IID

Zadanie 1 (rozwiązanie dołączono do prezentacji wykładu). Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach:

$x+y+z=0$. $x+2y+5z=0$

Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}=(0,0,-mg)$ skierowana pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0)=z_0, \dot{z}(t=0)=\dot{z}_o, x(t=0)=x_0, \dot{x}(t=0)=\dot{x}_o$. Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

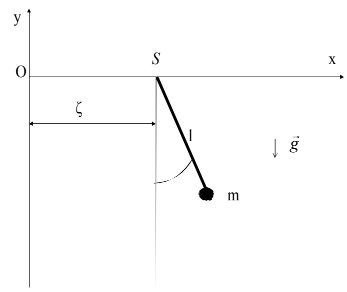
Zadanie 2. Wyznaczyć przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju oraz zasady d'Alemberta ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach $z=2y$ oraz $z=x$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c=(0,0,-mg)$ (g-znana wartość przyspieszenia ziemskiego) skierowana pionowo w dół oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h=(-kx,-ky,-kz)$ (k-znana stała dodatnia). Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0)=0, \dot{z}(t=0)=0$. Określić siłę reakcji działającą na punkt materialny ze strony więzów.

Zadanie 3. Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po płaszczyźnie o równaniu: $z=3y$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c=(0,0,-mg)$ skierowana pionowo w dół Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0)=z_0, \dot{z}(t=0)=\dot{z}_o, x(t=0)=x_0, \dot{x}(t=0)=\dot{x}_o$. Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Odp. $x(t)=x_0+\dot{x}_0 t$; $y(t)=\frac{z_0}{3}+\frac{\dot{z}_0}{3}t-\frac{3}{20}gt^2$; $z(t)=z_0+\dot{z}_0 t-\frac{9}{20}gt^2$; $\vec{F}_R=\left(0,-\frac{3}{10}mg,\frac{1}{10}mg\right)$

Zadanie 4. Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po płaszczyźnie o równaniu: $z=3y$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c=(0,0,-mg)$ skierowana pionowo w dół oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h=(-kx,-ky,-kz)$ (k-znana stała dodatnia). Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0)=z_0, \dot{z}(t=0)=\dot{z}_o, x(t=0)=x_0, \dot{x}(t=0)=\dot{x}_o$. Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Zadanie 5. Rozważyć ruch wahadła matematycznego pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła S porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi=\frac{1}{2}At^2$ (A-znana stała). Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



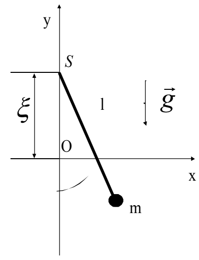
1) Znaleźć przy pomocy formalizmu opartego na równaniach Lagrange'a pierwszego rodzaju równanie opisujące ruch ciała (punktu materialnego) o masie *m* umieszczonego na końcu nici wahadła o długości *l*. Założyć iż ruch ciała odbywa się w stałej w czasie pionowej płaszczyźnie i analizować go w dwuwymiarowym kartezjańskim układzie współrzędnych pokazanym na rysunku.
2) Uzależnić siłę reakcji działającą na ciało o masie *m* znajdujące się na końcu nici wahadła od składowych jego wektora wodzącego $\vec{r} = (x, y)$, prędkości $\vec{V} = (\dot{x}, \dot{y})$ i czasu *t*.
3) Wiadomo, że w chwili *t=0* ciało o masie *m* spoczywało w punkcie o współrzędnych $x(t=0) = 0, y(t=0) = -l$ (*l*-długość nici wahadła). Określić ruch ciała zakładając, iż w jego trakcie kąt wychylenia nici wahadła od pionu jest na tyle mały, że można założyć, że $y \approx -l$, $\ddot{y} \approx 0$.

Wsk. do punktu 2: *Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie więzów oraz równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów.*
Wsk. do punktu 3: *Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego zastosować podstawienie* $u = x - \frac{1}{2}At^2$

Odp. (częściowa)

2) $\vec{F}_R = 2\lambda\left[x - \frac{1}{2}At^2, y\right]$ gdzie $\lambda = \frac{m}{2l^2}\left[gy - \dot{y}^2 - [\dot{x} - At]^2 + A\left[x - \frac{1}{2}At^2\right]\right]$

Zadanie 6. Rozważyć ruch wahadła matematycznego pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła *S* porusza się po prostej pionowej w taki sposób, iż jego położenie na osi pionowej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2}At^2$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*. Założyć iż ruch ciała odbywa się w stałej w czasie pionowej płaszczyźnie i analizować go w dwuwymiarowym kartezjańskim układzie współrzędnych pokazanym na rysunku.



