

Jolanta Gałązka-Friedman

Karol Szlachta

Jak opracować i interpretować wyniki pomiarów.

ver. 1.5

Spis treści

1. O czym jest ten skrypt.....	4
2. O co chodzi z niepewnościami pomiarowymi?.....	6
3. Jak narysować wykres?.....	9
3.1. Co umieścić na wykresie?.....	10
3.2. Jak dobrać skalę na osiach wykresu?.....	11
3.3. Jakie jeszcze informacje powinny znaleźć się na wykresie?.....	11
3.4. Histogram.....	12
4. Jak poprawnie zapisać wynik?.....	13
5. Jak oszacować niepewność pomiaru.....	14
5.1. Metoda A.....	14
5.2. Metoda B.....	19
6. Jak „dodać” do siebie niepewności?.....	22
6.1. Niepewności pomiarów bezpośrednich.....	22
6.2. Niepewności pomiarów pośrednich.....	23
7. Jak dopasować teorię (model matematyczny) do danych doświadczalnych?.....	31
7.1. Metoda najmniejszych kwadratów.....	31
7.2. Dopasowanie do dowolnego modelu.....	34
8. Jeśli nie Gauss to co?.....	36
8.1. Rozkład dwumianowy.....	36
8.2. Rozkład Poissona.....	36
8.3. Przykład.....	39
9. Jak interpretować wyniki.....	41
9.1. Test χ^2	41
9.2. Niepewności rozszerzone/przedziały ufności.....	42

10. Jak rozwiązać problem małej liczby pomiarów oraz problem pomiarów o niejednakowej dokładności.....	45
10.1. Mała liczba pomiarów (rozkład t – Studenta).....	45
10.2. Pomiary o niejednakowej dokładności.....	48
11. Dodatki.....	51
11.1. Wartość oczekiwana i wariancja dla rozkładu Gaussa i rozkładu prostokątnego.....	51
11.2. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru.....	53
12. Końcówka.....	56
12.1. Czy zatem kość do gry jest uczciwa?.....	56
12.2. Jeszcze raz pomiary płytki.....	58
12.3. Przykład wykorzystania metody najmniejszych kwadratów.....	59
12.4. Pytania.....	62
12.5. Zadania.....	63
13. Posłowie.....	64
14. Literatura:.....	65

1. O czym jest ten skrypt.

Skrypt ten przeznaczony jest dla studentów początkowych lat studiów, rozpoczynających pracę z pomiarami, w szczególności w Centralnym Laboratorium Fizyki. Jest on kompilacją tekstów napisanych przez jednego z autorów (J. Gałązkę – Friedman) do skryptu pt. „Metody opracowania i analizy wyników pomiarów.” oraz nowych napisanych przez K. Szlachtę. Decyzję o napisaniu tak skompilowanego tekstu podjęliśmy po wieloletnich doświadczeniach z przybliżaniem tej problematyki studentom różnych Wydziałów Politechniki Warszawskiej.

W skrypcie przyjęto zasady zalecane przez JCGM¹ i opisane w dokumencie „Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement”, zwanym powszechnie Guidem. Główny Urząd Miar i Wag wydał opracowanie „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik.”, które jest, jak sam stwierdza na swojej stronie internetowej, polskim tłumaczeniem wymienionego wcześniej dokumentu. Stąd też niektórzy używają zamiennie nazw Guide i Przewodnik. Niestety polskie tłumaczenie nie jest dostępne na stronie GUM. Wersję angielską natomiast można bez kłopotu znaleźć w internecie i bez ograniczeń czerpać wiedzę u źródła.

Opis metod postępowania zalecanych w tym dokumencie został uzupełniony odpowiednimi modelami matematycznymi. Potrzebę ich zrozumienia najlepiej uzasadnia sam Guide: „3.4.8. Although this Guide provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty and professional skill. The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement. The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depend on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value².”

