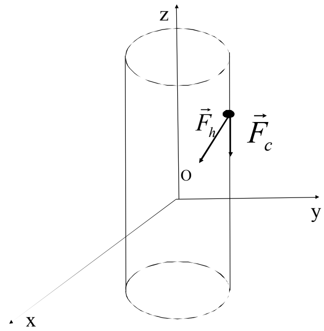
VD

Zadanie 1. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni walca o równaniu $x^2 + y^2 = R^2$ pod działaniem siły proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ (k>0) oraz siły ciężkości $\vec{F}_c = (0,0,-mg)$.



1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?

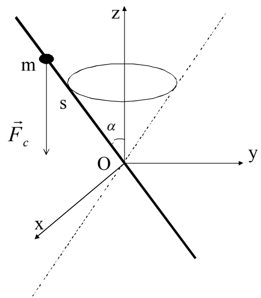
2) Napisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

Zadanie 2. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0,0,-mg)$ po gładkiej, drgającej powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca równy w chwili początkowej ρ_0 zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\rho(t) = \rho_0 + A\sin(\omega t)$ ($\rho_0, A, \omega = const$)

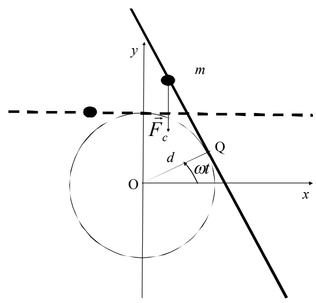
1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?

2) Napisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

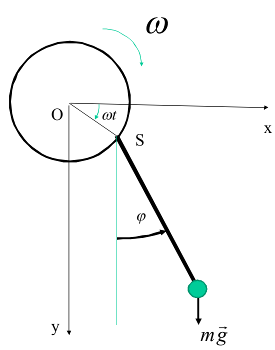
Zadanie 3. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia punkt materialny o masie m. Na punkt działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $F_c = (0,0,-mg)$ gdzie g-wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równanie ruchu Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Można przyjąć, iż w chwili początkowej ruchu prosta leżała w płaszczyźnie y=0.



Zadanie 4. W płaszczyźnie pionowej leży gładka prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi d, przy czym w chwili początkowej t=0 prosta była położona równolegle do osi Oy. Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m. Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $F_c = (0,0,-mg)$ gdzie g-wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?



Zadanie 5. Znaleźć funkcje Hamiltona dla wahadła matematycznego o długości l i masie m, którego punkt zawieszenia S porusza się po okręgu o promieniu R ze stała prędkością kątową o wartości ω w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Zapisać równania Hamiltona. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



Odp. (częściowa)

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + \frac{R\omega\sin(\omega t + \varphi)}{l} p_\varphi - \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) - mg(R\sin(\omega t) + l\cos(\varphi))$$

Zadanie 6. Zbadać przy pomocy formalizmu opartego na równaniach Lagrange'a II rodzaju ruch ciała o masie m i ładunku $q>0$ w jednorodnym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż osi Oz. Założyć, iż w chwili początkowej $\vec{r}(t=0) = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\dot{\vec{r}}(t=0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$

Wsk. Przy rozwiązywaniu układu równań różniczkowych opisujących ruch w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola wprowadzić zmienną pomocniczą: $\xi = x + iy \quad (i = \sqrt{-1})$, pozwalającą na sprowadzenie tych równań do jednego równania różniczkowego.

Odp. $x = x_s + \rho\cos(\omega t - \varphi_0) \quad y = y_s - \rho\sin(\omega t - \varphi_0) \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t$

gdzie $\omega = \dfrac{qB}{m}$, $\sin(\varphi_0) = \dfrac{\dot{x}_0}{\rho\omega}$, $\cos(\varphi_0) = -\dfrac{\dot{y}_0}{\rho\omega}$, $\rho = \dfrac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega}$, $x_s = x_0 + \dfrac{\dot{y}_0}{\omega}$, $y_s = y_0 - \dfrac{\dot{x}_0}{\omega}$

Zadanie 7. Znaleźć funkcje Lagrange'a, pędy uogólnione oraz funkcje Hamiltona dla naładowanego ładunkiem q izotropowego oscylatora harmonicznego o masie m poruszającego się w jednorodnym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż osi Oz $\vec{B} = [0,0,B]$ (B-stała) opisanym potencjałem wektorowym $\vec{A} = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne opisujące położenie oscylatora w układzie kartezjańskim. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Zapisać równania Hamiltona dla analizowanego oscylatora. Wiadomo iż wypadkowa siła działającą na rozważany oscylator ma postać $\vec{F} = -k\vec{r} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ (k-znana stała dodatnia).

Zadanie 8. Znaleźć funkcje Lagrange'a i Hamiltona dla układu złożonego z ciał o masach m_1 oraz m_2 oddziaływujących za pomocą sił centralnych o potencjale $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\dfrac{\alpha}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$. Za współrzędne uogólnione przyjąć składowe w układzie kartezjańskim wektora $\vec{r}_M = (x_M, y_M, z_M)$ opisującego położenie środka masy układu ciał oraz składowe wektora opisującego położenie ciała drugiego względem pierwszego $\vec{r}_\mu = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ w układzie cylindrycznym z osią Oz prostopadłą do płaszczyzny ruchu względnego z=0 (lub w układzie biegunowym wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu względnego). Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Zapisać równania Hamiltona. Które z pędów uogólnionych są stałymi ruchu?

