

I

Zadanie 1 (seria I). W układach krzywoliniowych ortogonalnych, w których do określenia położenia służą współrzędne $q_i (i=1,2,3)$, wektory wodzący $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ i

przyspieszenia $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ można przedstawić w następujących postaciach opisujących rozkład tych wektorów na składowe:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

gdzie $\vec{e}_i$ -wersory układu krzywoliniowego spełniające relacje

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i=j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Ponadto wiadomo iż wersor $\vec{e}_i$ w dowolnym punkcie przestrzeni jest styczny do linii wzdłuż której zmienia się tylko współrzędna q_i i wskazuje kierunek przy przesuwaniu się wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta.

1) Pokazać iż zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{e}_i &= \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k} \right) & \text{b) } r_i &= \frac{1}{2L_i} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i} \\ \text{c) } v_i &= L_i \dot{q}_i & \text{d) } a_i &= \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right] \end{aligned}$$

gdzie: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -wersory układu kartezjańskiego, x, y, z -składowe wektora wodzącego w układzie

kartezjańskim, q_i -współrzędne krzywoliniowe ($i=1,2,3$), $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$,

$$L_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \text{ -współczynniki Lamé } (i=1,2,3),$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2(q_1, q_2, q_3) + y^2(q_1, q_2, q_3) + z^2(q_1, q_2, q_3),$$

$$f(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2]$$

2) Pokazać iż moment pędu ciała o masie m można zapisać w następującej postaci z wykorzystaniem wyznacznika

$$\vec{L} = L_1 \vec{e}_1 + L_2 \vec{e}_2 + L_3 \vec{e}_3 = m \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

pozwalającej na znalezienie rozkładu tego wektora na składowe L_1, L_2, L_3 w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

3) Pokazać iż operator gradientu działający na funkcje skalarną zależną od współrzędnych

uogólnionych można wyrazić wzorem $grad = \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$

Wsk. (do udowodnienia)

$$1) \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (\text{do punktu 1d})$$

2) dla dowolnych dwóch wektorów o znanym rozkładzie na składowe w układzie krzywoliniowym ortogonalnym $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ oraz $\vec{B} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ zachodzi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3, \quad |\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Zadanie 2.

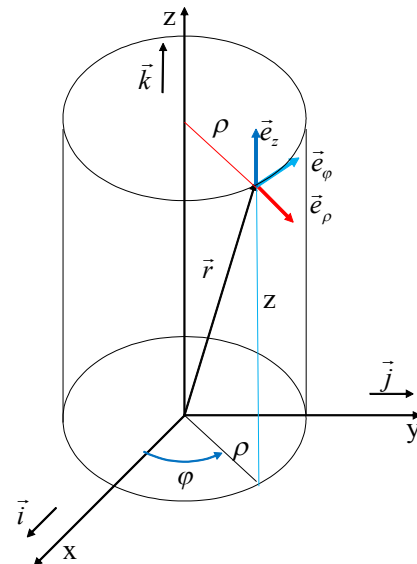
W układzie cylindrycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne ρ, φ, z których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = \rho \cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) \quad z = z$$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ cylindrycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych cylindrycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Zapisać w tym układzie operator gradientu.

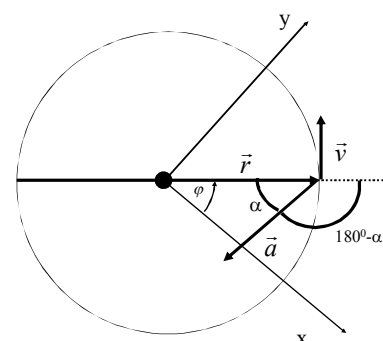
3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie $z=0$ kładąc $z=0$ oraz wprowadzając oznaczenie $r = \rho$.



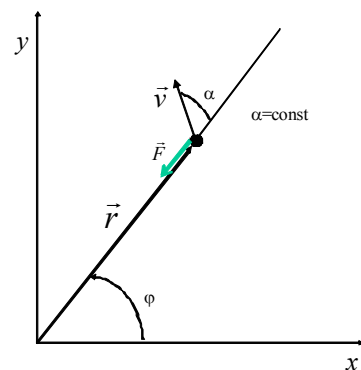
Zadanie 3. Znaleźć zależność od czasu $\varphi(t)$ czyli kąta jaki tworzy z osią Ox wektor wodzący punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r_0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeżeli kąt między promieniem wodzącym a wektorem przyspieszenia ma stałą wartość $\pi - \alpha$ przy czym $\alpha \in (0, \pi/2)$. Przyjąć, że $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $\dot{\varphi} = u$.

