matematyczne o długości l i masie m poruszające się pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej pionowej w taki sposób, iż jego położenie na osi pionowej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2} A t^2$ (A -stała). Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .



- 2) Zapisać równanie Hamiltona.

Odp. (częściowa)
$$H(\varphi, p_\varphi, t) = \frac{m l^2}{2} \left[\frac{p_\varphi}{m l^2} - \frac{A \sin(\varphi) t}{l} \right]^2 - \frac{m}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{2} m g A t^2 - m g l \cos(\varphi)$$

Zadanie 8.

- 1) Znaleźć funkcje Hamiltona opisującą wahadło matematyczne o długości l i masie m poruszające się pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

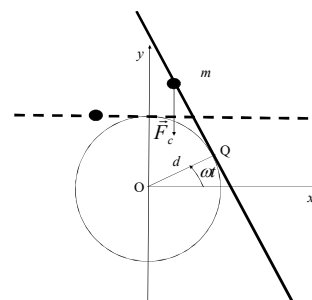
a) $\xi = A \sin(\Omega t)$ (A, Ω -stałe) b) $\xi = \frac{1}{2} A t^2$ (A -stała).

Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

- 2) Zapisać równanie Hamiltona.

Zadanie 9. W płaszczyźnie pionowej leży gładka prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi d , przy czym w chwili początkowej $t=0$ prosta była położona równolegle do osi Oy. Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $\vec{F}_c = (0, -mg)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?



Odp. (częściowa)
$$H = \frac{p_s^2}{2m} - p_s \omega d - \frac{m}{2} \omega^2 s^2 + m g d \sin(\omega t) + m g s \cos(\omega t)$$