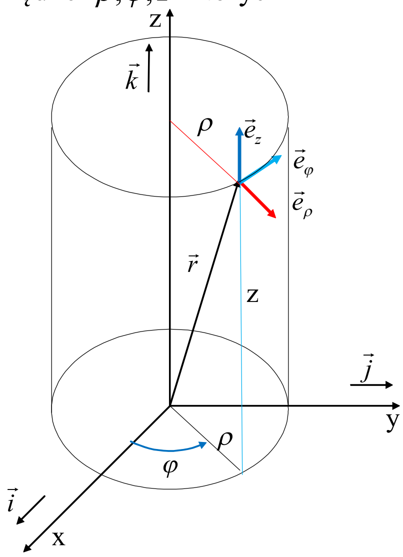
ID

Zadanie 1 (zadanie rozwiązać wykorzystują wzory wyprowadzone w zadaniu 1 z serii 1)

1) W układzie cylindrycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne ρ, φ, z których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = \rho \cos(\varphi) \qquad y = \rho \sin(\varphi) \qquad z = z$$



Znaleźć związek pomiędzy wersorami cylindrycznego układu współrzędnych $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych cylindrycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.

Zadanie 2. Rozważyć toroidalny ortogonalny układ współrzędnych. W układzie toroidalnym do określenia położenia ciała służą współrzędne r, φ, ψ których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = (a + r\cos(\varphi))\cos\psi$$
$$y = (a + r\cos(\varphi))\sin\psi$$
$$z = r\sin\varphi$$

gdzie a-stała dodatnia , przy czym $0 \le r \le a, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \psi < 2\pi$.

1) Znaleźć związek między wersorami toroidalnego układu współrzędnych

a) $\vec{e}_r$ *b)* $\vec{e}_\varphi$ *c)* $\vec{e}_\psi$

oraz wersorami układu kartezjańskiego.

2) Wyrazić wektory położenia $\vec{r}$, prędkości $\dot{\vec{r}}$, we współrzędnych toroidalnych.

3) Znaleźć we współrzędnych toroidalnych składowe wektora przyspieszenia

a) a_r *b)* a_φ *c)* a_ψ

Odp. (częściowa)

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi)\cos(\psi)\vec{i} + \cos(\varphi)\sin(\psi)\vec{j} + \sin(\varphi)\vec{k},$$

$$\vec{r} = (r + a\cos\varphi)\vec{e}_r - a\sin\varphi\vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + (a + r\cos\varphi)\dot{\psi}\vec{e}_\psi,$$

$$a_r = \left(\ddot{r} - (a + r\cos\varphi)\cos\varphi\dot{\psi}^2 - r\dot{\varphi}^2\right)$$

Zadanie 3. Znaleźć w układzie biegunowym tor, po jakim w płaszczyźnie równoległej do powierzchni ziemi powinien lecieć samolotem ponaddźwiękowym z prędkością o stałej wartości równej *v* pilot, który chce, aby jego koledzy stojący na lotnisku usłyszeli w tym samym czasie huk silnika z całego toru. Prędkość dźwięku v_d jest znana. Założyć, iż $r(\varphi = 0) = r_0$. Założyć ponadto, iż odległość samolotu od lotniska jest znacznie większa od jego wysokości nad lotniskiem. Ruch samolotu rozpatrywać jako ruch zachodzący na płaszczyźnie położonej w stałej odległości od powierzchni ziemi.

Wsk. Składowa radialna prędkości samolotu $v_r = -v_d$, $v_\varphi = \pm\sqrt{v^2 - v_r^2}$

Zadanie 4. Dla ciała o masie *m* poruszającego się pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ (α - stała dodatnia) po paraboli o równaniu w układzie biegunowym wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu *z*=0 : $r(\varphi) = \frac{P}{1+\cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdzie $P = \frac{L_z^2}{m\alpha}$

znaleźć równanie wiążące czas trwania ruchu z kątem φ. Znana jest z-owa składowa momentu pędu ciała L_z. Założyć iż $\varphi(t=0) = \varphi_0$.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego zastosować podstawienie $\xi = tg\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)$.

Zadanie 5. Elipsa o dużej półosi równej *a* oraz parametrze *P* jest torem ruchu ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych o wartości odwrotnie proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych. Określić wartość stosunku $\frac{v_P}{v_A}$ gdzie v_P –wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie w punkcie położonym najbliżej od początku układu współrzędnych oraz v_A- wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie w punkcie położonym najdalej od początku układu współrzędnych.

