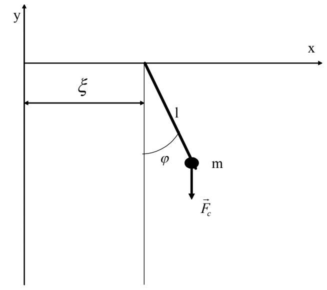
IIID

Zadanie 1. Punkt materialny o masie *m* porusza się po gładkiej krzywej opisanej równaniami parametrycznymi: $x(\varphi)=b\cos(\varphi)$, $y(\varphi)=b\sin(\varphi)$, $z(\varphi)=a\varphi$. Na punkt działa siła $\vec{F}=(0,0,-kz-mg)$ gdzie *k*-stała dodatnia, *g*-wartość przyspieszenia ziemskiego. Wyznaczyć, przy pomocy równania Lagrange'a II rodzaju, ruch punktu materialnego przy następujących warunkach początkowych ruchu: $z(t=0)=0$, $\dot{z}(t=0)=0$.

Zadanie 2.



1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

a) $\xi = A\sin(\Omega t)$($A,\Omega \neq \sqrt{\frac{g}{l}}$ -stałe)

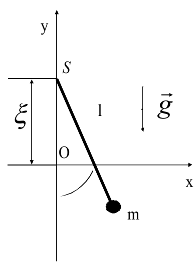
b) $\xi = \frac{1}{2}At^2$ (*A*-stała)

Za współrzędną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu .

2) Wiadomo, że w chwili *t=0* punkt o masie *m* umieszczony na końcu nici spoczywał w punkcie o współrzędnych $x(t=0)=0, y(t=0)=-l$ (*l*-długość nici wahadła). Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi)\approx\varphi$, $\cos(\varphi)\approx 1$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.

Zadanie 3



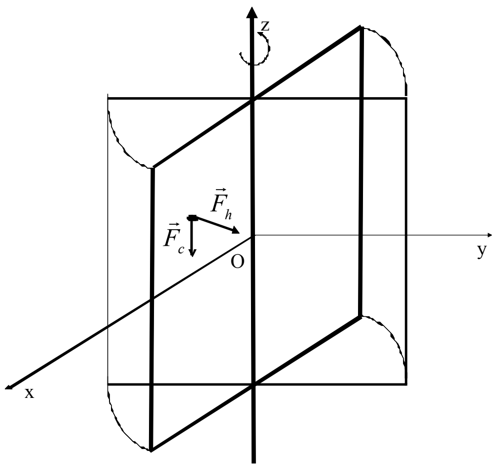
1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej pionowej w taki sposób, iż jego położenie na osi pionowej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2}At^2$ (*A*-stała)

Za współrzędną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu.

2) Wiadomo, że w chwili *t=0* ciało o masie *m* umieszczone na końcu nici spoczywało w punkcie o współrzędnych $x(t=0)=x_0$. Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi)\approx\varphi$, $\cos(\varphi)\approx 1$.

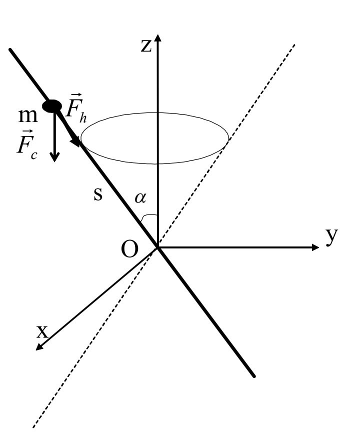
Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.

Zadanie 4. Pionowo ustawiona, gładka płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz, która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie *m*, na który działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0,0,-mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx,-ky,-kz)$ gdzie *k*-znana dodatnia stała. Znaleźć ruch punktu przy pomocy równań Lagrange'a II rodzaju.



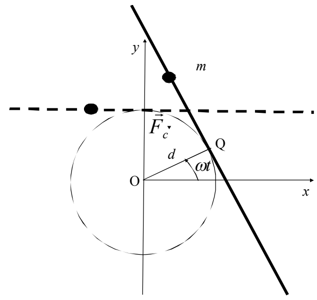
Wiadomo, iż w chwili *t*=0 oś Ox leżała na obracającej się płaszczyźnie. Ponadto wiadomo, że $x(t=0)=x_0$, $z(t=0)=z_0$ oraz $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$ i $\dot{z}(t=0)=\dot{z}_0$. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2, \frac{k}{m} > \omega^2, \frac{k}{m} = \omega^2$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.

Zadanie 5. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$) obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m. Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx,-ky,-kz)$ gdzie *k*-znana dodatnia stała oraz siła ciężkości $\vec{F}_c = m\vec{g} = (0,0,-mg)$ zwrócona pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0, przy czym: $x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0)=0$. Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2 \sin^2(\alpha), \frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha), \frac{k}{m} = \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.



