

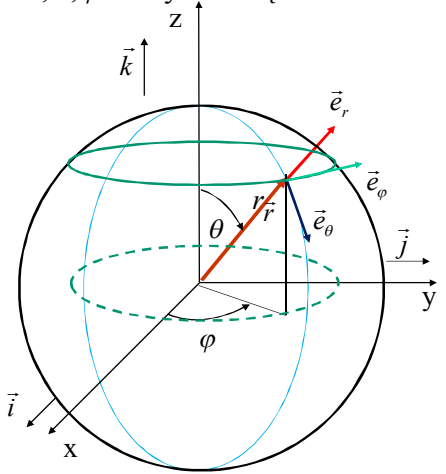
## ID

### Zadanie 1 (zadanie rozwiązać wykorzystując wzory wyprowadzone w zadaniu 1 z serii 1)

W układzie sferycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne  $r, \theta, \varphi$  których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = r \cos(\varphi) \sin \theta \quad y = r \sin(\varphi) \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami  $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$  sferycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{j}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{k}$ .



2) Dla punktu materialnego o masie  $m$  znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych sferycznych wektorów wodzącego  $\vec{r}$ , prędkości  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ , przyspieszenia  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  oraz momentu pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ .

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie  $z=0$  kładąc  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$ .

**Odp.**

$$1) \quad \vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k}, \quad \vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

$$2) \quad \vec{r} = r\vec{e}_r \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta + (2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m[0\vec{e}_r - r^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi]$$

$$3) \quad \vec{e}_r = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = -mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

**Zadanie 2.** Rozważyć toroidalny ortogonalny układ współrzędnych. W układzie toroidalnym do określenia położenia ciała służą współrzędne  $r, \varphi, \psi$  których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = (a + r \cos(\varphi)) \cos \psi$$

$$y = (a + r \cos(\varphi)) \sin \psi$$

$$z = r \sin \varphi$$

gdzie  $a$ -stała dodatnia, przy czym  $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \psi < 2\pi$ .

1) Znaleźć związek między wersorami toroidalnego układu współrzędnych

a)  $\vec{e}_r$

b)  $\vec{e}_\varphi$

c)  $\vec{e}_\psi$

oraz wersorami układu kartezjańskiego.

2) Wyrazić wektory położenia  $\vec{r}$  oraz prędkości  $\dot{\vec{r}}$  we współrzędnych toroidalnych.

3) Znaleźć we współrzędnych toroidalnych składowe wektora przyspieszenia

a)  $a_r$

b)  $a_\varphi$

c)  $a_\psi$

**Zadanie 3.** Znaleźć w układzie biegunowym tor, po jakim w płaszczyźnie równoległej do powierzchni ziemi powinien lecieć samolotem ponadźwiękowym z prędkością o stałej wartości równej  $v$  pilot, który chce, aby jego koledzy stojący na lotnisku usłyszeli w tym samym czasie huk silnika z całego toru. Prędkość dźwięku  $v_d$  jest znana. Założyć, iż  $r(\varphi=0)=r_0$ . Założyć ponadto, iż odległość samolotu od lotniska jest znacznie większa od jego wysokości nad lotniskiem. Ruch samolotu rozpatrywać jako ruch zachodzący na płaszczyźnie położonej w stałej odległości od powierzchni ziemi.

Wsk. Składowa radialna prędkości samolotu  $v_r = -v_d$ ,  $v_\varphi = \pm\sqrt{v^2 - v_r^2}$

**Zadanie 4.** Ciało o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r} \text{ - wektor wodzący ciała, } \alpha \text{ - stała})$$

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi  $E$  i jest mniejsza od zera, zaś moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych ma wartość

$$L \neq 0. \text{ Założyć iż } \frac{\alpha m}{L^2} > 1. \text{ Ponadto wiadomo iż dla } \varphi = 0 \text{ zachodzi } \frac{dr}{d\varphi} = 0.$$

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta i wzór na całkowitą energię ciała. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie  $u = \frac{1}{r}$ .