Aby spełnić oczekiwania rozbudzone tytułem rozdziału pierwszego, omówimy teraz krótko treść dalszych rozdziałów:

W rozdziale drugim zostały omówione błędy oraz niepewności pomiarowe. Problem niepewności pomiarowych został zilustrowany przykładem gry w kości. Długoletnie doświadczenie związane z prowadzeniem zajęć w Centralnym Laboratorium Fizycznym Wydziału Fizyki PW przekonało nas

1 Joined Comitee for Guides in Metrology

2 Chociaż ten przewodnik zawiera metody oceny niepewności nie może on zastąpić krytycznego myślenia, uczciwości intelektualnej oraz wiedzy. Ocena niepewności pomiarowych nie jest ani łatwym ani rutynowym czy też czysto matematycznym zadaniem. Wymaga szczegółowej wiedzy o mierzonej wielkości i samym pomiarze. Wiarygodność niepewności pomiarowej przypisanej do wyniku zależy zatem od zrozumienia, krytycznej analizy oraz uczciwości osób biorących udział w jego ocenie.

iż z pozoru prosty problem wykonania wykresu nastrocza studentom wiele trudności. Rozdział trzeci powinien przeczytać każdy student przed rozpoczęciem konstruowania wykresu!

W rozdziale czwartym podane są zasady poprawnego zapisywania wyniku końcowego wraz z niepewnością pomiarową.

Rozdział piąty to zapewne najważniejszy rozdział tego skryptu. Podaje on metody szacowania niepewności pomiarowych. Metoda A dotyczy szacowania niepewności metodami statystycznymi. Metoda B zaś dotyczy tak naprawdę pozostałych przypadków. Obie metody zilustrowane są przykładami.

W rozdziale szóstym podane są metody „dodawania” do siebie niepewności pomiarów bezpośrednich jak również „dodawanie” do siebie niepewności pomiarów pośrednich. Oba zagadnienia zilustrowano przykładami!

W rozdziale siódmym omówiono metodę najmniejszych kwadratów, która służy do znajdowania krzywej teoretycznej opisującej punkty doświadczalne otrzymanych w eksperymencie.

Rozdział ósmy na przykładzie rozpadu promieniotwórczego omawia problemy posługiwania się innymi rozkładami niż rozkład Gaussa. Zaprezentowany jest tu zarówno rozkład dwumianowy jak i rozkład Poissona. Należy zapoznać się z nim przed przystąpieniem do wykonywania ćwiczeń jądrowych.

W rozdziale dziewiątym omówiony jest zarówno test χ^2 jak i problem niepewności rozszerzonych.

W rozdziale „Dodatki” wyprowadzone są wzory opisujące wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Gaussa i rozkładu prostokątnego oraz wzór opisujący odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru. Ze wzorów tych korzystaliśmy już w poprzednich rozdziałach. Wyprowadzenie ich zostało przesunięte do osobnego rozdziału, aby nie zaciemniać prostych rozważań dotyczących elementarnych wiadomości z rachunku błędów.

W ostatnim rozdziale dowiemy się czy kość jest uczciwa i poznamy kolejne przykłady zastosowań rachunku błędów.

Z założenia skrypt jest opracowaniem uproszczonym, nie wyczerpującym tematu. Ograniczyliśmy się do najprostszych modeli matematycznych (rozkład Gaussa, rozkład Poissona, rozkład prostokątny i rozkład dwumianowy). Staraliśmy się użyć możliwie łatwego języka a rozważania teoretyczne uzupełnić praktycznymi wskazówkami. Będziemy wdzięczni za wszelkie uwagi, propozycje uzupełnień, etc.

Autorzy

2. O co chodzi z niepewnościami pomiarowymi?

Praca w laboratorium polega na obserwacji zjawisk fizycznych, wykonywaniu pomiarów i ich interpretacji w oparciu o poznane teorie i prawa fizyki. Oprócz poprawnego wykonania pomiarów, bardzo istotna jest analiza końcowych wyników pod względem ich wiarygodności i dokładności oraz przedstawienie uzyskanych rezultatów w sposób umożliwiający ich prawidłową interpretację, to jest jasno, przejrzysto i zgodnie z ogólnie przyjętymi zasadami.

