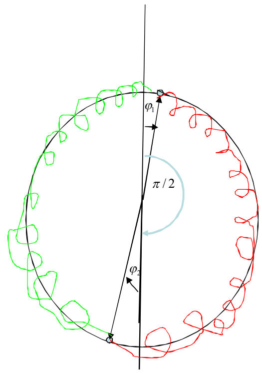
IVD

Zadanie 1. Dwa ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych *m* mogą poruszać się po okręgu koła o promieniu *R*. Każde z ciał jest połączone z drugim ciałem na okręgu przy pomocy dwóch sprężynek o stałej sprężystości leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. W stanie równowagi ciała znajdują się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.

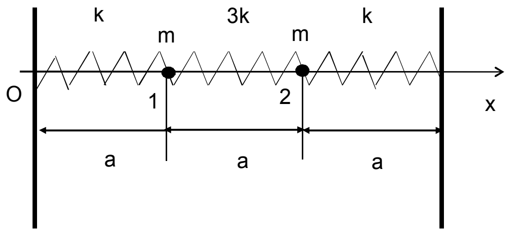


1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
2) Znaleźć częstość (częstości) małych drgań układu.
3) Znaleźć związek miedzy przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie.
4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie.

Wsk. Wielkość wychylenia ciała z położenia równowagi można przybliżyć przez długość odpowiedniego wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości działających na ciała znajdujące się na końcu sprężyny o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współrzędne uogólnione można przyjąć kąty φ_1 oraz φ_1 pokazane na rysunku.

Odp. (częściowa do punktu 2) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{4k}{m}}$

Zadanie 2. Dwa punkty materialne o tej samej masie równej *m* mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Współczynnik sprężystości sprężyny łączącej punkty materialne ze sobą jest równy *3k,* podczas gdy współczynnik sprężystości sprężyn łączących punkty materialne z końcami pręta jest równy *k*. Długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a .

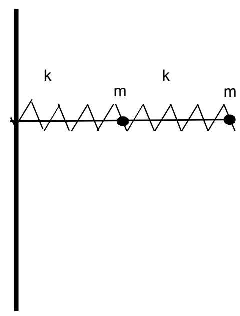


1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ znaleźć funkcję Lagrange'a (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).

2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu.

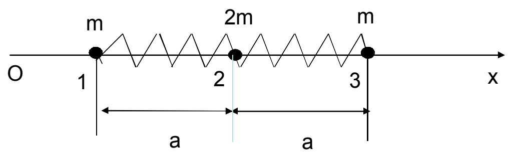
3) Znaleźć związek między współrzędnymi q_1, q_2 a współrzędnymi normalnymi u_1 oraz u_2 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych u_1 oraz u_2.

Zadanie 3. Rozważyć układ złożony z 2 punktów materialnych o jednakowych masach równych *m* połączonych ze sobą oraz z jednej strony ze ścianą przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości *k*. Punkty materialne mogą poruszać się tylko w kierunku **prostopadłym** do ściany. W stanie równowagi pokazanym na rysunku długości wszystkich sprężyn są jednakowe i na punkty materialne nie działa żadna siła. Wydłużenie lub skrócenie dowolnej sprężyny wywołuje powstanie siły sprężystości spełniającej prawo Hooke'a.



Wyznaczyć częstości kołowe drgań układu oraz znaleźć ogólne rozwiązanie opisujące zależność od czasu położeń drgających punktów w trakcie ich ruchu.

Zadanie 4. Trzy punkty materialne mogą poruszać się po poziomej prostej. Punkty te połączone są między sobą za pomocą 2 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k, zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy nie jest ona naprężona jest równa a. Masa środkowego punktu materialnego jest równa $2m$, zaś masy pozostałych punktów są jednakowe i równe m.

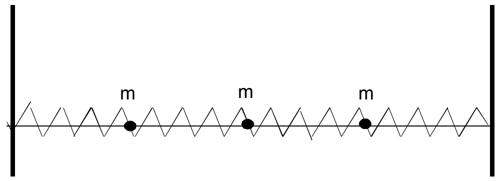


1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wielkości $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 - a$ oraz $q_3 = x_3 - 2a$ (x_i–składowa x-owa wektora wodzącego i-tego ciała) znaleźć funkcję Lagrange'a.