Wsk. Równanie parametryczne elipsy w układzie biegunowym:

$r = \frac{P}{1+\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdzie P - parametr elipsy, ε -mimośród elipsy.

Zadanie 6. Ciało o masie *m* porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}$ ($\vec{r}$ -wektor wodzący ciała, α -stała)

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi *E* i jest większa od zera, zaś moment pędu ciała względem początku układu współrzędnych ma wartość *L≠0*. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} < 1$. Ponadto wiadomo iż odległość ciała od początku układu współrzędnych *r* osiąga wartość minimalną dla $\varphi = 0$.

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta i/lub wzór na całkowitą energię ciała. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

Zadanie 7. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}$ ($\vec{r}$ -wektor wodzący ciała, α -stała)

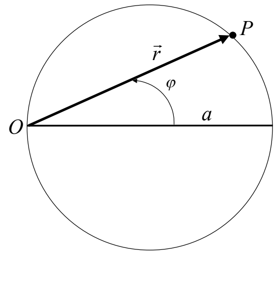
Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi E i jest mniejsza od zera, zaś moment pędu ciała względem początku układu współrzędnych ma wartość $L \neq 0$. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} > 1$. Ponadto wiadomo iż dla $\varphi = 0$ zachodzi $\frac{dr}{d\varphi} = 0$

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta i/lub wzór na całkowitą energię ciała. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

Zadanie 8. Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru po którym porusza się ciało o masie m w polu siły centralnej opisanej potencjałem $V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. α - stała dodatnia, β -stała (dodatnia lub ujemna). Założyć iż znamy wartość momentu pędu ciała $L \neq 0$ oraz jego całkowitą energię E. Ponadto zakładamy iż $1 - \frac{2\beta m}{L^2} > 0$. Uzależnić równanie toru od wartości momentu pędu oraz energii całkowitej ciała. Kiedy ruch ciała jest ograniczony w przestrzeni? W przypadku ruchu ograniczonego w przestrzenia określić zmianę kąta φ odpowiadającą przemieszczeniu się ciała pomiędzy punktami na torze ruchu znajdującymi się w minimalnej odległości od początku układu współrzędnych. Dla jakich wartości momentu pędu ruch ciała jest periodyczny?

Zadanie 9. W ruchu pod wpływem siły centralnej punkt materialny o masie m porusza się po spirali logarytmicznej opisanej w układzie biegunowym wzorem $r = ae^{b\varphi}$ (a>0,b-stałe).
Siła działająca na punkt materialny jest stale skierowana w kierunku początku układu współrzędnych. Znaleźć zależność $\varphi = \varphi(t)$ oraz $r = r(t)$ gdy dla $t = 0$ $\varphi(t = 0) = 0$ oraz wartość prędkości $v(t = 0) = v_0$. Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych).

Zadanie 10. W ruchu pod wpływem siły centralnej punkt materialny P o masie m porusza się po okręgu o średnicy a przechodzącym przez początek układu współrzędnych O położony w centrum siły . Założyć iż punkt materialny nie przechodzi przez punkt O. Wartość momentu pędu ciała w trakcie ruchu wynosi L



a) Wykazać, że wartość siły wywołującej ten ruch jest odwrotnie proporcjonalna do piątej potęgi odległości od początku układu współrzędnych O.

b) Znaleźć wartość prędkości ciała gdy znajdowało się ono w odległości r_o od punktu O

c) Znaleźć związek między kątem φ a czasem ruchu zakładając, że $\varphi(t=0)=0$ oraz w trakcie ruchu $\dot{\varphi}>0$, $\varphi<\frac{\pi}{2}$.

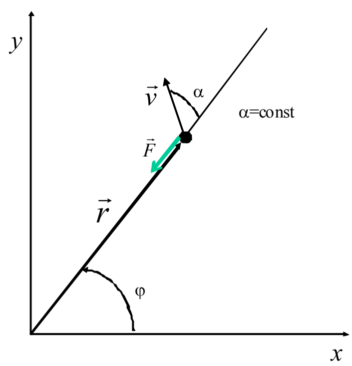
Wsk. $r=a\cos(\varphi)$ ***Odp. (częściowa).*** $t=\frac{ma^2}{4L}(2\varphi+\sin(2\varphi))$

Zadanie 11. Punkt materialny porusza się pod wpływem siły centralnej po lemniskacie o równaniu w układzie biegunowym: $r^2=2a^2\cos(2\varphi)$ gdzie a to stała. Wykazać, że wartość siły wywołującej ten ruch jest odwrotnie proporcjonalna do siódmej potęgi promienia wodzącego, jeśli centrum siły pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.