Często jednym z zadań stojących przed nami jest wyznaczenie jakiejś wielkości fizycznej, takiej jak np. współczynnik załamania światła, długość fali, energia kwantów gamma itp. Wynik pomiaru każdej wielkości nie pokrywa się z jej wartością rzeczywistą, nazywaną również wartością prawdziwą. Przyczyny tego faktu mogą być różne i różnie mogą się one objawiać.

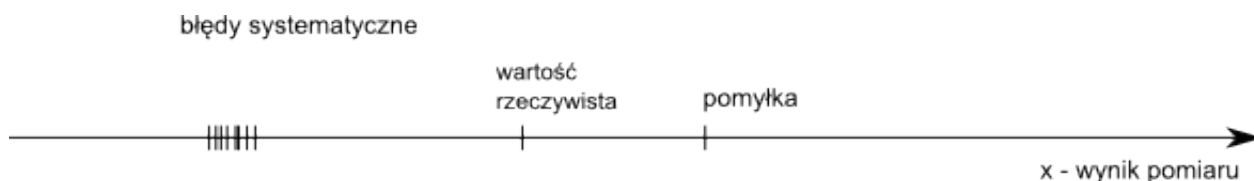
Na samym początku warto wyjaśnić że dziś pojęcie „błąd” rozumiane jest na kilka sposobów:

- w metrologii i Guidzie jako różnica pomiędzy wartością rzeczywistą (nie znaną) a wynikiem pomiaru,
- jako synonim pomyłki (ten rodzaj zwany jest czasem „błędem grubym”)
- oraz nazywa się tak czasem niepewność.

Natomiast niepewność jest to liczbowe oszacowanie błędu³. W dalszej części tego skryptu będą opisane te właśnie metody.

Czytelników zainteresowanych pogłębieniem tematu odsyłamy do literatury bardziej zaawansowanej.

Jeśli wyniki pomiarów wykazują systematyczne przesunięcie w stosunku do wartości rzeczywistej, bądź też odznaczają się niepowtarzalnością przekraczającą znacznie nominalną dokładność przyrządów, wówczas mówimy, że są one obarczone **błędami systematycznymi**. Sama nazwa (błąd) tej wady pomiarów sugeruje możliwość jej usunięcia. Rodzaje błędów pomiarowych omówimy na prostym przykładzie wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego.



Rysunek 1: Błąd systematyczny, błąd grubo (pomyłka) oraz błędy przypadkowe.

³ Formalna definicja niepewności pomiarowej mówi że „jest to parametr który opisuje rozrzut wyników pomiarów które mogą być przypisane do tej wielkości.”

Wyobraźmy sobie, że zmierzylismy kilkakrotnie czas stu wahnieć metalowej kulki przywiązanej do końca nici o długości l . Początkowe wychylenie kulki wynosiło 20° . Obliczenie przyspieszenia

ziemskiego g , w oparciu o wzór $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, spowoduje otrzymanie wyników systematycznie zaniżonych w stosunku do wartości rzeczywistej. Przyczyną jest zastosowanie przybliżonego wzoru na okres wahadła – słusznego tylko w przypadku małych wychyleń. O tak otrzymanych wynikach powiemy, że są one obarczone **systematycznym błędem** pomiarowym (rysunek 1). Inną przyczyną powstawania tego typu błędów może być np. użycie stopera, którego wskazówki z chwilą rozpoczęcia pomiarów nie pokrywają się z początkiem skali, powodując systematyczne zaniżenie lub zawyżenie wartości okresu wahadła.

Przypuśćmy, że w serii 5 pomiarów czasu stu wahnieć, jeden z pomiarów został zakończony po 90 wahnięciach. Pomiar ten da drastycznie różną wartość przyspieszenia ziemskiego. Określimy go jako pomiar obarczony **błędem grubym** czyli **pomyłką** (rysunek 1).

