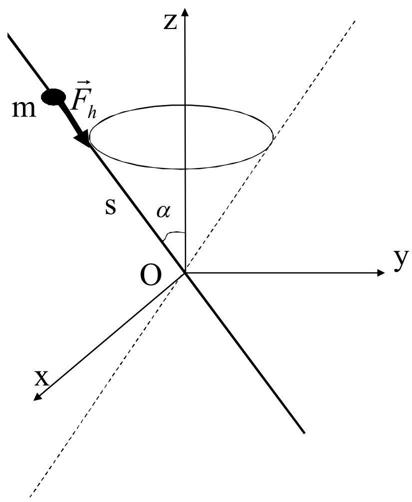
III

Zadanie 1. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m. Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k-dodatnia stała Zaniedbać wpływ siły ciężkości na ruch ciała. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0, przy czym: $x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0) = 0$.

Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Założyć iż $\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$.



***Wsk.** Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć s-współrzędną określającą aktualne położenie ciała względem początku układu współrzędnych .*

Zadanie 2 Zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju oraz wyznaczyć ruch punktu materialnego w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, -mg)$ po gładkiej odwróconej cykloidzie. Równanie parametryczne krzywej, po której porusza się punkt materialny:

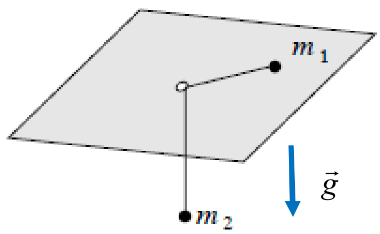
$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi))$ $\quad$ $y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi))$ $\quad$ R=const $\quad$ $-\pi \le \varphi < \pi$

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Wsk. Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć parametr φ. Przed rozwiązaniem równania Lagrange'a II rodzaju dokonać zamiany zmiennej φ na zmienną u określoną jako $u = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ ($-4R \le u < 4R$). Moduł u jest równy długości łuku cykloidy pomiędzy punktami określonymi przez $\varphi_p = 0$ oraz $\varphi_k = \varphi$. Można także przyjąć u jako współrzędną uogólnioną i wyrazić znalezioną funkcje Lagrange'a $L(\varphi, \dot{\varphi})$ jako funkcję tej nowej współrzędnej uogólnionej i jej pochodnej po czasie czyli znaleźć $L(u, \dot{u})$ po czym zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współrzędną uogólnioną współrzędną u.

Zadanie 3. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0,0,-mg)$ po gładkiej, rozszerzającej się powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca ρ równy w chwili początkowej R_0 rozszerza się tak, iż $\rho(t) = R_0 + At$. gdzie R_0 i A to dodatnie stałe. Wiadomo ponadto, że w chwili początkowej $z(t=0) = z_0$, $\dot{z}(t=0) = 0$, $x(t=0) = R_0$, $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$. Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch punktu materialnego. W oparciu o te równania znaleźć całkę ruchu i wyznaczyć ruch punktu materialnego. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Zadanie 4. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się punkt materialny o masie m_1. Do punktu przymocowano wiotką i nierozciągliwą nić o długości l i pomijalnie małej masie, która przechodzi przez mały otwór w płaszczyźnie i dźwiga na drugim końcu pionowo zwisający punkt materialny o masie m_2. Wiadomo iż w chwili początkowej punkt materialny o masie m_1 znajdował się w odległości ρ_0 od otworu i poruszał się w poziomej płaszczyźnie z prędkością skierowaną prostopadle do nici o wartości $V = \rho_0\omega_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i zapisać równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu złożonego z obu punktów.
2) Wyznaczyć $\ddot{\rho}$ w trakcie ruchu jako funkcję ρ gdzie ρ oznacza odległość ciała o masie m_1 od otworu w płaszczyźnie.
3) Określić zależność siły naciągu nici od odległości punktu o masie m_1 od otworu w płaszczyźnie *(do samodzielnego rozwiązania)*.
4) Określić wartość ω_0, przy której odległość punktu o masie m_1 od otworu nie ulegała by zmianie w trakcie ruchu *(do samodzielnego rozwiązania)*.