**Zadanie 5.** Punkt materialny o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły centralnej:  $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

(gdzie  $f(r)$  pewna nieznana funkcja odległości ciała  $r$  od początku układu współrzędnych) po torze danym w układzie biegunowym wzorem:

a)  $r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos\left(\frac{1}{4}\varphi\right)}$

b)  $r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)}$

gdzie  $\varphi$  - kąt określający położenie ciała w biegunowym układzie współrzędnych.

1) Znaleźć wartość prędkości  $v = |\vec{v}|$  w zależności od  $r$ .

2) Wyznaczyć zależność  $\varphi(t)$  - kąta  $\varphi$  od czasu.

3) Wykazać, że wartość siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych) czyli zachodzi  $f(r) = \frac{\text{const}}{r^3}$ . Czy siła ta działa w kierunku początku układu współrzędnych czy w kierunku przeciwnym?

Znane są warunki początkowe ruchu  $r(t=0)=r_0$ ,  $\varphi(t=0)=0$ ,  $v(t=0)=v_0$ .

*Wsk.* Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Zależność wartości prędkości  $v$  od  $r$  można określić wykorzystując równanie toru  $r = r(\varphi)$  oraz wzory określające energię kinetyczną ciała:  $T = \frac{L^2}{2m} \left[ \left( \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$  oraz  $T = \frac{mv^2}{2}$ . Brakujące stałe można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta.

**Odp. (częściowa)**

$$a) v(r) = \frac{1}{4} v_0 \sqrt{1 + \frac{15r_0^2}{r^2}}, \quad \varphi(t) = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{v_0 t}{4r_0} \right)$$

$$b) v(r) = v_0 \sqrt{16 - 15 \frac{r_0^2}{r^2}}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( \frac{4v_0 t}{r_0} \right)$$

**Zadanie 6.** W ruchu pod wpływem siły centralnej punkt materialny o masie  $m$  porusza się po spirali logarytmicznej opisanej w układzie biegunowym wzorem  $r = ae^{b\varphi}$  ( $a > 0, b$  - stałe).

Siła działająca na punkt materialny jest stale skierowana w kierunku początku układu współrzędnych. Znaleźć zależność  $\varphi = \varphi(t)$  oraz  $r = r(t)$  gdy dla  $t = 0$   $\varphi(t = 0) = 0$  oraz w chwili początkowej ruchu

a) wartość prędkości  $v(t = 0) = v_0$ .

b) wartość siły  $|\vec{F}(t = 0)| = F_0$

Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych).

**Odp. Do punktu a (częściowa)**  $\varphi(t) = \frac{1}{2b} \ln \left( \pm \frac{2bv_0}{a\sqrt{b^2 + 1}} t + 1 \right) \quad r(t) = \sqrt{\pm \frac{2abv_0}{\sqrt{b^2 + 1}} t + a^2}$

**Zadanie 7.** Punkt materialny o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły centralnej. Wartość bezwzględna jego prędkości  $v$  jest odwrotnie proporcjonalna do odległości  $r$  od centrum siły, którego położenie pokrywa się z początkiem układu współrzędnych tzn.  $vr = \text{const}$ . Wiadomo ponadto, iż w chwili początkowej  $t=0$  spełnione są warunki  $r(t = 0) = r_0$ ,  $\varphi(t = 0) = 0$ ,  $v(t = 0) = v_0$ , kąt między wektorem wodzącym punktu, a wektorem jego prędkości jest równy

$$\alpha_0 \left( \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \right).$$

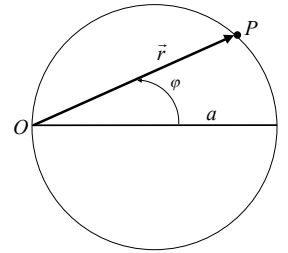
- 1) Wyznaczyć wartość momentu pędu punktu materialnego.
- 2) Wyznaczyć tor ruchu punktu w układzie biegunowym wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu o początku w centrum siły wiedząc iż w trakcie ruchu ciała  $\dot{\varphi}(t) > 0$ .
- 3) Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły. Jaki jest zwrot tej siły?
- 4) Określić wartość siły w chwili czasu  $t=0$ . Określić wartość energii punktu materialnego przy założeniu iż wartość energii potencjalnej w nieskończonej odległości od centrum siły jest równa 0.