Opisane powyżej błędy pomiarowe można wyeliminować poprzez:

1. Użycie właściwie działających przyrządów pomiarowych.
2. Poprawne przeprowadzenie pomiarów.
3. Stosowanie poprawek matematycznych do wzorów przybliżonych.
4. Usunięcie z serii pomiarowej wyniku obarczonego błędem grubym.

Wyeliminowanie błędów pomiarowych, rozumianych jako pomyłki, jest zabiegiem koniecznym, ale nie prowadzącym do uzyskania wyników jednoznacznie pokrywających się z rzeczywistą wartością wielkości mierzonej. Każdy bowiem pomiar jest obarczony błędem przypadkowym.

Wśród błędów pomiarowych wyróżnić można **błędy przypadkowe** i **błędy systematyczne**. Często jednak któryś z wymienionych błędów pomiarowych dominuje.

Jeśli dokładność pomiaru jest dostatecznie duża, wówczas w serii pomiarowej otrzymamy pewien rozrzut wyników. Świadczy to o przewadze błędów przypadkowych nad systematycznymi.

Źródłem występowania błędów przypadkowych może być mierzona wielkość (mówimy wówczas o błędzie przypadkowym obiektu) lub sam eksperymentator wraz z otoczeniem i przyrządami pomiarowymi (błąd przypadkowy metody). Błąd przypadkowy obiektu, przy pomiarze grubości płytki ołowianej śrubą mikrometryczną, będzie miał swe źródło w różnicach grubości płytki mierzonej w kilku różnych punktach. Błąd przypadkowy metody wynikać może natomiast z różnic w dociskaniu śruby przy kolejnych pomiarach.

Na powstanie niepewności przypadkowych nakłada się wiele niezależnych przyczyn, co prowadzi do tego, że wyniki pomiarów, w których dominują błędy przypadkowe, układają się symetrycznie

wokół wartości rzeczywistej (rysunek 2). Pojęcie niepewności przypadkowej jest często określane jako błąd przypadkowy lub losowy, które to nazwy stosowane są w wielu pracach dotyczących analizy pomiarów. Z tego też powodu w dalszych rozdziałach będziemy stosować równolegle nazewnictwo tradycyjne.



Rysunek 2: Błędy przypadkowe.

Źródłem błędów systematycznych są ograniczone możliwości pomiarowe związane z konstrukcją użytego przyrządu oraz z możliwością odczytu jego wskazań przez obserwatora.

Przewaga błędów systematycznych nad przypadkowymi ujawni się poprzez otrzymanie identycznych wyników w określonej serii pomiarów. Jak już wspominaliśmy całkowite usunięcie niepewności nie jest możliwe. Można je co najwyżej zmniejszyć poprzez stosowanie dokładniejszych przyrządów pomiarowych oraz zwiększenie liczby pomiarów. Dokładnemu omówieniu tych problemów poświęcony jest rozdział 5.

Doskonałym przykładem ilustrującym powyższy problem jest gra w kości. Spróbujmy postawić pytanie: czy kość do gry jest „uczciwa” (Czy możemy nią grać nie narażając się na poważne straty?). Teoretycznie prawdopodobieństwo wyrzucenia dowolnej liczby oczek powinno być takie samo. W przypadku sześcienniej kostki do gry oznacza to, że prawdopodobieństwo otrzymania 1 oczka wynosi $1/6$, prawdopodobieństwo otrzymania 2 oczek wynosi $1/6$, itd. Zgodnie z definicją prawdopodobieństwa zatem, przeciętnie, w serii 6 rzutów, każda liczba oczek powinna wystąpić raz. Inaczej ujmując to samo, możemy powiedzieć że w serii 60 rzutów każda liczba oczek powinna wystąpić 10 razy. Powróćmy teraz do postawionego na początku problemu „uczciwości” kostki. Jak sprawdzić czy konkretny egzemplarz jest uczciwy? Zapewne każdy od razu odpowie: trzeba rzucić wiele razy kostką, policzyć ile razy wypadnie każda liczba oczek a potem porównać otrzymane liczby. Załóżmy zatem że wykonaliśmy 600 rzutów kostką. Spodziewamy się więc że każda liczba oczek zostanie wyrzucona 100 razy. Jeżeli otrzymamy wynik taki jak w tabeli 1 uznamy kość za nieuczciwą?

