

IID

Zadanie 1 (rozwiązanie dodatek do wykładu). Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach:

$$x + y + z = 0, \quad x + 2y + 5z = 0$$

Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ skierowana pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0) = z_0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0, x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$. Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Zadanie 2. Wyznaczyć przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju oraz zasady d'Alemberta ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach $z = 2y$ oraz $z = x$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ (g -znana wartość przyspieszenia ziemskiego) skierowana pionowo w dół oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (k -znana stała dodatnia). Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0) = 0, \dot{z}(t=0) = 0$. Określić siłę reakcji działającą na punkt materialny ze strony więzów.

Odp. $x = z = \frac{4}{9} \frac{mg}{k} [\cos(\omega t) - 1], y = \frac{2}{9} \frac{mg}{k} [\cos(\omega t) - 1]$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \vec{F}_R = \left(-\frac{4}{9} mg, -\frac{2}{9} mg, \frac{5}{9} mg \right)$

Zadanie 3. Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po płaszczyźnie o równaniu: $z = 3y$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ skierowana pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0) = z_0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0, x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$.

Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Odp. $x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t; y(t) = \frac{z_0}{3} + \frac{\dot{z}_0}{3} t - \frac{3}{20} g t^2; z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{9}{20} g t^2; \vec{F}_R = \left(0, -\frac{3}{10} mg, \frac{1}{10} mg \right)$

Zadanie 4. Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po płaszczyźnie o równaniu:

a) $z = 3y$

b) $y = 4z$

Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ skierowana pionowo w dół oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (k -znana stała dodatnia). Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0) = z_0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0, x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$. Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Zadanie 5. Punkt materialny o masie m porusza się po gładkiej elipsoidzie o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (*)$$

pod wpływem siły skierowanej w kierunku środka elipsoidy $\vec{F} = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k -znana stała dodatnia. Znaleźć przy pomocy równań Lagrange'a I rodzaju w kartezjańskim układzie współrzędnych zależność składowych wektora siły reakcji od składowych położenia i prędkości poruszającego się punktu. Pominąć wpływ siły ciężkości na ruch punktu materialnego.

Wsk. Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie więzów (*) oraz równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania (*).

Odp.
$$\vec{F}_R = \left[2\lambda \frac{x}{a^2}, 2\lambda \frac{y}{b^2}, 2\lambda \frac{z}{c^2} \right] \text{ gdzie } \lambda = \frac{k - m \left(\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2} \right)}{2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}$$

Zadanie 6. Punkt porusza się po gładkiej elipsoidzie o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (*)$$

bez działania żadnych sił (za wyjątkiem sił reakcji). Wykazać, przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju, że wartość jego prędkości jest stała.

Wsk. Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po zróżniczkowaniu po czasie równania (*).

Zadanie 7. Punkt materialny o masie m porusza się w przestrzeni trójwymiarowej po powierzchni o równaniu $z = bx^4$ (b -znana stała) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (składowe siły ciężkości są równe $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$).

- 1) Napisać równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
- 2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t = t_0$ wiedząc, iż $x(t = t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t = t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. do punktu 2: Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów.

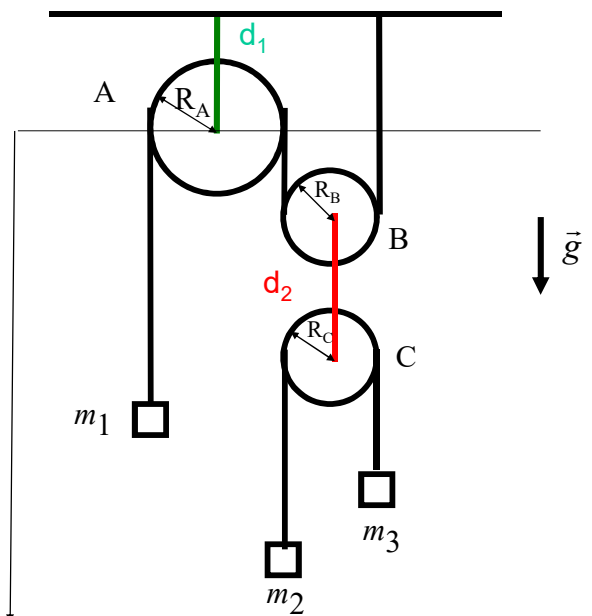
Zadanie 8.

Znaleźć przyspieszenia, z jakim poruszać się będą klocki o masach m_1, m_2 oraz m_3 pokazane na rysunku. Kłócek o masie m_1 znajduje się na końcu liny o długości l_1 przerzuconej przez nieważkie bloczki A i B o promieniach R_A i R_B odpowiednio, której drugi koniec przymocowano do sufitu. Do bloczka B przymocowano przy pomocy czerwonego pręta o pomijalnie małej masie i długości d_2 nieważki bloczek C o promieniu R_C . Przez ten bloczek przerzucono linę o długości l_2 , na końcu której zwisają klocki o masach m_2 i m_3 odpowiednio. Tarcie lin o nieobracające się i nieważkie bloczki pominać. Bloczki B i C mogą poruszać się tylko w kierunku pionowym, zaś bloczek A nie porusza się będąc sztywno przymocowany do sufitu przy pomocy pręta zielonego o pomijalnie małej masie i długości d_1 . Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół.

Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę d'Alemberta. z

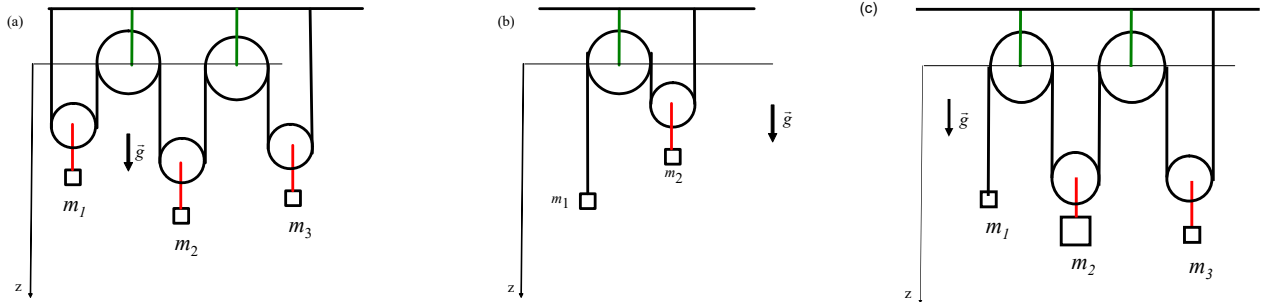
Odp. (częściowa) przyspieszenie ciała o masie m_2 :

$$\vec{a}_2 = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 2m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}$$



Zadanie 9.

Przez układ nieobracających się i nieważkich bloczków przerzucono linę o pomijalnie małej masie (rysunki poniżej). Lina ta z obu stron (rysunek (a)) lub z jednej strony (rysunki (b) i (c)) umocowana jest sztywno do sufitu. W przypadku sytuacji ukazanych na rysunkach (b) i (c) na drugim końcu liny umieszczono klocek o masie m_1 . Pozostałe klocek przymocowano sztywno do bloczków przy pomocy czerwonych prętów o pomijalnie małych masach. Bloczki dołączone przy pomocy zielonych prętów o pomijalnie małej masie do sufitu są nieruchome, zaś pozostałe bloczki wiszące na linie mogą poruszać się tylko w kierunku pionowym. Znaleźć przyspieszenia, z jakim poruszać się będą klocek o masach m_1 , m_2 oraz m_3 pokazane na rysunkach (a) i (c) oraz klocek o masach m_1 , m_2 na rysunku (b). Tarcie liny o bloczki pominąć. Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę d'Alemberta. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .



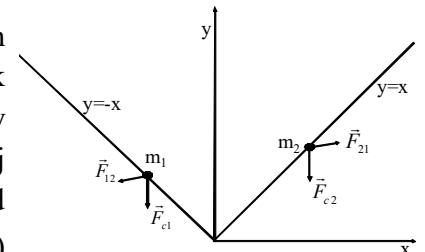
Odp. (częściowa)

$$a) \quad \vec{a}_1 = \frac{m_1 m_2 - 2m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}; \quad \vec{a}_2 = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 2m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}; \quad \vec{a}_3 = \frac{-2m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}$$

$$b) \quad \vec{a}_1 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} \vec{g}$$

$$c) \quad \vec{a}_1 = \frac{4m_1 m_2 - 4m_2 m_3 + 4m_1 m_3}{4m_1 m_2 + 4m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}$$

Zadanie 10. Dwa ciała o masach m_1 i m_2 poruszają się po gładkich prostych opisanych równaniami $y=-x$ oraz $y=x$ odpowiednio (rysunek obok) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół oraz siły odpychającej działającej w kierunku równoległym do prostej łączącej oba ciała, o wartości wprost proporcjonalnej do odległości r tych ciał od siebie ($|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = kr$). Wypadkowe siły (bez sił reakcji więzów)



działające na ciała o masach m_1 i m_2 są więc równe odpowiednio:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{c1} = (-k(x_2 - x_1), -k(y_2 - y_1) - m_1 g) \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{c2} = (k(x_2 - x_1), k(y_2 - y_1) - m_2 g)$$

(k -dodatnia stała, g -wartość przyspieszenia ziemskiego).

1) Sformułować zasadę d'Alemberta dla opisanego układu oraz znaleźć równania ruchu.

2) Znaleźć położenie równowagi tych ciał. Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę prac wirtualnych (wynikającą z zasady d'Alemberta).

3) Znaleźć ruch obu ciał uwzględniając warunki początkowe ruchu pierwszego ciała $x_1(t=0) = x_{10}$, $\dot{x}_1(t=0) = 0$ oraz drugiego ciała $x_2(t=0) = x_{20}$, $\dot{x}_2(t=0) = 0$

Odp. (do punktu 2). $x_1 = -y_1 = -\frac{m_1 g}{2k}$ $x_2 = y_2 = \frac{m_2 g}{2k}$