I

Zadanie 1 (seria I). W układach krzywoliniowych ortogonalnych, w których do określenia położenia służą współrzędne $q_i\,(i=1,2,3)$, wektory wodzący $\vec{r}$, prędkości $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}$ i przyspieszenia $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}$ można przedstawić w następujących postaciach opisujących rozkład tych wektorów na składowe:

$$\vec{r}=\sum_{i=1}^{3} r_i\vec{e}_i \qquad \vec{v}=\sum_{i=1}^{3} v_i\vec{e}_i \qquad \vec{a}=\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$$

gdzie $\vec{e}_i$-wersory układu krzywoliniowego spełniające relacje

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{Bmatrix}1 & gdy & i=j\\ 0 & gdy & i\neq j\end{Bmatrix},\ \vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$$

Ponadto wiadomo iż wersor $\vec{e}_i$ w dowolnym punkcie przestrzeni jest styczny do linii wzdłuż której zmienia się tylko współrzędna q_i i wskazuje kierunek przy przesuwaniu się wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta.

1) Pokazać iż zachodzą następujące relacje:

a) $\vec{e}_i=\frac{1}{L_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{1}{L_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right)$ b) $r_i=\frac{1}{2L_i}\frac{\partial|\vec{r}|^2}{\partial q_i}$

c) $v_i=L_i\dot{q}_i$ d) $a_i=\frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_i}\right]$

gdzie: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ -wersory układu kartezjańskiego, *x,y,z*–składowe wektora wodzącego w układzie kartezjańskim, q_i-współrzędne krzywoliniowe $(i=1,2,3)$, $\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}$,

$L_i=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ -współczynniki Lamé $(i=1,2,3)$,

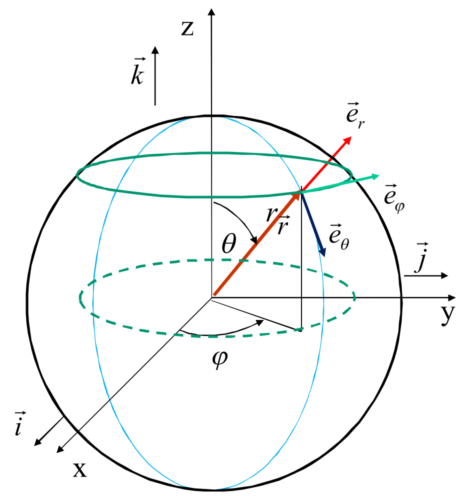
$f(q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3)=\frac{1}{2}|\vec{v}|^2=\frac{1}{2}\left[v_1^2+v_2^2+v_3^2\right]$

Wsk. do punktu d) do udowodnienia $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}$

Zadanie 2.

W układzie sferycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne r,θ,φ których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$x=r\cos(\varphi)\sin\theta \qquad y=r\sin(\varphi)\sin\theta \qquad z=r\cos\theta$



1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1=\vec{e}_r$, $\vec{e}_2=\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3=\vec{e}_\varphi$ sferycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1=\vec{i}$, $\vec{e}_2=\vec{j}$, $\vec{e}_3=\vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie *m* znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych sferycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a}=\ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$.

Wsk. do punktu 2)

$\vec{L}=m\begin{vmatrix}\vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi\\ r_r & r_\theta & r_\varphi\\ v_r & v_\theta & v_\varphi\end{vmatrix}$ gdzie r_r,r_θ,r_φ -składowe wektora wodzącego w układzie sferycznym,

v_r,v_θ,v_φ - składowe wektora prędkości w układzie sferycznym.

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie z=0 kładąc $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$.

Odp. (do punktu 1)

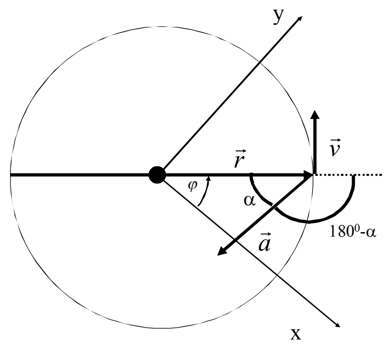
$\vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k}$,

$\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$

$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$

Pozostałe odpowiedzi na wykładzie

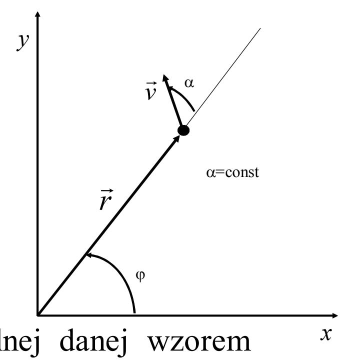
Zadanie 3. Znaleźć zależność od czasu $\varphi(t)$ kąta jaki tworzy z osią Ox wektor wodzący punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r_0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeżeli kąt między promieniem wodzącym a wektorem przyspieszenia ma stałą wartość $\pi - \alpha$ przy czym $\alpha \in (0, \pi/2)$. Przyjąć, że $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$.



Wsk. Przy rozwiazywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $\dot{\varphi} = u$.