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wystąpień	92	110	98	112	95	93

Tabela 1: Wyniki 600 rzutów kostką

A co jeśli wyniki będą jeszcze bardziej odbiegały od oczekiwanej wartości 100 wystąpień? Bez

pomocy matematyki nie możemy odpowiedzieć na to pytanie w sposób ścisły. Odpowiedź na postawione powyżej pytanie znajdziesz Drogi Czytelniku na końcu tego skryptu.

Opisany powyżej przykład ilustruje problematykę pomiaru dowolnej wielkości fizycznej. W przypadku kości do gry chcielibyśmy „zmierzyć” prawdopodobieństwo. Możemy to zrobić zliczając liczbę wystąpień danej liczby oczek. Otrzymany wynik nie będzie jednak zgodny z wartością rzeczywistą (zakładamy że kość jednak jest uczciwa). Ta różnica pomiędzy wartością rzeczywistą a otrzymaną odzwierciedla właśnie niepewność pomiarową. Co ważne, niepewność wynika z natury pomiaru. Można ją często minimalizować różnymi sposobami, ale nigdy nie można się jej pozbyć zupełnie.

W dalszej części opracowania będzie przedstawiona teoria rachunku niepewności pomiarowych wraz z konkretnymi przykładami.

3. Jak narysować wykres?

„Jeden obraz wart więcej niż tysiąc słów.”

Chińskie przysłowie

Dobrze zrobiony wykres może zawierać bardzo wiele informacji prezentując je jednocześnie w bardzo przejrzysty sposób. Aby jednak tak było, należy przestrzegać kilku prostych reguł. Do ilustracji tych zasad posłużmy się przykładem. Student ma za zadanie umieścić na wykresie wyniki 10 wykonanych przez siebie pomiarów spadku napięcia U na oporniku o nieznanym oporze elektrycznym (oznaczymy go R) przy różnych wartościach natężenia prądu I płynącego przez ten opornik. Wyniki pomiarów umieścił w Tabeli 2.

L.p.	U [V]	I [mA]
1	2,3	5
2	4,6	10
3	7,0	15
4	9,1	20
5	11,4	25

L.p.	U [V]	I [mA]
6	13,7	30
7	16,0	35
8	18,2	40
9	20,1	45
10	22,8	50

Tabela 2: Wyniki pomiarów $U(I)$.

Warto zwrócić uwagę, że jednostki mierzonych wielkości zostały umieszczone tylko raz, w nagłówku tabeli. Na razie przyjmijmy bez uzasadnienia następujące niepewności pomiarowe: dla pomiarów od 1 do 4: dla natężenia prądu: 1 mA oraz dla spadku napięcia: $0,1 \text{ V}$ oraz dla pozostałych pomiarów 1 mA i $0,3 \text{ V}$.

3.1. Co umieścić na wykresie?

Na wykresie zwykle umieszczamy dwie rzeczy: punkty pomiarowe i krzywą teoretyczną. Każdy punkt na wykresie reprezentuje wynik pomiaru. W naszym przykładzie: dla każdej wartości natężenia prądu mamy spadek napięcia na badanym oporniku. Pamiętajmy jeszcze o umieszczeniu słupków niepewności pomiarowych na każdym punkcie! Bez tego informacja byłaby niepełna. Krzywa teoretyczna przedstawia matematyczną zależność która wynika z przyjętego modelu fizycznego. Należy podkreślić, że krzywa teoretyczna na wykresie to tylko linia – bez punktów. Punkty są zarezerwowane dla wyników pomiarów.