Zadanie 12. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej. Wartość bezwzględna jego prędkości υ jest odwrotnie proporcjonalna do odległości r od centrum siły, którego położenie pokrywa się z początkiem układu współrzędnych tzn. $\upsilon r=const$. Wyznaczyć tor ruchu punktu w układzie biegunowym wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu o początku w centrum siły wiedząc iż w trakcie ruchu ciała $\dot{\varphi}(t)>0$.Wiadomo ponadto, iż w chwili początkowej t=0 spełnione są warunki $r(t=0)=r_0$, $\varphi(t=0)=0$, $\upsilon(t=0)=\upsilon_0$, kąt między wektorem wodzącym punktu, a wektorem jego prędkości jest równy $\alpha_0\left(\alpha_0<\frac{\pi}{2}\right)$. Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły.

Wsk. Moment pędu $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ jest stałą ruchu

Zadanie 13. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych. Wiadomo iż w trakcie ruchu wektor wodzący punktu materialnego $\vec{r}$ tworzy **stały w czasie** kąt α z wektorem jego prędkości $\vec{v}$, zaś odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych $r=|\vec{r}|$ oraz miara kąta φ jaki tworzy jego wektor wodzący z osią Ox rośnie. Ponadto wiadomo, iż w chwili t=0 odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych wynosiła $r(t=0)=r_0$, przy czym kąt jaki wektor wodzący punktu materialnego tworzył z osią Ox był równy $\varphi(t=0)=0$, zaś wartość prędkości punktu materialnego wynosiła $|\vec{v}(t=0)|=v_0$. Określić zależności



a) odległości punktu materialnego od początku układu współrzędnych czyli określić postać zależności $r(t)$.

b) kąta jaki jego wektor wodzący tworzył z osią Ox w funkcji czasu czyli określić postać zależności $\varphi(t)$.

Wsk. Moment pędu $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$ jest stałą ruchu

Odp. $r=\sqrt{r_0^2+2r_0v_0\cos(\alpha)t}$ **,** $\varphi=\frac{1}{2}tg(\alpha)\ln\left(1+\frac{2v_0\cos(\alpha)t}{r_0}\right)$

Zadania uzupełniające związane z rozwiązywaniem różniczkowych równań ruchu

Zadanie 1U. Punkt materialny o masie *m porusza* się po linii prostej równoległej do osi Ox pod wpływem siły harmonicznej $\vec{F} = -kx\vec{i}$ (k-stała dodatnia) oraz dodatkowej siły $\vec{F}_1 = F_1\vec{i}$ gdzie

a) $F_1 = F_0 = const$

b) $F_1 = F_1(t) = at$ (gdzie a-stała, t-czas)

c) $F_1 = F_1(t) = F_0\cos(\Omega t)$ (gdzie F_0, Ω -stałe, t-czas)

Znaleźć zależność położenia punktu od czasu $x(t)$ przy założeniu iż $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=0$.

Wsk. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania pełnego.

Rozwiązania szczególnego równania pełnego niejednorodnego można poszukiwać w postaci:

Ad a) $x_{sz} = C \quad gdzie \quad C - stala$

Ad b) $x_{sz} = Ct \quad gdzie \quad C - stala$

Ad c) $x_{sz} = C\cos(\Omega t) + D\sin(\Omega t) \quad gdy \quad \Omega \neq \omega \quad gdzie \quad C, D - stale,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$x_{sz} = Ct\cos(\Omega t) + Dt\sin(\Omega t) \quad gdy \quad \Omega = \omega \quad gdzie \quad C, D - stale,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Zadanie 2U. Punkt materialny o masie m porusza się po linii prostej równoległej do osi Ox pod wpływem jednocześnie siły harmonicznej $\vec{F}_h = -kx\vec{i}$ (k-stała dodatnia), siły oporów ruchu $\vec{F}_o = -b\dot{x}\vec{i}$ (b-stała dodatnia) oraz dodatkowej siły

a) $\vec{F}_1 = F_0\cos(\Omega t)\vec{i}$ gdzie F_0, Ω -stałe.

b) $\vec{F}_1 = F_0\sin(\Omega t)\vec{i}$ gdzie F_0, Ω -stałe.

Znaleźć ogólną postać zależności położenia punktu od czasu $x(t)$ przy założeniu iż $\frac{b^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$.

Wsk. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania pełnego.

Rozwiązania szczególnego równania pełnego niejednorodnego można poszukiwać w postaci:

$x_{sz} = C\cos(\Omega t) + D\sin(\Omega t) \quad gdzie \quad C, D - stale$