Odp. $\varphi(t) = ctg(\alpha)\ln[tg(\alpha)\omega_0 t + 1]$

Zadanie 4. W pewnym ruchu punktu materialnego zachodzącym na płaszczyźnie kąt pomiędzy wektorem wodzącym $\vec{r}$ i wektorem prędkości $\vec{v}$ jest stały w czasie i równy α. Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu ciała równanie toru po którym porusza się ten punkt. Wiadomo iż $r(\varphi = 0) = r_0$.



Wsk. $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

Odp. $r(\varphi) = r_0 e^{ctg(\alpha)\varphi}$

Zadanie 5. Ciało o masie *m* porusza się pod wpływem siły centralnej danej wzorem $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$.

a) Pokazać iż, że moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ jest stały w trakcie ruchu ciała.

b) Wprowadzając układ biegunowy w płaszczyźnie ruchu ciała
   1) pokazać, że w trakcie ruchu ciała nie ulega zmianie wartość energii danej wzorem

   $$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

   gdzie *V(r)* oznacza energie potencjalną (potencjał) spełniający relację $f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$.

   2) pokazać, iż energie ciała $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(r)$ można wyrazić wzorami

   $$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right] + V(r)$$

   gdzie *L* –wartość momentu pędu ciała określonego względem początku układu współrzędnych

   3) pokazać iż spełnione jest równanie (wzór Bineta):

$$f(r) = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Wsk. $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$

Zadanie 6. Zakładamy, że siła w zadaniu 5 jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od początku układu współrzędnych $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$.

1) Wykorzystując relację $E = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right] + V(r)$ oraz $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$ pokazać, że równanie opisując tor ruchu ciała o masie m w układzie biegunowym w przypadku gdy $L \neq 0$ ma postać:

$r(\varphi) = \frac{P}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdy $\alpha > 0$ (siła skierowana w kierunku początku układu współrzędnych),

$r(\varphi) = \frac{P}{-1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdy $\alpha < 0$ (siła skierowana w kierunku przeciwnym)

przy czym $P = \frac{L^2}{m|\alpha|}$ oraz $\varepsilon = \sqrt{1 + E\frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, E oznacza energię, zaś L wartość momentu pędu ciała.

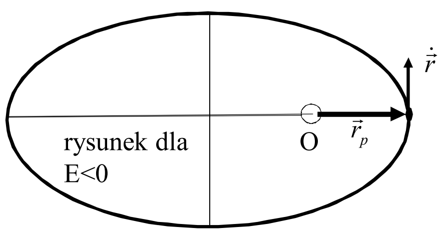
2) Uwzględniając fakt iż równanie $r(\varphi) = \frac{P}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}$ jest równaniem krzywej stożkowej (która w ogólności może być okręgiem, elipsą, parabolą lub hiperbolą) o ognisku w początku układu współrzędnych określić kiedy równanie to jest równaniem

a) okręgu
b) elipsy

3) W przypadku ruchu po elipsie określić związek wielkiej a i małej b półosi elipsy z α, m, E i L oraz znaleźć zależność okresu ruchu ciała od długości a -wielkiej półosi elipsy.

Zadanie 7. Ciało o masie m porusza się pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, będącej siłą centralną. Ponadto siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od początku układu współrzędnych, tzn. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$. W oparciu o równania ruchu pokazać, iż wektor Runge-Lentz'a zdefiniowany wzorem: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $\vec{L}$-moment pędu ciała)

a) jest stały w trakcie ruchu ciała
b) słuszny jest wzór: $\vec{M} = |\alpha|\varepsilon\frac{\vec{r}_p}{r_p}$ gdzie $\varepsilon = \sqrt{1 + E\frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, wektor $\vec{r}_p$ jest promieniem wodzącym punktu na torze ciała najbliżej położonym od początku układu współrzędnych.
(ze wzoru tego wynika m.in. iż wektor jest Runge-Lentz'a jest równoległy do dużej półosi elipsy o mimośrodzie ε, będącej torem ruchu ciała w przypadku gdy energia ciała jest ujemna $E < 0$)



Wsk.

- Skorzystać z zasady zachowania momentu pędu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ dla dowolnych wektorów $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

- Aby udowodnić wzór $\vec{M} = |\alpha| \varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ wygodnie jest obliczyć wektor $\vec{M}$ w punkcie w którym odległość ciała od centrum siły (początku układu współrzędnych) jest najmniejsza.

Zadanie 8. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej: $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie *f(r)* pewna nieznana funkcja odległości ciała r od początku układu współrzędnych). Wiadomo ponadto iż w trakcie ruchu wielkość $r\cos(3\varphi)$ jest stała (gdzie φ -kąt określający położenie ciała w biegunowym układzie współrzędnych).

1) Znaleźć wartość prędkości $v = |\vec{v}|$ w zależności od r.
2) Wyznaczyć zależność $\varphi(t)$-kąta φ od czasu .
3) Wykazać, że wartość siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych) czyli zachodzi $f(r) = \frac{const}{r^3}$.

Znane są warunki początkowe ruchu $r(t=0) = r_0$, $\varphi(t=0) = 0$, $v(t=0) = v_0$.

Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Zależność wartości prędkości v od r można określić wykorzystując postać zależności $r = r(\varphi)$ wynikającą w treści zadania oraz wzory określające energię kinetyczną ciała: $E_{kin} = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right]$ wynikający z rozwiązania zadania 5 oraz $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$. Brakujące stałe można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta.