

III

Zadanie 1. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po m prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k -dodatnia stała

1) Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Założyć iż $\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Zaniedbać wpływ siły ciężkości na

ruch ciała. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0 , przy czym:
 $x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0) = 0$.

2) Znaleźć uogólnioną energię. Czy jest ona stałą ruchu?

Wsk. Jako współzrzedną uogólnioną można przyjąć s -współzrzedną określającą aktualne położenie ciała względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 2 Zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju oraz wyznaczyć ruch punktu materialnego w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, -mg)$ po gładkiej odwróconej cykloidzie. Równanie parametryczne krzywej, po której porusza się punkt materialny:

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \quad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \quad R = \text{const} \quad -\pi \leq \varphi < \pi$$

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. Jako współzrzedną uogólnioną można przyjąć parametr φ . Przed rozwiązaniem równania Lagrange'a II rodzaju dokonać zamiany zmiennej φ na zmienną u określoną jako

$$u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (-4R \leq u < 4R).$$

Moduł u jest równy długości łuku cykloidy pomiędzy punktami określonymi przez $\varphi_p = 0$ oraz $\varphi_k = \varphi$. Można także przyjąć u jako współzrzedną uogólnioną i wyrazić znalezioną funkcję Lagrange'a $L(\varphi, \dot{\varphi})$ jako funkcję tej nowej współzrzednej uogólnionej i jej pochodnej po czasie czyli znaleźć $L(u, \dot{u})$ po czym zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współzrzedną uogólnioną współzrzedną u .

Zadanie 3. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej, rozszerzającej się powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca ρ równy w chwili początkowej R_0 rozszerza się tak, iż $\rho(t) = R_0 + At$, gdzie R_0 i A to dodatnie stałe. Wiadomo ponadto, że w chwili początkowej $z(t=0) = z_0$, $\dot{z}(t=0) = 0$, $x(t=0) = R_0$, $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$.

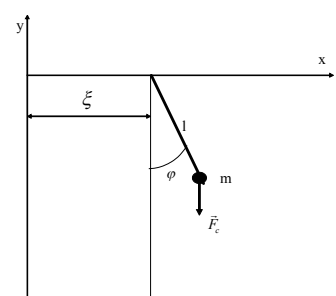
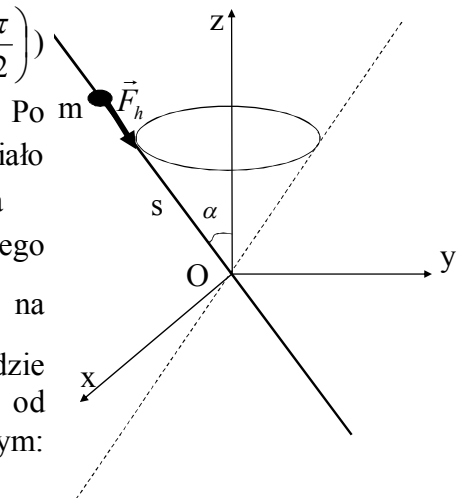
1) Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch punktu materialnego. W oparciu o te równania znaleźć całkę ruchu i wyznaczyć ruch punktu materialnego.

2) Znaleźć uogólnioną energię. Czy jest ona stałą ruchu?

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Zadanie 4.

1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości l i masie m pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób,



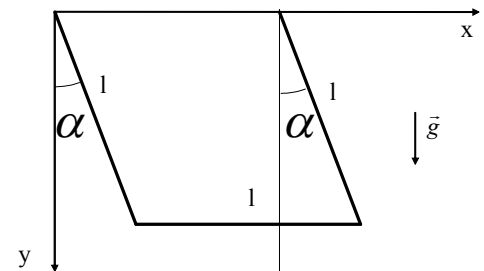
iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:) $\xi = A \sin(\Omega t)$ (A, Ω - stałe)

Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu. Znała jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ punkt o masie m umieszczony na końcu nici spoczywał w punkcie o współzrzednych $x(t=0) = 0, y(t=0) = -l$ (l - długość nici wahadła). Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$.

3) - Znaleźć posługując się metodami numerycznymi ruch układu dla określonych powyżej warunków początkowych ruchu bez stosowania przybliżeń dla różnych wartości stałych A i Ω . Przyjąć iż $l=1\text{m}$. Przedyskutować, kiedy znalezione ściśle rozwiązania ruchu są w przybliżeniu zgodne z rozwiązaniami przybliżonymi uzyskanymi przy założeniu iż kąt określający odchylenie nici od pionu pozostaje mały w trakcie ruchu.

Zadanie 5. Dany jest układ trzech sztywnych prętów o długości l i masie m każdy, połączonych w sposób podany na rysunku. Układ znajduje się w polu siły ciężkości. Wyznaczyć równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu. Zakładamy iż w trakcie ruchu pręt łączący dwa pręty zachowuje położenie poziome (a więc porusza się tylko ruchem postępowym).



Wsk. Energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznej poziomego pręta w ruchu postępowym i pozostałych prętów w ruchu obrotowym.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi obrotu jest równa $T = \frac{1}{2} I \omega^2$

gdzie I - moment bezwładności bryły względem osi obrotu.

Moment bezwładności pręta o masie m i o długości l wokół osi przechodzącej przez środek pręta i prostopadłej do pręta jest równy $I_0 = \frac{1}{12} m l^2$.

Moment bezwładności bryły o masie m względem dowolnej osi jest równy $I = I_0 + m d^2$, gdzie I_0 moment bezwładności tej bryły względem osi równoległej do rozważanej osi, przechodzącej przez jej środek masy i odległej od niej o d .

Energia potencjalna bryły w polu siły ciężkości jest równa energii potencjalnej punktu materialnego o masie równej masie bryły znajdującego się w środku masy bryły.

Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt α pokazany na rysunku.

Odp. $\alpha + \frac{6g}{5l} \sin(\alpha) = 0$