

II

Zadanie 1.

Punkt materialny o masie m porusza się w przestrzeni trójwymiarowej po powierzchni o równaniu $z = bx^2$ (b -znana stała) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (składowe siły ciężkości są równe $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$).

- 1) Napisać równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
- 2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t = t_0$ wiedząc, iż $x(t = t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t = t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. do punktu 2: Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów.

Zadanie 2.

Punkt materialny o masie m zsuwa się pod wpływem siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej spirali opisanej równaniami:

$$x = a \cos(kz) \quad y = a \sin(kz)$$

gdzie a, k to znane stałe, $a > 0$. Wyznaczyć ruch punktu materialnego przy pomocy

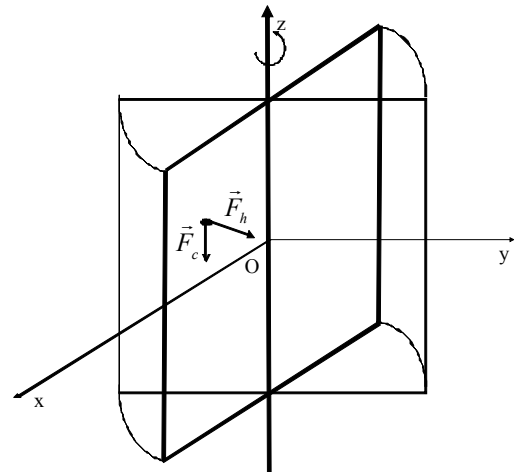
- a) równań Lagrange'a pierwszego rodzaju.
- b) zasady d'Alemberta

Wiadomo, że $z(t = 0) = z_0$ oraz $\dot{z}(t = 0) = \dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Znaleźć zależność od czasu siły reakcji działającej na punkt materialny.

Zadanie 3.

Pionowo ustawiona płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz , która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który w układzie inercjalnym działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (g -znana wartość przyspieszenia ziemskiego, k -znana dodatnia stała). Znane są warunki początkowe ruchu: $x(t = 0) = x_0 > 0$, $y(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$ oraz $\dot{x}(t = 0) = 0, \dot{z}(t = 0) = \dot{z}_0$.



- a) Wyznaczyć ruch tego punktu korzystając z zasady d'Alemberta. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2$ oraz $\frac{k}{m} > \omega^2, \frac{k}{m} = \omega^2$ (do samodzielnego rozwiązania)
- b) Wykorzystując formalizm prowadzący do równań Lagrange'a I rodzaju pokazać iż składowa z-owa siły reakcji jest równa zero $F_{Rz} = 0$, oraz zachodzi poniższa relacja wiążąca ze sobą składowe x-ową F_{Rx} i y-ową F_{Ry} siły reakcji $F_{Ry} \sin(\omega t) = -F_{Rx} \cos(\omega t)$.
- c) Określić siłę reakcji więzów działającą na ten punkt. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2, \frac{k}{m} > \omega^2, \frac{k}{m} = \omega^2$ (do samodzielnego rozwiązania).

Wsk. Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich można zapisać w postaci: $y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0$. Przy rozwiązywaniu różniczkowego równania ruchu zaleźnego od drugich pochodnych po czasie zmiennych x i y wprowadzić nową zmienną ρ (na wartości której równanie więzów nie wprowadza ograniczeń) związaną ze współrzędnymi kartezjańskimi równaniami: $x = \rho \cos(\omega t)$ $y = \rho \sin(\omega t)$.

Odp. (do punktu c)

1) Gdy $\omega^2 > \frac{k}{m}$ to $F_{Rx} = -2mx_0\gamma\omega \sinh(\gamma t) \sin(\omega t)$ $F_{Ry} = 2mx_0\gamma\omega \sinh(\gamma t) \cos(\omega t)$, $F_{Rz} = 0$ gdzie

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$$

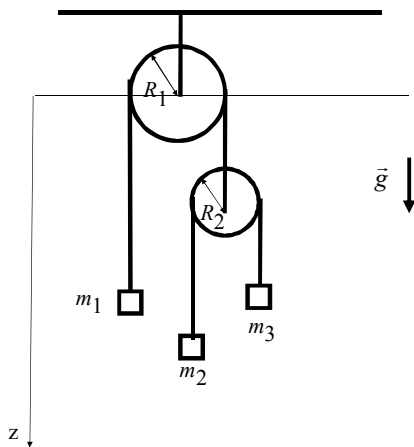
2) Gdy $\omega^2 < \frac{k}{m}$ to $F_{Rx} = 2mx_0\Omega\omega \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$ $F_{Ry} = -2mx_0\Omega\omega \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$, $F_{Rz} = 0$ gdzie

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

3) Gdy $\omega^2 = \frac{k}{m}$ to $F_{Rx} = F_{Ry} = F_{Rz} = 0$

Zadanie 4.

Znaleźć, wykorzystując zasadę d'Alemberta, przyspieszenia, z jakimi będą poruszać się klocki o masach m_1 , m_2 oraz m_3 pokazane na poniższym rysunku. Kłócek o masie m_1 jest połączony z nieważkim bloczkiem o promieniu R_2 liną o długości l_1 przerzuconą przez nieważki bloczek o promieniu R_1 . Bloczek o promieniu R_1 jest nieruchomy, zaś bloczek o promieniu R_2 może poruszać się tylko w kierunku pionowym. Przez bloczek o promieniu R_2 przerzucono linę o długości l_2 na końcach której umieszczono dwa klocki o masach równych m_2 oraz m_3 . Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Tarcie nieważkich i nierozciągliwych lin o bloczki pominać.



Zadanie 5.

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 znajdują się na płaszczyźnie o równaniu $z=0$ i są połączone sztywnym prętem o pomijalnie małej masie i długości d . Punkt o masie m_1 musi pozostać na prostej o równaniu $x=0$, zaś punkt o masie m_2 na prostej o równaniu $y=x$ (rysunek obok). Na punkty działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znaleźć położenie równowagi punktów wykorzystując zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a).

