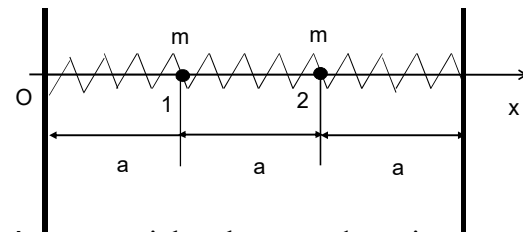


IV

Zadanie 1. Dwa punkty materialne o tej samej masie równej m mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k , zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a .



Przyjmujemy za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).

- 1) Pokazać iż energię kinetyczną układu można przedstawić wzorem

$$T = \frac{1}{2} (M_{11} \dot{q}_1^2 + M_{22} \dot{q}_2^2 + M_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + M_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1) \text{ gdzie } M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21} \text{ - stałe, } M_{12} = M_{21}.$$

Znaleźć wartości stałych $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ (niektóre z nich mogą być równe zero).

- 2) Znaleźć energię potencjalną układu jako funkcję współrzędnych uogólnionych q_1, q_2 . Pokazać iż energia ta przyjmuje wartość minimalną gdy $q_1 = q_2 = 0$ oraz to iż można ją przedstawić wzorem:

$$V = \frac{1}{2} (K_{11} q_1^2 + K_{22} q_2^2 + K_{12} q_1 q_2 + K_{21} q_2 q_1) + const$$

gdzie $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$ - stałe, $K_{12} = K_{21}$.

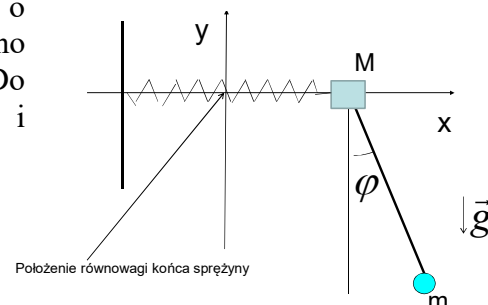
Znaleźć wartości stałych $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}, const$.

- 3) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu.
- 4) Znaleźć współrzędne normalne u_1 oraz u_2 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych u_1 oraz u_2 oraz ich pochodnych po czasie. (do samodzielnej analizy rozwiązania)

Zadanie 2. Ciało o masie M jest dołączone do sprężyny o współczynniku sprężystości k , której drugi koniec jest sztywno umocowany. Może ono poruszać się bez tarcia po poziomej prostej. Do ciała tego jest przyczepione wahadło matematyczne o masie m i długości l . Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wyznaczyć częstości kołowe małych drgań układu.

Wsk. Jako współrzędne uogólnione q_1, q_2 można przyjąć x-ową składową wektora wodzącego ciała o masie M oraz kąt φ jaki tworzy nić wahadła z pionem.



Energię potencjalną układu trzeba stosując odpowiednie przybliżenia zapisać w postaci

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f K_{kl} q_k q_l + const \text{ gdzie } f \text{ - liczba stopni swobody, } q_k, q_l \text{ - współrzędne uogólnione, } K_{kl}$$

stałe takie iż $K_{kl} = K_{lk}$, a ponadto energia ta winna osiągać minimum wtedy gdy wszystkie współrzędne uogólnione przyjmują wartość równą zero.

Energię kinetyczną układu trzeba w przybliżeniu zapisać w postaci $T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$ gdzie M_{kl}

stałe takie iż $M_{kl} = M_{lk}$.