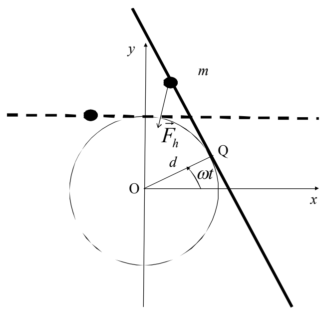
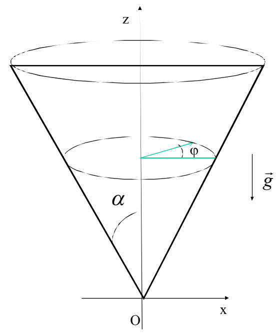
V

Zadanie 1. W płaszczyźnie poziomej leży gładka prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi d, przy czym w chwili początkowej t=0 prosta była położona równolegle do osi Oy. Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m. Na ciało działa siła skierowana w kierunku początku układu współrzędnych o wartości proporcjonalnej do odległości ciała od początku układu współrzędnych $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ (k-znana dodatnia stała). Nie uwzględniamy wpływu siły ciężkości na ruch ciała. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? *Wsk.* Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć s-współrzędną określającą aktualne położenie ciała względem punktu Q leżącego na prostej, po której odbywa się ruch.



Zadanie 2. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości po powierzchni bocznej stożka, zwróconego wierzchołkiem w dół. Wiadomo, iż kąt między osią symetrii stożka Oz a tworzącą stożka wynosi α. Stożek znajduje się w polu siły ciężkości działającej pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.
Znaleźć funkcję Hamiltona i napisać równania (kanoniczne) Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Czy można znaleźć współrzędną uogólnioną dla której pęd uogólniony związany z tą współrzędną jest stałą ruchu?



Zadanie 3. Elektron o ładunku $e<0$ i masie m porusza się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego opisanego potencjałem wektorowym $\vec{A} = [-By, 0, 0]$ gdzie B-stała, y-kowa składowa wektora wodzącego elektronu.

1) Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$.
2) Znaleźć funkcje Lagrange'a i zapisać równania Lagrange'a II rodzaju, przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie kartezjańskim.
3) Znaleźć pędy uogólnione oraz funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Które z pędów uogólnionych są stałymi (całkami) ruchu?
4) Pokazać iż w przypadku gdy ruch elektronu jest ograniczony do płaszczyzny z=0 to funkcje Hamiltona można przedstawić jak dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego: $H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (y - y_k)^2$ gdzie $\omega_c = \frac{|e|B}{m}$, y_k -stała.

Zadanie 4. Cząstka na ruch której nie nałożono żadnych więzów jest opisywana funkcją Hamiltona o postaci:

$$H(x, p_x, p_y, p_z) = \frac{p^2}{2m} - Fx = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - Fx$$

gdzie: F-stała, m-masa cząstki, p_x, p_y, p_z są składowymi wektora pędu, x oznacza x-ową składową wektora wodzącego cząstki.

1) Określić nawias Poissona (L_y, H) gdzie L_y -rzut momentu pędu cząstki na oś Oy.
2) Czy wielkość L_y jest stałą ruchu?

Zadanie 5. Wiadomo, iż funkcja Hamiltona ma postać pewnej skalarnej funkcji położenia i pędu cząstki tzn. zachodzi $H = f(r^2, p^2, \vec{r} \cdot \vec{p})$ gdzie $r^2 = x^2 + y^2 + z^2, p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, $\vec{r} \cdot \vec{p} = xp_x + yp_y + zp_z$. Pokazać, iż składowe momentu pędu cząstki L_x, L_y, L_z są stałymi ruchu. *Wsk.* Znaleźć nawiasy Poissona $(L_x, H), (L_y, H), (L_z, H)$.

Zadanie 6.

1) Dla jakich wartości parametrów α i γ poniżej określone przekształcenie współrzędnej $q \to Q$ i pędu $p \to P$ jest przekształceniem kanonicznym?

$Q = p^\alpha \sin(\gamma q)$ $\qquad\qquad$ $P = p^\alpha \cos(\gamma q)$

2) Znaleźć funkcje tworzącą $W(q, Q)$ oraz $S(q, P)$ dla tego przekształcenia.

Zadanie 7. Sprawdzić, przy wykorzystaniu nawiasów Poissona, że podane niżej przekształcenie współrzędnej $q \to Q$ i pędu $p \to P$ jest przekształceniem kanonicznym.

$Q = q\cos u + p\sin u$, $P = -q\sin u + p\cos u$ (u-stała)

Znaleźć funkcje tworzącą $W(q,Q)$ dla tego przekształcenia.

Zadanie 8. Funkcja Hamiltona układu ma postać: $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - Fq$

gdzie q-współrzędna uogólniona, p-pęd uogólniony

1) Zapisać tą funkcje w nowych zmiennych Q, P powiązanych ze zmiennymi q, p przekształceniem kanonicznym, którego funkcja tworząca $W(q,Q)$ ma postać:

$$W(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega\left[q - \frac{F}{m\omega^2}\right]^2 ctgQ$$

2) Zapisać równania Hamiltona w nowych zmiennych i je rozwiązać.

3) Korzystając z przekształceń kanonicznych znaleźć zależności $q(t), p(t)$.

Zadanie 9. Wykorzystując definicje nawiasu Poissona pokazać, że prawdziwe są poniższe relacje zapisane dla nawiasów Poissona:

a) $(AB,C) = A(B,C) + (A,C)B$ *b)* $\frac{\partial}{\partial t}(A,B) = \left(\frac{\partial A}{\partial t}, B\right) + \left(A, \frac{\partial B}{\partial t}\right)$

gdzie *A,B* są funkcjami współrzędnych uogólnionych, pędów uogólnionych i czasu.

Zadanie 10. Wykorzystując poniższe relacje zapisane z wykorzystaniem nawiasów Poissona

$(q_j, p_n) = \delta_{jn}$, $(q_j, q_n) = 0$, $(p_j, p_n) = 0$, $\delta_{jn} = \begin{Bmatrix} 1 & gdy & j = n \\ 0 & gdy & j \neq n \end{Bmatrix}$, *j,n=1,2,3; (1=x,2=y,3=z)*

gdzie q_l oraz p_l oznaczają sprzężone kanonicznie ze sobą współrzędne i pędy uogólnione, pokazać, że przy potraktowaniu składowych wektora wodzącego cząstki za współrzędne uogólnione a odpowiednich składowych wektora pędu tej cząstki za pędy uogólnione, zachodzą poniższe relacje zapisane przy wykorzystaniu nawiasów Poissona:

a) $(x, L_y) = z$ b) $(p_x, L_z) = -p_y$

gdzie L_y oznacza y-kową składową wektora momentu pędu tej cząstki w układzie kartezjańskim, zaś L_z oznacza z-ową składową wektora momentu pędu tej cząstki w układzie kartezjańskim.

Zadanie 11. Znaleźć przy pomocy równania Hamiltona-Jacobiego ruch ciała w jednorodnym polu siły ciężkości o potencjale: $V(z) = mgz$.

Zadanie 12. Mamy nić o długości *l,* której jeden koniec jest zaczepiony w początku układu współrzędnych O a drugi jej koniec leży w punkcie P położonym na osi Ox. Pokazać iż pole między nicią o osią Ox ma maksymalną powierzchnię wówczas gdy nić ta leży wzdłuż wycinka okręgu przechodzącego przez punkty O i P o środku leżącym na osi Ox.

Wsk.

1) Pokazać iż powierzchnię szukanego pola można wyrazić jako funkcjonał $I[y]$ *o postaci:*

$I[y] = \int_0^l F(y,y')ds$ *gdzie* $F(y,y') = \sqrt{y^2\left[1-(y')^2\right]}$, $y = y(s)$ $y' = \frac{dy}{ds}$, *s-odległość mierzona wzdłuż nici od początku układu współrzędnych do dowolnego punktu na nici o współrzędnych (x,y). Wykorzystać to iż* $(dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2 \to dx = \pm ds\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$.

2) Pokazać, iż wówczas, gdy funkcja $F(y,y')$ *nie zależy explicite od s, to poszukiwanie rozwiązania równania:* $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F(y,y')}{\partial y} = 0$ *można zastąpić poszukiwaniem rozwiązania równania* $y'\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} - F(y,y') = b$ *gdzie* $y' = \frac{dy}{ds}$, *b=stała.*

3) *Pokazać iż szukana powierzchnia osiąga wartość maksymalną gdy zachodzi*

$$\frac{y^2}{1-(y')^2} = b^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{ds} = \pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \Leftrightarrow x = \pm b\left[1-\cos\left(\frac{s}{b}\right)\right], y = \pm b\sin\left(\frac{s}{b}\right)$$

przy czym $b = \frac{l}{\pi}$ *określa promień okręgu.*