Zadania z Fizyki Statystycznej

1. Wyznaczyć skok wartości pochodnej ciepła właściwego w temperaturze krytycznej dla gazu bozonów, w temperaturze w której pojawia się konensacja [1].

2. Wyznaczyć równanie stanu dla gazu fermionów o relatywistycznej zależności energii od pędu [1, 2]:
$$\varepsilon(p) = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$$
Zastosować podstawienie $p = mc\sinh\theta$

3. Znaleźć ciepło właściwe gazu idealnego w przypadku ultrarelatywistycznym [1, 4]:
$$\varepsilon(p) = pc$$

4. Znaleźć energię gazu doskonałego znajdującego się w cylindrycznym naczyniu o promieniu R i wysokości l obracającym się wokół swojej osi z częstością ω. Założyć, że obrót jest równoważny pojawieniu się dodatkowej energii potencjalnej:
$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$
gdzie r – jest odległością od osi walca, a m jest masą cząsteczki gazu [1].

5. Dla gazu kwantowego w wysokiej temperaturze (słaba degeneracja) obliczyć stosunek ciepła właściwego przy stałej objętości do ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu [2].

6. Znaleźć ciepło właściwe dla niskich temperatur dla gazu fermionów w <u>jednym</u> wymiarze [2].

7. Obliczyć średnią liczbę cząstek i równanie stanu dla gazu fermionów w <u>dwóch</u> wymiarach.

8. Znaleźć objętość przestrzeni fazowej (q_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots, N$ dla układu N oscylatorów harmonicznych odpowiadającej stałej wartości energii:
$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m\omega^2 q_i^2}{2}$$
gdzie ω jest częstością oscylatora, m jego masą [3].

9. Układ składa się z trzech cząstek mogących przebywać w jednym z trzech stanów jednocząstkowych o energiach: $-E$, 0 lub $+E$. Z warunku maksymalnej entropii wyznaczyć funkcję rozkładu metodą mnożników Lagrange'a, przy dodatkowym warunku:
$$\langle E \rangle = E_0$$

oznaczającym, że średnia wartość energii jest równa E_0 [3].

10. Układ złożony z N cząstek umieszczony jest w objętości V i temperaturze T. Każda z cząstek może mieć energię albo równą zeru albo równą $E = b/V$ gdzie $b = const$. Wyznaczyć równanie stanu tego układu [3].

11. Układ składa się z trzech cząstek, z których każda może przyjmować wartości energii: 0, $2E$, $5E$. Obliczyć sumę statystyczną i entropię przy warunkach:
a) cząstki są rozróżnialne,
b) cząstki są fermionami,
c) cząstki są bozonami,
d) cząstki są maxwellonami [3].

12. Pokazać następujący wzór dla entropii bozonów:
$$S = -k\sum_i \left[n_i \ln n_i - (1+n_i)\ln(1+n_i)\right]$$
gdzie n_i jest wartością rozkładu Bosego-Einsteina dla energii jednocząstkowej ε_i. [3]

13. Pokazać następujący wzór dla entropii fermionów:
$$S = -k\sum_i \left[n_i \ln n_i + (1-n_i)\ln(1-n_i)\right]$$
gdzie n_i jest wartością rozkładu Fermiego-Diraca dla energii jednocząstkowej ε_i. [3]

14. Układ posiada N równoodległych poziomów energii:
$$\varepsilon_n = n\varepsilon_0\ , \quad \text{gdzie } n = 1, 2, \ldots N$$
przy czym wszystkie wartości ε_n są małe w porównaniu z kT. Wyznaczyć sumę statystyczną, energię swobodną i ciepło właściwe układu [4].

15. Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny posiada poziomy energii:
$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n+1)$$
gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Stopień degeneracji poziomu ε_n wynosi:
$$W_n = n + 1$$
Wyznaczyć sumę statystyczną i energię wewnętrzną dla układu złożonego z N takich oscylatorów [4].

16. Energia potencjalna oscylatora anharmonicznego wynosi:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4$$

Obliczyć sumę statystyczną dla jednej cząstki:

$$z_{(1)} = \frac{V^{\frac{1}{3}}\sqrt{2\pi mkT}}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)/kT} dx$$

stosując przybliżone wyrażenie dla funkcji wykładniczej:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x \ll 1$$

a następnie wyznaczyć energię wewnętrzną i ciepło właściwe. Ile wynosi poprawka dla ciepła właściwego dla jednej cząstki pochodząca od wyrazów anharmonicznych z α i β? [4]

17. Znaleźć równanie stanu i ciepło właściwe dla słabo zdegenerowanego gazu fermionów. Skorzystać z rozwinięcia w szereg funkcji polilogarytmicznej.

