

II

Zadanie 1.

Punkt materialny o masie m zsuwa się pod wpływem siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej spirali opisanej równaniami:

$$x = a \cos(kz) \quad y = a \sin(kz)$$

gdzie a, k to znane stałe, $a > 0$. Wyznaczyć ruch punktu materialnego przy pomocy

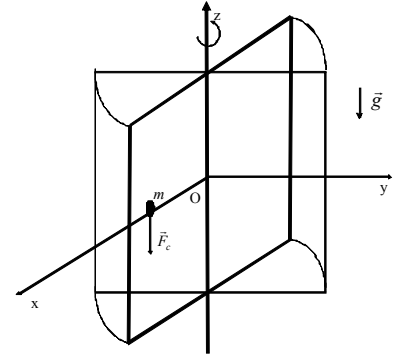
- zasady d'Alemberta
- równań Lagrange'a pierwszego rodzaju.

Wiadomo, że $z(t=0) = z_0$ oraz $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Znaleźć zależność od czasu siły reakcji działającej na punkt materialny.

Zadanie 2.

Pionowo ustawiona płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz , która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który w układzie inercyjnym działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ (g - znana wartość przyspieszenia ziemskiego). Znane są warunki początkowe ruchu: $x(t=0) = x_0 > 0$, $y(t=0) = 0$, $z(t=0) = 0$ oraz $\dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$.



- Wyznaczyć ruch tego punktu korzystając z zasady d'Alemberta.
- Wykorzystując formalizm prowadzący do równań Lagrange'a I rodzaju pokazać iż składowa z-owa siły reakcji jest równa zero $F_{Rz} = 0$, oraz zachodzi poniższa relacja wiążąca ze sobą składowe x-ową F_{Rx} i y-ową F_{Ry} siły reakcji $F_{Ry} \sin(\omega t) = -F_{Rx} \cos(\omega t)$.
- Określić siłę reakcji więzów działającą na ten punkt (do samodzielnego rozwiązania).

Wsk. Równanie więzów we współrzędnych kartezyjskich można zapisać w postaci: $y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0$. Przy rozwiązywaniu różniczkowego równania ruchu zależnego od drugich pochodnych po czasie zmiennych x i y wprowadzić nową zmienną ρ (na wartości której równanie więzów nie wprowadza ograniczeń) związaną ze współrzędnymi kartezyjskimi równaniami: $x = \rho \cos(\omega t)$ $y = \rho \sin(\omega t)$.

Odp. (do punktu c) $F_{Rx} = -2m\omega^2 x_0 \sinh(\omega t) \sin(\omega t)$, $F_{Ry} = 2m\omega^2 x_0 \sinh(\omega t) \cos(\omega t)$, $F_{Rz} = 0$

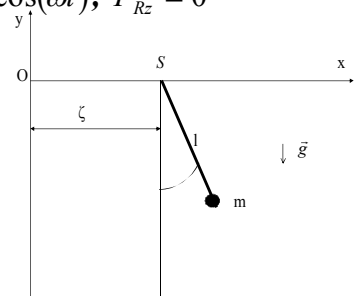
Zadanie 3.

Rozważyć ruch wahadła matematycznego pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła S porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

$$\xi = A \sin(\Omega t) \quad (A, \Omega \text{ - znane stałe, } \Omega \neq \sqrt{\frac{g}{l}}).$$

Założyć iż ruch ciała odbywa się w stałej w czasie pionowej płaszczyźnie i analizować go w dwuwymiarowym kartezyjskim układzie współrzędnych pokazanym na rysunku. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

1) Znaleźć przy pomocy formalizmu opartego na równaniach Lagrange'a pierwszego rodzaju równanie opisujące ruch ciała (punktu materialnego) o masie m umieszczonego na końcu nici wahadła o długości l . To samo zadanie wykonać posługując się zasadą d'Alemberta (do samodzielnego rozwiązania).



2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ ciało o masie m spoczywało w punkcie o współrzędnych $x(t=0)=0, y(t=0)=-l$ (l -długość nici wahadła). Określić ruch ciała zakładając, iż w jego trakcie kąt wychylenia nici wahadła od pionu jest na tyle mały, że można założyć, że $y \approx -l, \dot{y} \approx 0$.

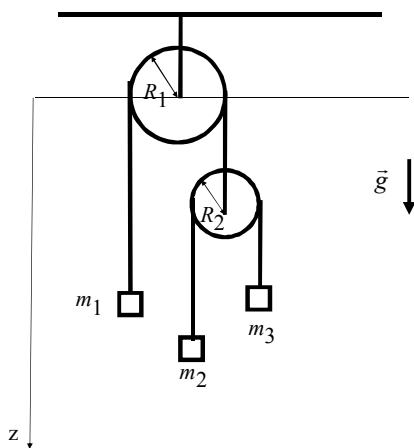
Zadanie 4. Punkt materialny o masie m porusza się po paraboli o równaniu $y = bx^2$ (b -znana stała) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0, -mg)$.

- 1) Napisać równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
- 2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t=t_0$ wiedząc, iż $x(t=t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t=t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. do punktu 2: Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów.

Zadanie 5. Znaleźć, wykorzystując zasadę d'Alemberta, przyspieszenia, z jakimi będą poruszać się klocki o masach m_1, m_2 oraz m_3 pokazane na poniższym rysunku. Kłoczek o masie m_1 jest połączony z bloczkiem o promieniu R_2 liną o długości l_1 przerywaną przez bloczek o promieniu R_1 . Bloczek o promieniu R_1 jest nieruchomy, zaś bloczek o promieniu R_2 może poruszać się tylko w kierunku pionowym. Przez bloczek o promieniu R_2 przerywano liną o długości l_2 na końcach której umieszczono dwa klocki o masach równych m_2 oraz m_3 . Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Tarcie nieważkich i nierozciągliwych lin o bloczki pominać.



Zadanie 6.

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 znajdują się na płaszczyźnie o równaniu $z=0$ i są połączone sztywnym prętem o pomijalnie małej masie i długości d . Punkt o masie m_1 musi pozostać na prostej o równaniu $x=0$, zaś punkt o masie m_2 na prostej o równaniu $y=x$ (rysunek obok). Na punkty działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znaleźć położenie równowagi punktów wykorzystując zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a).