Wsk. *Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć s-współrzędną określającą aktualne położenie ciała względem początku układu współrzędnych .*

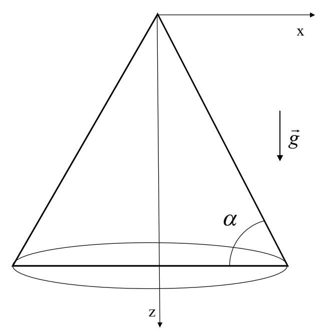
Zadanie 6. Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla punktu materialnego o masie *m* poruszającego się bez tarcia po powierzchni kuli o promieniu R pod wpływem siły ciężkości. $\vec{F} = (0,0,mg)$ (obieramy oś Oz pionowo do dołu, *g*-wartość przyspieszenia ziemskiego). Znaleźć całki ruchu.



Zadanie 7. W płaszczyźnie pionowej leży prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi *d*, przy czym w chwili początkowej *t*=0 prosta była położona równolegle do osi Oy. Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie *m*. Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $\vec{F}_c = (0, -mg)$. Nie uwzględniamy siły tarcia. Wiadomo, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie związanym z prostą, a jego współrzędne w układzie kartezjańskim były równe $x(t=0)=d$, $y(t=0)=s_0$. Znaleźć ruch ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.

Wsk. Za współrzędną uogólnioną można przyjąć wielkość *s* określającą położenie ciała względem punktu Q leżącego na przecięciu analizowanej prostej z prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez początek układu współrzędnych

Odp. $s(t) = \left(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\right)\cosh(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t)$



Zadanie 8. Ciało (punkt materialny) o masie *m* porusza się w polu siły ciężkości po powierzchni bocznej stożka, którego podstawa leży na poziomej powierzchni. Wiadomo, iż kąt między podstawą stożka, a tworzącą stożka wynosi α. Stożek znajduje się w polu siły ciężkości działającej pionowo w dół. Znane są warunki początkowe ruchu: $z(t=0)=z_0$, $\dot{x}(t=0)=0$, $\dot{y}(t=0)=\dot{y}_0$, $\dot{z}(t=0)=0$

1) Znaleźć funkcje Lagrange'a i napisać równania Lagrange'a II rodzaju. W oparciu o te równania znaleźć całkę tego ruchu.
2) Wykorzystując znalezione równania oraz całkę ruchu napisać równanie różniczkowe typu $f(r, \ddot{r}) = 0$ opisujące jak zmienia się w czasie *r* odległość ciała od wierzchołka stożka.
3) Rozwiązać otrzymane równanie w przypadku, gdy $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0 = 0$

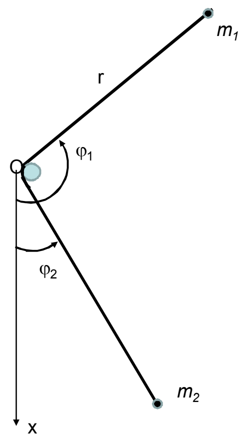
Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.

Wsk. *Za współrzędne uogólnione można przyjąć współrzędne* r, φ *bodące dwoma z trzech współrzędnych służących do opisu położenia w sferycznym układzie współrzędnych*

Odp.(do punktu 2) $\ddot{r} - \frac{\dot{y}_0^2 z_0^2}{\sin^2(\alpha)} \frac{1}{r^3} - g\sin(\alpha) = 0$

Zadanie 9.

Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2, połączone nierozciągliwą nicią o pomijalnie malej masie i długości l. Wiadomo iż nić przechodzi przez stały punkt O położony w płaszczyźnie ruchu.



1) Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju. W oparciu o te równania znaleźć całki ruchu
   Wsk. Za współrzędne uogólnione można przyjąć odpowiednio wybrane 3 z 4 współrzędnych określających położenie obu ciał w układzie biegunowym o początku w punkcie O.
2) Określić zależność składowej radialnej (określonej w układzie biegunowym o początku w punkcie O) przyspieszenia punktu materialnego o masie m_1 od jego aktualnej odległości $r_1=r$ od punktu O.

Wiadomo iż w chwili początkowej ciało o masie m_1 znajdowało się w odległości r_0 od punktu O, a jego składowa prędkości w kierunku prostopadłym do nici była równa $r_0\omega_1$, zaś w kierunku równoległym do nici $\dot{r}_0$. Wiadomo ponadto iż w tej samej chwili czasu składowa prędkości ciała o masie m_2 w kierunku prostopadłym do nici była równa $(l_0 - r_0)\omega_2$.

Odp. (do punktu 2) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{r_0^4\omega_1^2}{r^3} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{(l-r_0)^4\omega_2^2}{(l-r)^3} - \frac{r_0^4\omega_1^2}{r^3}$