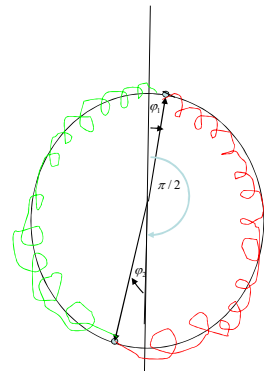


IVD

Zadanie 1. Dwa ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych m mogą poruszać się po okręgu koła o promieniu R . Każde z ciał jest połączone z drugim ciałem na okręgu przy pomocy dwóch sprężyn o stałej sprężystości k leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. W stanie równowagi ciała znajdują się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.



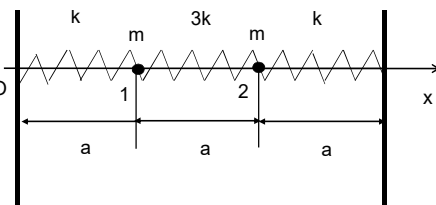
- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
- 2) Znaleźć częstość (częstości) małych drgań układu.
- *3) Znaleźć związek między przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie.
- 4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie.

Wsk. Wielkość wychylenia ciała z położenia równowagi można przybliżyć przez długość odpowiedniego wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości działających na ciała znajdujące się na końcu sprężyny o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współrzędne uogólnione można przyjąć kąty φ_1 oraz φ_2 pokazane na rysunku.

Odp. (częściowa do punktu 2) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

(częściowa do punktu 3) $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2mR}}(u_1 + u_2)$, $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2mR}}(u_1 - u_2)$

Zadanie 2. Dwa punkty materialne o tej samej masie równej m mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Współczynnik sprężystości sprężyny łączącej punkty materialne ze sobą jest równy $3k$, podczas gdy współczynnik sprężystości sprężyn łączących punkty materialne z końcami pręta jest równy k . Długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a .

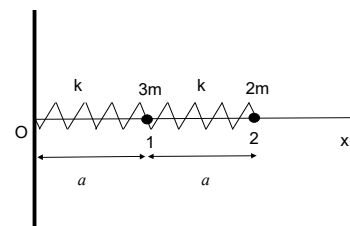


- 1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ znaleźć funkcję Lagrange'a (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).
- 2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu.

Odp. (częściowa) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{7\frac{k}{m}}$

Zadanie 3. Rozważyć układ złożony z 2 punktów materialnych o masach równych $3m$ i $2m$ odpowiednio połączonych ze sobą oraz z jednej strony ze ścianą przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości k (rysunek obok).

W stanie równowagi pokazanym na rysunku długości wszystkich sprężyn są równe a i na punkty materialne nie działa żadna siła. Punkty materialne mogą poruszać się tylko po linii prostej prostopadłej do ściany.

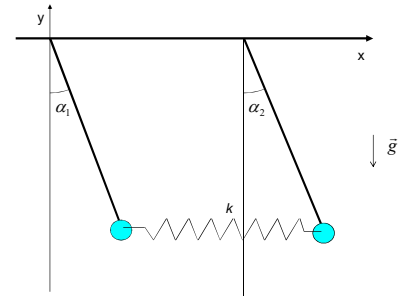


Wydłużenie lub skrócenie dowolnej sprężyny wywołuje powstanie siły sprężystości spełniającej prawo Hooke'a.

Wyznaczyć częstości kołowe drgań układu oraz znaleźć ogólne rozwiązanie opisujące zależność od czasu położenia drgających punktów w trakcie ich ruchu.

Odp. (częściowa) $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{k}{m}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Zadanie 4. Dwa wahadła matematyczne o jednakowych masach równych m i jednakowych długościach równych l połączono sprężyną stałej sprężystości k . Zakładamy iż wtedy gdy oba wahadła zwisają pionowo to sprężyna nie jest ściśnięta ani rozciągnięta. W trakcie ruchu wahadeł siła sprężystości spełnia zawsze prawo Hooke'a. Ponadto wychylenia wahadeł od pionu są niewielkie w trakcie ruchu. Znamy wartość przyspieszenia ziemskiego g .



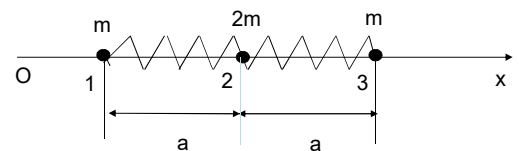
Znaleźć częstości kołowe małych drgań rozważanego układu oraz określić postać zależności od czasu współrzędnych uogólnionych $\alpha_1(t)$ oraz $\alpha_2(t)$ określających wychylenie wahadeł od położenia równowagi w przybliżeniu małych drgań.

Wsk. Wzór na energię potencjalną zapisać wzorem przybliżonym pomijając wyrazy proporcjonalne do $\alpha_1^m \alpha_2^n$ gdy $m+n > 2$. Uwzględnić wkłady do energii potencjalnej związane z siłą sprężystości oraz ciężkości. Pokazać iż wkład do energii potencjalnej związanej z siłą sprężystości równy $V = \frac{k}{2} \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - d \right)^2$ (d – długość sprężyny gdy oba wahadła

zwisają pionowo do dołu) można przybliżyć wzorem $V = \frac{kl^2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2$

Odp. (częściowa) $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$,

Zadanie 5. Trzy punkty materialne mogą poruszać się po poziomej prostej. Punkty te połączone są między sobą za pomocą 2 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k , zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy nie jest ona naprężona jest równa a . Masa środkowego punktu materialnego jest równa $2m$, zaś masy pozostałych punktów są jednakowe i równe m .



1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wielkości $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 - a$ oraz $q_3 = x_3 - 2a$ (x_i – składowa x -owa wektora wodzącego i -tego ciała) znaleźć funkcję Lagrange'a.

2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań układu.

*3) Znaleźć zależność między współrzędnymi uogólnionymi q_1, q_2, q_3 a współrzędnymi normalnymi u_1, u_2, u_3 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych.

Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych i je rozwiązać.

4) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2, q_3 w trakcie ruchu.

Odp. (częściowa do punktu 2) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$