W naszym przykładzie modelem jest prawo Ohma:

$$\frac{U}{I} = \text{const.}$$

Jeżeli zatem wykres będzie przedstawiał zależność spadku napięcia na oporniku od natężenia płynącego przezeń prądu, krzywa teoretyczna będzie prostą:

$$U(I) = RI (+0),$$

gdzie: współczynnik kierunkowy prostej – R zwany jest oporem elektrycznym. Parametry fizycznego modelu opisującego badane zjawisko (w naszym przykładzie opór elektryczny R)

otrzymujemy zwykle jako wynik dopasowania modelu do danych doświadczalnych. Temat ten zostanie dokładniej omówiony w jednym z następnych rozdziałów.

3.2. Jak dobrać skalę na osiach wykresu?

Pierwszym zadaniem Studenta jest dobranie skali na osiach wykresu. Zakres mierzonego napięcia to 2,3 V do 22,8 V. Zakres mierzonego natężenia prądu to 5 mA do 50 mA. Wydawałoby się zatem że sensownie byłoby przyjąć dla osi X: 5-50 mA a dla osi Y: 2-23 V. Można też przyjąć skalę dla osi X: 0-51 mA a dla osi Y: 0-30 V. Dzięki temu można będzie pokazać całość słupków niepewności oraz że otrzymana zależność rzeczywiście jest typu $y = ax$. (Krzywa teoretyczna przejdzie blisko punktu (0,0)).

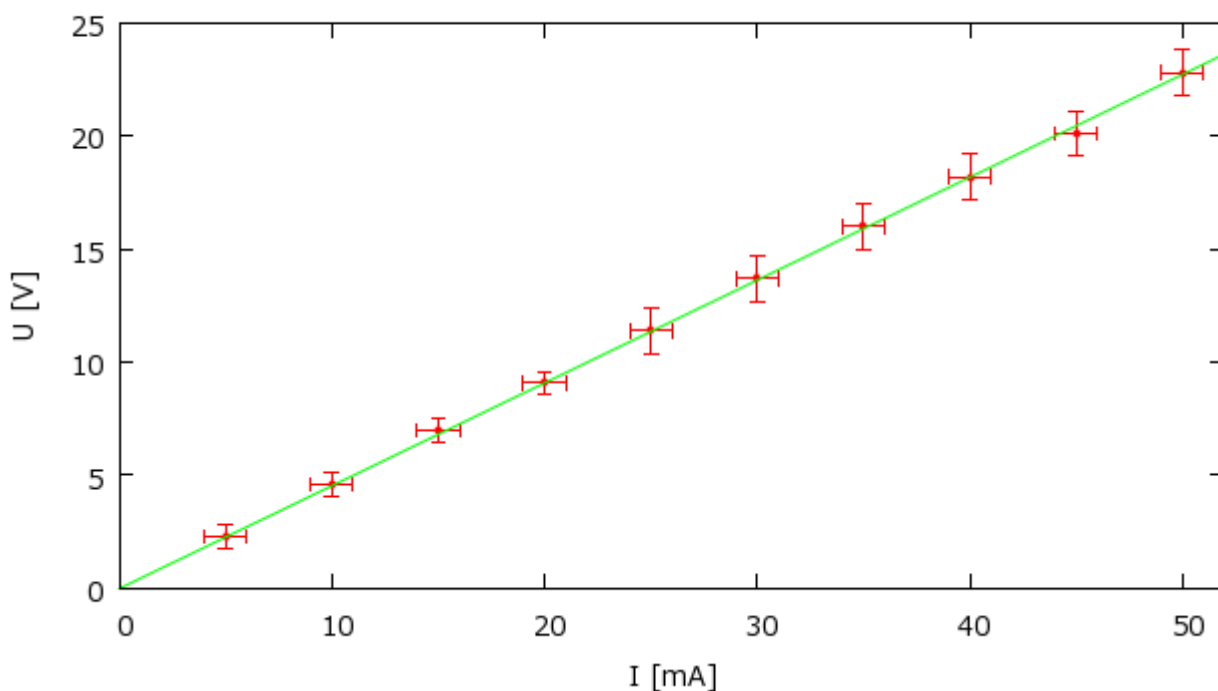
Kolejną ważną rzeczą jest odpowiednie dobranie podziałek na osiach. Powinny one ułatwiać czytanie wykresu.