Od. $\varphi(t) = ctg(\alpha) \ln[ctg(\alpha)\omega_0 t + 1]$



Zadanie 4. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych. Wiadomo iż w trakcie ruchu wektor wodzący punktu materialnego $\vec{r}$ tworzy stały w czasie kąt α z wektorem jego prędkości $\vec{v}$, zaś odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych $r = |\vec{r}|$ oraz miara kąta φ jaki tworzy jego wektor wodzący z osią Ox rośnie. Ponadto wiadomo, iż w chwili $t=0$ odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych wynosiła $r(t=0) = r_0$, przy czym kąt jaki wektor wodzący punktu materialnego tworzył z osią Ox był równy $\varphi(t=0) = 0$, zaś wartość prędkości punktu materialnego wynosiła $|\vec{v}(t=0)| = v_0$.



1) Określić równanie toru po którym porusza się to ciało.

2) Określić zależności od czasu:

a) odległości punktu materialnego od początku układu współrzędnych czyli określić postać zależności $r(t)$.

b) kąta jaki jego wektor wodzący tworzył z osią Ox czyli określić postać zależności $\varphi(t)$.

3) Pokazać iż wypadkowa siła działająca na ciało jest odwrotnie proporcjonalna do 3 potęgi odległości od centrum siły

Wsk. Moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$ jest stałą ruchu, $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$, przy rozwiązywaniu

punktu 3 wprowadzić i wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ gdzie $L = |\vec{L}|$.

Odp. (częściowa) $r = \sqrt{r_0^2 + 2r_0v_0 \cos(\alpha)t}$, $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\alpha) \ln \left(1 + \frac{2v_0 \cos(\alpha)t}{r_0} \right)$

Zadanie 5 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

po torze danym w układzie biegunowym wzorem: $r(\varphi) = \frac{b}{\varphi}$ (gdzie b -znana stała dodatnia).

Wiadomo iż dla $t = 0$ $r(t = 0) = r_0$ oraz wartość prędkości $v(t = 0) = v_0$. Wiadomo ponadto iż nieznana co do wartości $\dot{\varphi}(t = 0)$ jest dodatnia.

1) Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch ciała jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych)

2) Określić wartość momentu pędu ciała.

3) Określić całkowitą energię ciała $E = T + V$ przy założeniu iż wartość energii potencjalnej V w nieskończonej odległości od centrum siły jest równa 0.

4) Znaleźć zależność $\varphi = \varphi(t)$ oraz $r = r(t)$. Po jakim czasie ciało spadnie na centrum siły?
Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$.

Moment pędu można określić wykorzystując wzory określające energię kinetyczną ciała:

$T = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right]$ (do udowodnienia) oraz $T = \frac{mv^2}{2}$ a także warunki początkowe ruchu.

Odp. (częściowa) czas spadku $t_s = \frac{r_0}{v_0} \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}$, energia $E = \frac{mv_0^2}{2 \left(1 + \frac{b^2}{r_0^2} \right)}$

Zadanie 6. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r} \text{-wektor wodzący ciała, } \alpha \text{-stała})$$

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi E i jest większa od zera, zaś moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych ma wartość $L \neq 0$. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} < 1$. Ponadto wiadomo iż odległość ciała od początku układu współrzędnych r osiąga wartość minimalną dla $\varphi = 0$.

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ i wzór na całkowitą energię

$$\text{ciała } E = T + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r).$$

Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

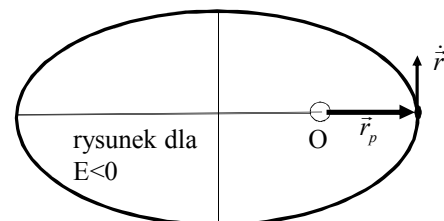
Zadanie 7. Ciało o masie m porusza się pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, będącej siłą centralną. Ponadto siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od początku układu współrzędnych, tzn. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$. W oparciu o równania ruchu pokazać, iż wektor Runge-Lentza zdefiniowany wzorem: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $\vec{L}$ - moment pędu ciała)

a) jest stały w trakcie ruchu ciała

b) słuszny jest wzór: $\vec{M} = |\alpha| \varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ gdzie $\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, wektor

$\vec{r}_p$ jest wektorem wodzącym punktu na torze ciała najbliższym położonym od początku układu współrzędnych.

(ze wzoru tego wynika m.in. iż wektor jest Runge-Lentza jest równoległy do dużej półosi elipsy o mimośrodzie ε , będącej torem ruchu ciała w przypadku gdy energia ciała jest ujemna $E < 0$)



Wsk.

- Skorzystać z zasady zachowania momentu pędu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ dla dowolnych wektorów $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$
- Aby udowodnić wzór $\vec{M} = |\alpha| \varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ wygodnie jest obliczyć wektor $\vec{M}$ w punkcie w którym odległość ciała od centrum siły (początku układu współrzędnych) jest najmniejsza.