18. Znaleźć sumę statystyczną dla kwantowego rotatora (cząsteczki dwuatomowej) o momencie bezwładności I, którego poziomy energetyczne wynoszą:

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

gdzie l jest orbitalną liczbą kwantową numerującą dozwolone wartości momentu pędu. Jak wiadomo z mechaniki kwantowej stopień degeneracji poziomu ε_l wynosi:

$$W_l = 2l + 1$$

W końcowym wyniku zamienić sumowanie przez całkowanie. Obliczyć ciepło właściwe na jeden rotator [5].

19. Stosując rozkład Maxwella prędkości cząstek w gazie doskonałym wyznaczyć średnią energię cząstek, a także energię najbardziej prawdopodobną.

20. Korzystając ze wzoru na wielki potencjał dla gazu fotonów (promieniowania) obliczyć entropię i energię swobodną. Porównać ze wzorami z termodynamiki [4].

21. Dany jest układ 4 cząstek z których każda może przyjmować dwie wartości energii: E_0 lub E_1. Znaleźć sumy statystyczne dla przypadków kiedy cząstki są rozróżnialne albo nierozróżnialne [5].

22. Znaleźć temperaturę kondensacji Bosego-Einsteina dla ciekłego helu ^{4}He. Koncentrację cząstek wyznaczyć z gęstości cieczy i masy cząstki helu. Skorzystać ze wzoru dla gazu bozonów.

23. Oszacować temperaturę przy której pojawia się degeneracja gazu elektronów w metalu. Założyć, że każdy atom metalu uwspólnia jeden elektron. Jako rozmiar atomu przyjąć wartość 0,2 nm.

24. Obliczyć współczynnik ściśliwości dla gazu fermionów w $T = 0°$K:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$$

25. Załóżmy, że istnieją cząstki, z którym najwyżej p może przebywać w tym samym stanie kwantowym. Obliczyć wielki potencjał, średnią liczbę cząstek w danej temperaturze, a stąd średnią liczbę obsadzeń poziomów jednocząstkowych. Przypadek $p = 1$ odpowiada fermionom, $p = \infty$ bozonom. Dla ustalonego p mówi się o tak zwanej *parastatystyce* [2].

26. Układ statystyczny składa się z dwóch rozróżnialnych cząstek. Każda cząstka może przebywać w jednym z trzech stanów. Jeśli obie cząstki są w tym samym stanie energia układu wynosi $-\epsilon$, jeśli są w różnych stanach energia układu wynosi 0. Obliczyć średnią energię i entropię układu jako funkcję temperatury. [6]

27. Układ statystyczny składa się z czterech rozróżnialnych cząstek, mogących przebywać w jednym z dwóch stanów. Jeśli wszystkie cząstki są w tym samym stanie energia układu wynosi $E = -6\epsilon$, jeśli trzy są w tym samym stanie $E = 0$, jeśli zajmują parami oba stany to $E = 2\epsilon$. Obliczyć średnią energię i entropię układu jako funkcję temperatury. [6]

28. Porówać ubytek entropii w mózgu czytelnika czytającego to zadanie, ze wzrostem entropii spowodowanym oświetleniem tego tekstu przez żarówkę. [7]

29. Obliczyć objętość przestrzeni fazowej rozkładu mikrokanonicznego dla gazu N cząstek ultrarelatywistycznych, dla których $E = c|\vec{p}|$. [7]

30. Korzystając z rozkładu mikrokanonicznego obliczyć energię swobodną F jako funkcję temperatury dla układu N rozróżnialnych cząstek mogących przebywać w jednym z dwóch stanów kwantowych o energii 0 lub ϵ. [7]

31. Dany jest układ N rozróżnialnych cząstek mogących przebywać w jednym z dwóch stanów kwantowych o energii $E_1 = 0$ lub $E_2 = \epsilon$. Poziom nr 1 jest niezdegenerowany, poziom nr 2 jest g-krotnie zdegenerowany. Stosując rozkład mikrokanoniczny wyznaczyć średnie liczby obsadzeń n_1 i n_2 obu poziomów w temperaturze T. [7]

32. Dany jest układ N cząstek mogących znajdować się na trzech poziomach energetycznych $-\epsilon, 0, \epsilon$. Hamiltonian układu jest następujący

$$H = \epsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad \sigma_i = -1, 0, 1$$

Wyznaczyć energię swobodną układu. [7]