1) Znaleźć przy pomocy formalizmu opartego na równaniach Lagrange'a pierwszego rodzaju równanie opisujące ruch ciała (punktu materialnego) o masie *m* umieszczonego na końcu nici wahadła o długości *l*. To samo zadanie wykonać posługując się zasadą d'Alemberta.
2) Uzależnić siłę reakcji działającą na ciało o masie *m* znajdujące się na końcu nici wahadła od składowych jego wektora wodzącego $\vec{r} = (x, y)$, prędkości $\vec{V} = (\dot{x}, \dot{y})$ i czasu *t*.
3) Wiadomo, że w chwili *t=0* ciało o masie *m* spoczywało w punkcie o współrzędnych $x(t=0) = x_0, y(t=0) = -l$ (*l*-długość nici wahadła). Określić ruch ciała zakładając, iż w jego trakcie kąt wychylenia nici wahadła od pionu jest na tyle mały, że można założyć, że $y \approx -l + \frac{1}{2}At^2$, $\ddot{y} \approx A$.

Wsk. ***(do punktu 2).*** *Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie więzów oraz równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów.*

Odp. (do punktu 2) $\vec{F}_R = 2\lambda\left[x, y - \frac{1}{2}At^2\right]$ gdzie $\lambda = \frac{m}{2l^2}\left[(g + A)\left(y - \frac{1}{2}At^2\right) - \dot{x}^2 - (\dot{y} - At)^2\right]$

Zadanie 7. Punkt materialny o masie m porusza się po gładkiej elipsoidzie o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (*)$$

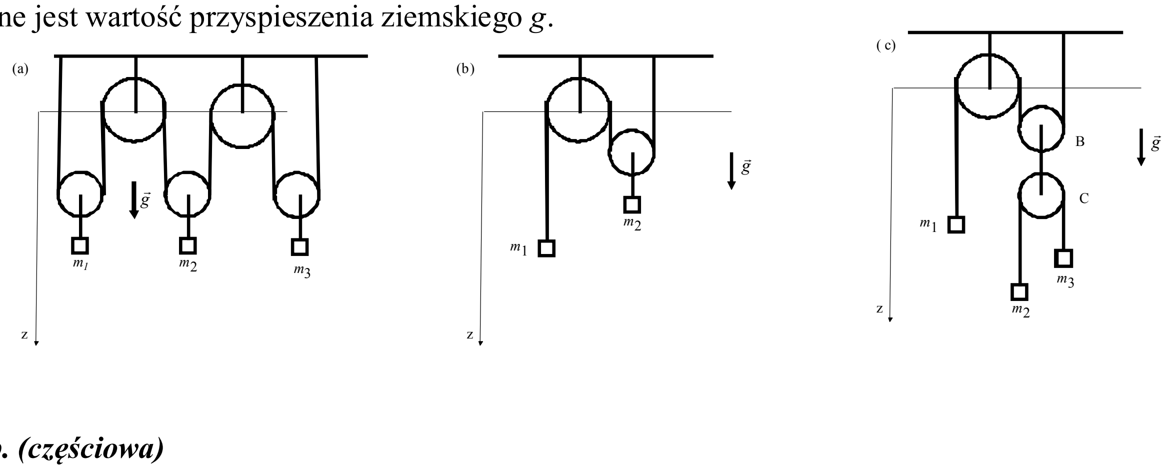
pod wpływem siły skierowanej w kierunku środka elipsoidy $\vec{F} = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k-znana stała dodatnia. Znaleźć przy pomocy równań Lagrange'a I rodzaju w kartezjańskim układzie współrzędnych zależność składowych wektora siły reakcji od składowych położenia i prędkości poruszającego się punktu. Pominąć wpływ siły ciężkości na ruch punktu materialnego.
Wsk. *Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie więzów (*) oraz równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania (*).*

Zadanie 8. Punkt porusza się po gładkiej elipsoidzie o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (*)$$

bez działania żadnych sił (za wyjątkiem sił reakcji). Wykazać, przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju, że wartość jego prędkości jest stała.
Wsk. Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po zróżniczkowaniu po czasie równania (*).