2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań układu.

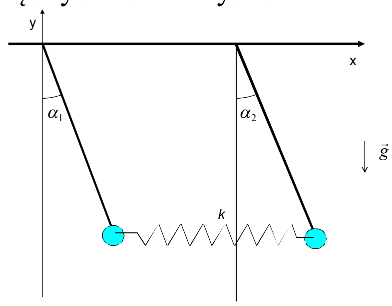
3) Znaleźć zależność między współrzędnymi uogólnionymi q_1, q_2, q_3 a współrzędnymi normalnymi u_1, u_2, u_3 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych. Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych i je rozwiązać.

***Zadanie 5.** Rozważyć układ złożony z 3 punktów materialnych o jednakowych masach równych m połączonych ze sobą oraz nieruchomymi ścianami przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości k. W stanie równowagi pokazanym na rysunku długości wszystkich sprężyn są jednakowe i na punkty materialne nie działa żadna siła. Wydłużenie lub skrócenie dowolnej sprężyny wywołuje powstanie siły sprężystości spełniającej prawo Hooke'a. Zakładamy iż punkty materialne mogą poruszać się tylko w kierunku prostopadłym do ściany.



1) Znaleźć funkcje Lagrange'a układu przyjmując za współrzędne uogólnione wychylenie punktów z położenia równowagi.
2) Znaleźć możliwe częstości drgań własnych tego układu, zapisać ogólne rozwiązanie równań Lagrange'a II rodzaju oraz przedyskutować ruch ciał odpowiadający drganiom o znalezionych częstościach.
3) Znaleźć związek miedzy przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych.

Zadanie 6. Dwa wahadła matematyczne o jednakowych masach równych m i jednakowych długościach równych l połączono sprężyną o stałej sprężystości k. Zakładamy iż wtedy gdy oba wahadła zwisają pionowo to sprężyna nie jest ściśnięta ani rozciągnięta. W trakcie ruchu wahadeł siła sprężystości spełnia zawsze prawo Hooke'a. Ponadto wychylenia wahadeł od pionu są niewielkie w trakcie ruchu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



1) Znaleźć częstości kołowe małych drgań rozważanego układu oraz określić postać zależności od czasu współrzędnych uogólnionych $\alpha_1(t)$ oraz $\alpha_2(t)$ określających wychylenie wahadeł od położenia równowagi w przybliżeniu małych drgań.
2) Znaleźć zależność między współrzędnymi α_1 oraz α_2 a współrzędnymi normalnymi i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych.

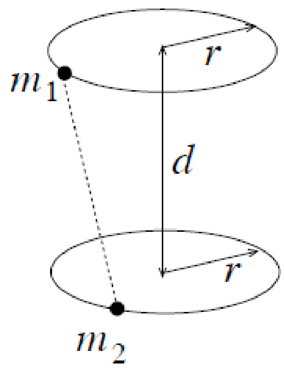
Wsk. Wzór na energie potencjalną zapisać wzorem przybliżonym pomijając wyrazy proporcjonalne do $\alpha_1^m \alpha_2^n$ gdy $m+n>2$. Uwzględnić wkłady do energii potencjalnej związane z siłą sprężystości oraz ciężkości. Pokazać iż wkład do energii potencjalnej związanej z siłą sprężystości równy $V=\frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}-d\right)^2$ (d-długość sprężyny gdy oba wahadła zwisają pionowo do dołu) można przybliżyć wzorem $V=\frac{kl^2}{2}(\alpha_2-\alpha_1)^2$

***Zadanie 7.** Po dwóch gładkich, poziomych okręgach o promieniu r, o środkach położonych na wspólnej prostej pionowej w odległości d, poruszają się dwa ciała (punkty materialne) o masach m_1 oraz m_2 pod wpływem siły przyciągającej wprost proporcjonalnej do odległości tych ciał od siebie.

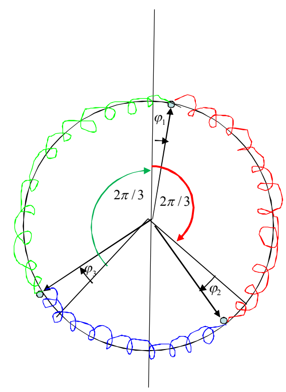
1) Znaleźć funkcje Lagrange'a i wyznaczyć ściśle równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch tych ciał przyjmując za współrzędne uogólnione wybrane współrzędne określające położenie każdego z ciał w cylindrycznym układzie z osia Oz prostopadła do płaszczyzny okręgów.

Wsk. Liczba współrzędnych uogólnionych równa jest 2 (jedna współrzędna określa położenie pierwszego ciała a druga drugiego)

2) Wyznaczyć wspólną częstość małych drgań obu ciał wokół punktów leżących na okręgach w których odległość między ciałami jest minimalna. Opisać zachowanie się punktów materialnych gdy w chwili początkowej oba ciała spoczywały i odległość między nimi była bliska minimalnej odległości między nimi.



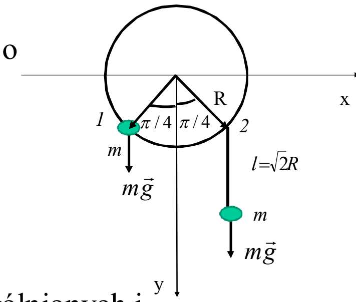
***Zadanie 8.** Trzy ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych m mogą poruszać się po okręgu koła o promieniu R. Każde z ciał jest połączone ze swoimi sąsiadami na okręgu przy pomocy sprężynek o stałej sprężystości k leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. W stanie równowagi ciała znajdują się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.



1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
2) Znaleźć częstość (częstości) małych drgań układu.
3) Znaleźć związek miedzy przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie.
4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie.

Wsk. Wielkość wychylenia ciała z położenia równowagi można przybliżyć przez długość odpowiedniego wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości działających na ciała znajdujące się na końcu sprężyny o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współrzędne uogólnione można przyjąć kąty φ_1, φ_2 oraz φ_3 pokazane na rysunku.

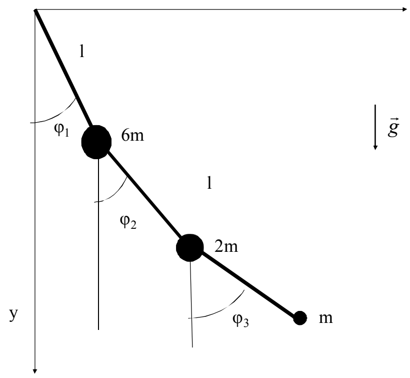
***Zadanie 9.** Z punktem 1 znajdującym się po okręgu o promieniu R powiązano ciało o masie m. Wektor wodzący tego punktu tworzy w trakcie ruchu stały kąt równy $\pi/2$ z drugim punktem, o pomijalnie małej masie. Do tego punktu doczepiono nić o długości $l=\sqrt{2}R$ na końcu której zwisa ciało o masie równe również m (rysunek obok). Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g. Za współrzędne uogólnione przyjąć takie wielkości które mogą opisywać jednoznacznie dowolne połażenie układu zgodne z więzami i przyjmują wartość równa zeru w położeniu równowagi pokazanym na rysunku.



1) Znaleźć energię kinetyczną i potencjalną układu jako funkcje współrzędnych uogólnionych i ich pochodnych po czasie w przybliżeniu małych drgań .
2) Wyznaczyć częstości kołowe małych drgań układu. Określić ogólną postać zależności od czasu współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie.
3) Znaleźć związek miedzy przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych.

***Zadanie 10.**

Rozważyć wahadło potrójne złożone z trzech ciał traktowanych jako punkty materialne zawieszonych na nieważkich, nierozciągliwych niciach o jednakowych długościach.



Pierwsza z nici (na końcu której znajduje się ciało o masie $6m$) umocowana jest w nieruchomym początku układu współrzędnych, zaś druga na końcu której znajduje się ciało o masie $2m$ zamocowana jest do ciała o masie $6m$. Ostatnia nic na końcu którego znajduje się ciało o masie m zamocowana jest do ciała o masie *2m.* Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół. Znaleźć częstości małych drgań opisanego wyżej wahadła potrójnego i określić związek współrzędnych normalnych z kątami $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

Wsk. Jedna z częstości jest równa $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$