

III D

Zadanie 1. Punkt materialny o masie m porusza się po gładkiej krzywej opisanej równaniami parametrycznymi: $x(\varphi) = b \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = b \sin(\varphi)$, $z(\varphi) = a\varphi$ w których a, b to dodatnie stałe. Na punkt działa siła $\vec{F} = (-kx, -ky, -kz - mg)$ gdzie k -stała dodatnia, g -wartość przyspieszenia ziemskiego.

1) Wyznaczyć, przy pomocy równania Lagrange'a II rodzaju, ruch punktu materialnego przy następujących warunkach początkowych ruchu: $z(t=0) = 0$, $\dot{z}(t=0) = 0$.

2) Znaleźć uogólnioną energię G . Czy jest on całką ruchu?

Odp. (częściowa do punktu 2) $G = \frac{m}{2}(a^2 + b^2)\dot{\varphi}^2 + mga\varphi + \frac{1}{2}ka^2\varphi^2 + const$

Zadanie 2. Pionowo ustawiona, gładka płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz , która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ (gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego) oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (gdzie k -znana dodatnia stała).

1) Znaleźć ruch punktu przy pomocy równań Lagrange'a II rodzaju: x

Wiadomo, iż w chwili $t=0$ oś Ox leżała na obracającej się płaszczyźnie.

Ponadto wiadomo, że $x(t=0) = x_0$, $z(t=0) = z_0$ oraz $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ i

$\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2$, $\frac{k}{m} > \omega^2$, $\frac{k}{m} = \omega^2$.

2) Znaleźć uogólnioną energię G . Czy jest on całką ruchu?

Odp. (częściowa do punktu 2) $G = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\rho^2\omega^2 + mgz + \frac{1}{2}k\rho^2 + \frac{1}{2}kz^2$

Zadanie 3. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

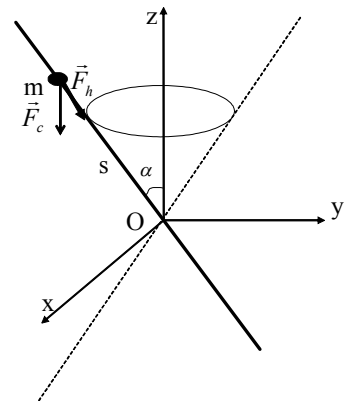
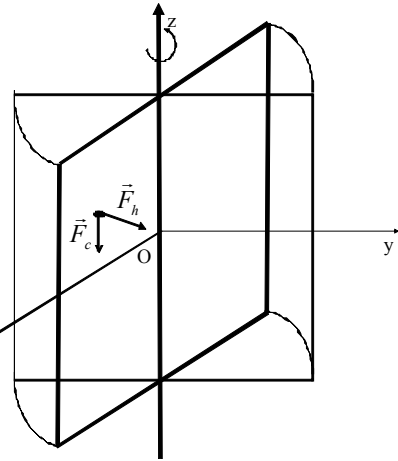
obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k -znana dodatnia stała oraz siła ciężkości $\vec{F}_c = m\vec{g} = (0, 0, -mg)$ zwrócona pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0 , przy czym:

$x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0) = 0$.

1) Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Rozważyć

przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2 \sin^2(\alpha)$, $\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$, $\frac{k}{m} = \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Znana jest wartość

przyspieszenia ziemskiego g .

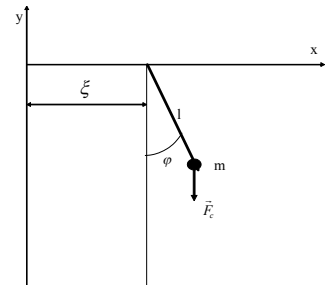


2) Znaleźć uogólnioną energię G . Czy jest ona całką ruchu ?

Wsk. Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć s -współrzędną określającą aktualne położenie ciała względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 4.

1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości l i masie m pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2} At^2$ (A -stała). Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Za współrzędną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu.

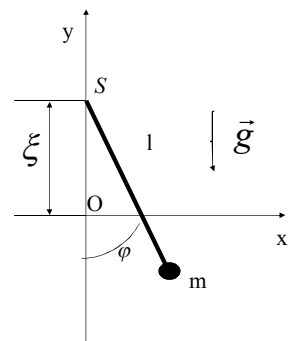


2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ punkt o masie m umieszczony na końcu nici spoczywał w punkcie o współrzędnych $x(t=0) = 0, y(t=0) = -l$ (l -długość nici wahadła). Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$. Przy

rozwiązywaniu równania różniczkowego zastosować podstawienie $u = x - \frac{1}{2} At^2$.