Zadanie 9.
Znaleźć przyspieszenia, z jakim poruszać się będą klocki o masach m_1,m_2 oraz m_3 pokazane na poniższych rysunkach. Tarcie liny (lin w przypadku układu na rys. (c)) o nieobracające się i nieważkie bloczki pominąć. Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Bloczki B i C na rysunku (c) są połączone ze sobą sztywnym prętem Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę d'Alemberta.
Znane jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



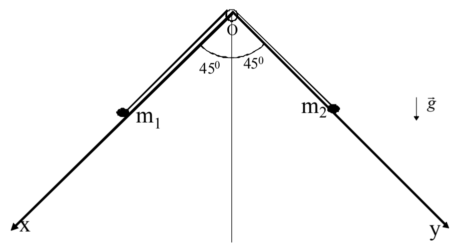
Odp. (częściowa)

a) $\vec{a}_1 = \frac{m_1m_2 - 2m_2m_3 + m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}\vec{g}$; $\vec{a}_2 = \frac{m_1m_2 + m_2m_3 - 2m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}\vec{g}$; $\vec{a}_3 = \frac{-2m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}\vec{g}$

b) $\vec{a}_1 = \dfrac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2}\vec{g}$; $\vec{a}_2 = \dfrac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}\vec{g}$

c) $\vec{a}_1 = \dfrac{m_1 m_2 - 2m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\vec{g}$; $\vec{a}_2 = \dfrac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 2m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\vec{g}$; $\vec{a}_3 = \dfrac{-2m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\vec{g}$

Zadanie 9. Na płaszczyźnie pionowej leżą dwie osie Ox i Oy przecinające się w punkcie O pod kątem prostym. Osie te tworzą kąt 45^0 z prostą pionową prostopadłą do Ziemi. Wzdłuż osi Ox i Oy poruszają się bez tarcia dwa ciała o masach m_1 i m_2 połączone nierozciągliwą nicią o długości l. Nić przechodzi przez kółeczko umieszczone w punkcie O (początku układu współrzędnych). Na oba ciała działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół.

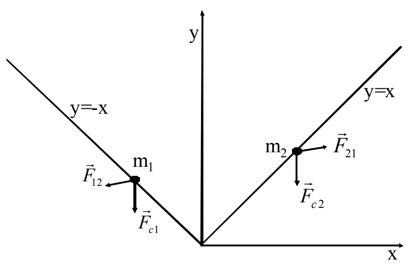


1) Wyznaczyć ruch tych ciał przy pomocy zasady d'Alemberta lub równań Lagrange'a I rodzaju przy następujących warunkach początkowych ruchu $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_0$, $x_1(t=0) = x_0$

2) Znaleźć siły reakcji więzów działające na oba ciała.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Zadanie 10. Dwa ciała o masach m_1 i m_2 poruszają się po gładkich prostych pisanych równaniami y=-x oraz y=x odpowiednio (rysunek obok) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół oraz siły odpychającej działającej w kierunku równoległym do prostej łączącej oba ciała, o wartości wprost proporcjonalnej do odległości r tych ciał od siebie ($\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = kr$). Wypadkowe siły (bez sił reakcji więzów) działające na ciała o masach m_1 i m_2 są więc równe odpowiednio:



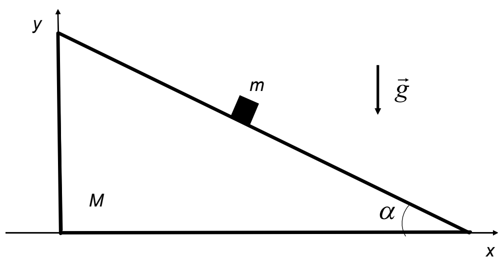
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{c1} = \left(-k(x_2 - x_1), -k(y_2 - y_1) - m_1 g\right) \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{c2} = \left(k(x_2 - x_1), k(y_2 - y_1) - m_2 g\right)$$

(k-dodatnia stała, g-wartość przyspieszenia ziemskiego).

Znaleźć położenie równowagi tych ciał. Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę prac wirtualnych (wynikającą z zasady d'Alemberta).

Odp. $x_1 = -y_1 = -\dfrac{m_1 g}{2k}$ $x_2 = y_2 = \dfrac{m_2 g}{2k}$

Zadanie 11 (rozwiązanie dołączono do prezentacji wykładu). Ciało o masie m może poruszać się bez tarcia po powierzchni klina o kącie nachylenia do poziomu α. Z kolei sam klin, którego masa jest równa M, może poruszać się bez tarcia po powierzchni poziomej. Znaleźć:



a) równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch układu

b) przyspieszenia z jakim poruszać się może ciało o masie m oraz klin

c) siły reakcji działające na klin i ciało

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.