33. Układ statystyczny składa się z N punktów. Jeśli dany punkt jest zajęty przez cząstkę energia punktu wynosi ϵ, jeśli w danym punkcie nie ma cząstki energia wynosi 0. Dodatkowo układ znajduje się w stałym polu magnetycznym B. Cząstki posiadają stały moment magnetyczny μ, który może być zorientowany w kierunku pola magnetycznego lub przeciwnie. Wyznaczyć średnią energię wewnętrzną i średnią magnetyzację układu w temperaturze T. [7]

34. Dany jest układ N rozróżnialnych cząstek, z których każda może mieć energię $-\epsilon$ lub ϵ. Dla $N \to \infty$ stosując rozkłady: mikrokanoniczny, kanoniczny i wielki kanoniczny obliczyć zależność entropii układu od energii wewnętrznej (liczone na jedną cząstkę). Sprawdzić, że wszystkie trzy rozkłady dają taki sam wynik. [7]

35. Dany jest układ N klasycznych cząstek nieoodziałujących ze sobą (gaz). Cząstki przebywają na powierzchni sfery. Wyznaczyć energię wewnętrzną U jako funkcję temperatury T i powierzchni A. [7]

36. N cząstek klasycznego gazu doskonałego znajduje się w pudełku o objętości V, którego scianki zawierają $N_0 \ll N$ miejsc mogących absorbować cząstki. Każde miejsce może zaabsorbować jedną cząstkę. Energia takiej cząstki wynosi $-\epsilon$. Stosując wielki rozkład kanoniczny obliczyć równanie stanu gazu. [7]

37. Poziomy energetyczne jednąstkowe wynoszą $E_n = n\epsilon$, gdzie degeneracja n-tego poziomu wynosi $g(n) = 2n+1$. Obliczyć sumę statystyczną dla N takich cząstek w przypadku kiedy są one fermionami albo bozonami. [7]

38. Pokazać, że dla gazu bozonów w pobliżu temperatury krytycznej T_c kondensacji Bosego-Einsteina współczynnik ściśliwości izotermicznej κ_T zależy od temperatury w następujący sposób [8]

$$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-1}$$

39. Znaleźć energię wewnętrzną i energię swobodną gazu złożonego z N cząstek umieszczonego w polu grawitacyjnym g. Wysokość naczynia z gazem wynosi h. [9]

40. Obliczyć średnią energię cząstek gazu doskonałego wylatujących z małego otworu w naczyniu z gazem. Zastosować rozkład Maxwella. [9]

41. Znaleźć zależność potencjału chemicznego od temperatury dla gazu bozonów. [9]

42. Obliczyć średnią prędkość molekuł azotu i tlenu w temperaturze pokojowej i ciśnieniu atmosferycznym. [10]

43. Gaz doskonały znajduje się w zewnętrznym polu o potencjale $V = a\cos\phi$, gdzie ϕ jest kierunkiem pomiędzy osią molekuły i kierunkiem pola. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa $f(\phi)$ i wartość średnią $\cos\phi$ w danej temperaturze T. [10]

44. Zakładając, że drgania atomów jednowymiarowego kryształu opisywane są anharmonicznym potencjałem: $U = ax^2 - bx^4$, gdzie x jest wychyleniem z położenia równowagi, obliczyć ciepło właściwe na jeden atom. Zastosować twierdzenie o wiriale (zasadę ekwipartycji energii) [10]:

$$\left\langle x\frac{\partial H}{\partial x}\right\rangle = kT$$

45. Obliczyć średnią liczbę fotonów promieniowania cieplnego w temperaturze 1000 K i w objętości 1 m^3. [10]

46. Wyznaczyć równanie Clausiusa-Clapeyrona dla gazu bozonów. [11]

47. Pokazać, że w granicy wysokich temperatur entropia gazu bozonów dąży do entropii gazu doskonałego (wzoru Sackura i Tetrodego). [12]

Literatura

[1] Л. Ландау, Е. Л. Лифшиц, *Статистическая физика*

[2] A. Isihara, *Statistical Physics*

[3] P. M. Morse, *Thermal Physics*

[4] В. Г. Левич, *Введение в статистическую физику*

[5] J. Stecki, *Termodynamika statystyczna*

[6] B. Bergersen, *Statistical physics*

[7] D. Dalvit. J. Frastai, I. Lawrie, *Problems on statistical mechanics*

[8] T. Dorlas, *Statistical mechanics*

[9] А.С. Кондратев, В.П. Романов, *Задачи по статистической физике*

[10] В.Ф. Ноздрев, А.А. Сенкевич, *Курс статистической физики*

[11] L. Reichl, *A modern course in statistical physics*

[12] D. Stauffer, D. Chowdhury, *Principles of equilibrium statistical mechanics*