Zadanie. 9. Cząstka o masie m jest opisywana funkcją Hamiltona o postaci:

$$H(x, p_x, p_y, p_z) = \frac{p^2}{2m} - Fx = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - Fx$$

gdzie: F-stała, m-masa cząstki, p^2 –kwadrat pędu cząstki.

1) Określić nawias Poissona (L_x, H) gdzie L_x -rzut momentu pędu cząstki na oś Ox.
2) Czy wielkość L_x jest stałą ruchu?

Zadanie 10. Wykorzystując poniższe relacje zapisane z wykorzystaniem nawiasów Poissona

$$(q_j, p_n) = \delta_{jn}, \quad (q_j, q_n) = 0, \quad (p_j, p_n) = 0, \quad \delta_{jn} = \begin{cases} 1 & gdy \quad j = n \\ 0 & gdy \quad j \neq n \end{cases}, \text{ j,n=1,2,3; (1=x,2=y,3=z)}$$

gdzie q_l oraz p_l oznaczają sprzężone kanonicznie ze sobą współrzędne i pędy uogólnione,

pokazać, że przy potraktowaniu składowych wektora wodzącego cząstki za współrzędne uogólnione a odpowiednich składowych wektora pędu tej cząstki za pędy uogólnione, zachodzą poniższe relacje zapisane przy wykorzystaniu nawiasów Poissona:

a) $(x, L_x) = 0 \qquad (x, L_y) = z \qquad (x, L_z) = -y$

$(y, L_x) = -z \qquad (y, L_y) = 0 \qquad (y, L_z) = x$

$(z, L_x) = y \qquad (z, L_y) = -x \qquad (z, L_z) = 0$

b) $(p_x, L_x) = 0 \qquad (p_x, L_y) = p_z \qquad (p_x, L_z) = -p_y$

$(p_y, L_x) = -p_z \qquad (p_y, L_y) = 0 \qquad (p_y, L_z) = p_x$

$(p_z, L_x) = p_y$ $\qquad$ $(p_z, L_y) = -p_x$ $\qquad$ $(p_z, L_z) = 0$

c) $(L_x, L_y) = L_z$ $\qquad$ $(L_y, L_z) = L_x$ $\qquad$ $(L_z, L_x) = L_y$

gdzie p_x, p_y, p_z są składowymi wektora pędu, x, y, z składowymi wektora wodzącego, zaś L_x, L_y, L_z składowymi wektora momentu pędu w układzie kartezjańskim.

Zadanie 11. Sprawdzić, przy wykorzystaniu nawiasów Poissona, że podane niżej przekształcenie jest przekształceniem kanonicznym

$Q = q\sin u - p\cos u$, $\qquad$ $P = q\cos u + p\sin u$ $\qquad$ (u-stała)

Znaleźć funkcje tworzące $W(q,Q)$, $S(q,P)$, $F_3(Q,p)$, $F_4(p,P)$ dla tego przekształcenia.

Wsk. $p = \frac{\partial W(q,Q)}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial W(q,Q)}{\partial Q}$, $p = \frac{\partial S(q,P)}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial S(q,P)}{\partial P}$, $q = -\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial p}$, $P = -\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial Q}$, $q = -\frac{\partial F_4(p,P)}{\partial p}$, $Q = \frac{\partial F_4(p,P)}{\partial P}$

Zadanie 12. Sprawdzić, przy wykorzystaniu nawiasów Poissona, że podane niżej przekształcenie jest przekształceniem kanonicznym

$Q = 2q + p$, $\qquad$ $P = p + q$

Znaleźć funkcje tworzące $W(q,Q)$, $S(q,P)$, $F_3(Q,p)$, $F_4(p,P)$ dla tego przekształcenia.

Wsk. $p = \frac{\partial W(q,Q)}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial W(q,Q)}{\partial Q}$, $p = \frac{\partial S(q,P)}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial S(q,P)}{\partial P}$, $q = -\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial p}$, $P = -\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial Q}$, $q = -\frac{\partial F_4(p,P)}{\partial p}$, $Q = \frac{\partial F_4(p,P)}{\partial P}$

Odp. (częściowa) $W = -q^2 - \frac{1}{2}Q^2 + Qq$, $\quad S = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}P^2 + Pq$, $\quad F_3 = -\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}Qp$,

$F_4 = \frac{1}{2}p^2 + P^2 - pP$

Zadanie 13. Znając funkcję tworzącą $S(q,P) = q^2 e^P$ przekształcenia kanonicznego: $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$ znaleźć funkcję tworzącą $W(Q,q)$.

Zadanie 14. Sprawdzić przy wykorzystaniu nawiasów Poissona, że przekształcenie dane wzorami:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\left(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2\right) \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2\right) \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}\left(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2\right)$$

jest przekształceniem kanonicznym.

1) Wyznaczyć w nowych zmiennych funkcję Hamiltona $\overline{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ oraz równania Hamiltona dla cząstki o ładunku q i masie m poruszającej się w płaszczyźnie $z=0$ w polu magnetycznym opisanym potencjałem wektorowym: $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$. Przyjąć, że $\omega = \frac{qB}{m}$.
2) Wyznaczyć otrzymane równania i znaleźć ruch cząstki w wyjściowych zmiennych. Zinterpretować sens stałych pojawiających się w równaniach opisujących ruch cząstki.

Wsk Jeżeli przekształcenie $q = q(Q,P,t); p = p(Q,P,t)$ jest przekształceniem kanonicznym to również przekształcenie odwrotne $Q = Q(q,p,t); P = P(q,p,t)$ jest przekształceniem kanonicznym.