**Odp. (do punktu 4)**  $|\vec{F}(t = 0)| = \frac{mv_0^2}{r_0}, E = 0$

*Wsk.* Moment pędu  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$  i energia całkowita są stałymi ruchu

**Zadanie 8.** W ruchu pod wpływem siły centralnej punkt materialny  $P$  o masie  $m$  porusza się po okręgu o średnicy  $a$  przechodzącym przez początek układu współrzędnych  $O$  położony w centrum siły. Założyć iż punkt materialny nie przechodzi przez punkt  $O$ . Wartość momentu pędu ciała w trakcie ruchu wynosi  $L$

- Wykazać, że wartość siły wywołującej ten ruch jest odwrotnie proporcjonalna do piątej potęgi odległości od początku układu współrzędnych  $O$ .
- Znaleźć wartość prędkości ciała gdy znajdowało się ono w odległości  $r_o$  od punktu  $O$
- Znaleźć związek między kątem  $\varphi$  a czasem ruchu zakładając, że  $\varphi(t=0)=0$  oraz w trakcie ruchu  $\dot{\varphi} > 0$ ,  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ .



**Wsk.**  $r = a \cos(\varphi)$       **Odp. (częściowa).**  $t = \frac{ma^2}{4L}(2\varphi + \sin(2\varphi))$

**Zadanie 9.** Punkt materialny porusza się pod wpływem siły centralnej po lemniskacie o równaniu w układzie biegunowym:  $r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$  gdzie  $a$  to stała. Wykazać, że wartość siły wywołującej ten ruch jest odwrotnie proporcjonalna do siódmej potęgi promienia wodzącego, jeśli centrum siły pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.

**Zadanie 10.** Dla ciała o masie  $m$  poruszającego się pod wpływem siły centralnej  $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{r}$

( $\alpha$  - stała dodatnia) po paraboli o równaniu w układzie biegunowym wprowadzonym w

płaszczyźnie ruchu  $z=0$ :  $r(\varphi) = \frac{P}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}$  gdzie  $P = \frac{L_z^2}{m\alpha}$

znaleźć równanie wiążące czas trwania ruchu z kątem  $\varphi$ . Znana jest z-owa składowa momentu pędu ciała  $L_z$ . Założyć iż  $\varphi(t=0) = \varphi_0$ .

**Wsk.** Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego zastosować podstawienie  $\xi = \tan\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)$ .

**Odp.**  $t = \frac{L_z^3}{2m\alpha^2} \left[ \tan\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) + \frac{1}{3} \tan^3\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) \right]$ .

**Zadanie 11.** Elipsa o dużej półosi równej  $a$  oraz parametrze  $P$  jest torem ruchu ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych o wartości odwrotnie proporcjonalnej do jego odległości od początku układu

współrzędnych. Określić wartość stosunku  $\frac{v_P}{v_A}$  gdzie  $v_P$  - wartość prędkości ciała poruszającego się

się po elipsie w punkcie położonym najbliżej od początku układu współrzędnych oraz  $v_A$  - wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie w punkcie położonym najdalej od początku układu współrzędnych.

**Wsk.** Równanie parametryczne elipsy w układzie biegunowym:

$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$  gdzie  $P$  - parametr elipsy,  $\varepsilon$  - mimośród elipsy.

**Odp.**  $\frac{|\vec{v}_P|}{|\vec{v}_A|} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{P}{a}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{P}{a}}}$