Odp. $\varphi(t) = \frac{A}{l\omega^2} [\cos(\omega t) - 1]$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

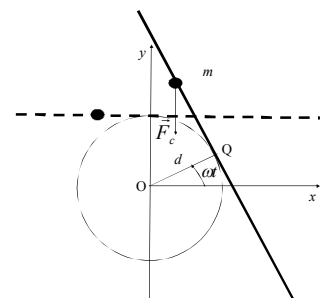
Zadanie 5. Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości l i masie m pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej pionowej w taki sposób, iż jego położenie na osi pionowej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2} At^2$ (A -stała). Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Za współrzędną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu.



2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ ciało znajdujące się na końcu nici wahadła spoczywało przy czym kąt odchylenia nici od pionu był równy $\varphi(t=0) = \varphi_0$. Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$.

Odp. $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g+A}{l}}$

Zadanie 6. W płaszczyźnie pionowej leży prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi d , przy czym w chwili początkowej $t=0$ prosta była położona równolegle do osi Oy.



Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $\vec{F}_c = (0, -mg)$. Nie uwzględniamy siły tarcia. Wiadomo, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie związanym z prostą, a jego współrzędne w układzie kartezjańskim były równe $x(t=0) = d$, $y(t=0) = s_0$. Znaleźć ruch ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

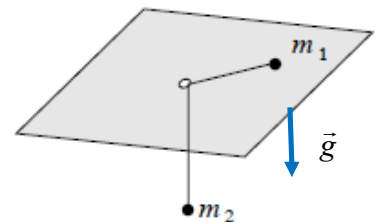
Wsk. Za współrzędną uogólnioną można przyjąć wielkość s określającą położenie ciała względem punktu Q leżącego na przecięciu analizowanej prostej z prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez początek układu współrzędnych

Odp. $s(t) = \left(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\right) \cosh(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \cos(\omega t)$

Zadanie 7. Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po powierzchni kuli o promieniu R pod wpływem siły ciężkości.

$\vec{F} = (0, 0, -mg)$ gdzie g to wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć całki ruchu.

Zadanie 8. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się punkt materialny o masie m_1 . Do punktu przymocowano wiotką i nierozciągliwą nici o długości l i pomijalnie małej masie, która przechodzi przez mały otwór w płaszczyźnie i dźwiga na drugim końcu pionowo zwisający punkt materialny o masie m_2 . Wiadomo iż w chwili początkowej punkt materialny o masie m_1 znajdował się w odległości ρ_0 od otworu i poruszał się w poziomej płaszczyźnie z prędkością skierowaną prostopadłe do nici o wartości $V = \rho_0 \omega_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

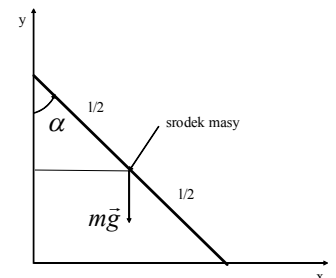


- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i zapisać równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu złożonego z obu punktów.
- 2) Wyznaczyć $\ddot{\rho}$ w trakcie ruchu jako funkcję ρ gdzie ρ oznacza odległość ciała o masie m_1 od otworu w płaszczyźnie.

Odp. (do punktu 2) $\ddot{\rho} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g + \frac{m_1 \rho_0^4 \omega_0^2}{(m_1 + m_2) \rho^3}$

Zadanie 9. Pręt o długości l i masie m oparty o ścianę zaczyna ześlizgiwać się w dół bez tarcia. Wyznaczyć równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch pręta.

Wsk. Energię kinetyczną pręta można przedstawić jako sumę energii kinetycznej w ruchu postępowym zachodzącym z prędkością środka masy pręta i energii kinetycznej w ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy pręta. Energie kinetyczną związaną z ruchem obrotowym wokół osi o ustalonej orientacji w przestrzeni można policzyć ze wzoru: $\frac{1}{2} I \omega^2$ gdzie I - moment bezładności pręta względem tej osi, ω -



prędkość kątowna w ruchu obrotowym.

Moment bezładności pręta o masie m i długości l względem osi prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego środek $I_0 = \frac{1}{12} m l^2$ Za współrzędną uogólnioną można przyjąć kąt

α pokazany na rysunku. **Odp.** $\alpha - \frac{3g}{2l} \sin(\alpha) = 0$