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na fakt że skala na wykresie zawsze powinna być dobrana do pomiarów. W szczególności nie zawsze należy zaczynać od zera, jedynie tam gdzie jest to uzasadnione.

3.3. Jakie jeszcze informacje powinny znaleźć się na wykresie?

Zawsze trzeba zatytułować wykres i opisać osie. Opis osi zawiera dwa elementy: wielkość fizyczną oraz jej jednostkę. Zatem oś X będzie opisana: „I [mA]” albo „I /mA”, natomiast oś Y: „U [V]” albo „U /V”. Dobrze jest zatytułować wykres, podając wprost zależność którą ilustruje. W naszym przykładzie można to zrobić np. tak: „Zależność U(I) dla opornika R_1 ”. Legendę możemy umieścić na wykresie lub też stosowne wyjaśnienia zamieścić w opisie wykresu.

Gotowy wykres może wyglądać np. tak:



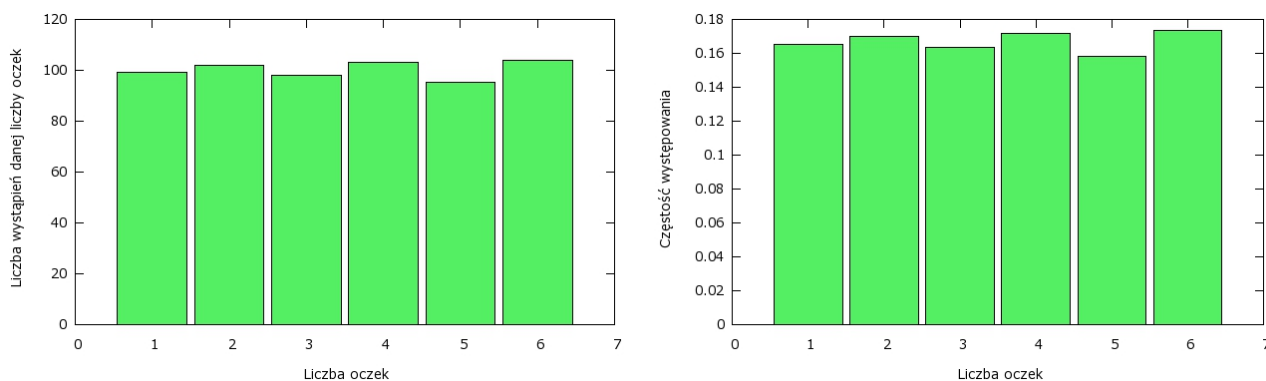
Rysunek 3: Zależność $U(I)$ dla opornika R . Wykres przykładowy.

Ponieważ na wykresie nie ma legendy trzeba jeszcze w podpisie zamieścić informacje: „Kropki przedstawiają punkty pomiarowe, a prosta jest dopasowaną do danych doświadczalnych funkcją: $U(I) = RI + b$.

Wykres jest gotowy! Jednak cały wysiłek z rysowaniem wykresu poszedłby na marne gdybyśmy nie podali wyniku: $R = 455(5) \, \Omega$, $b = 0,04(0,14) \, \text{V}$. Wartości w nawiasach to niepewności pomiarowe. Dopasowywanie funkcji do danych doświadczalnych oraz zapisywanie wyników zostanie dokładniej omówione później.

3.4. Histogram

Wróćmy na moment do przykładu ze Wstępu. Jak najlepiej pokazać wyniki rzutów kostką? W tym przykładzie nie jest ważna kolejność wyników. Nie jest dla nas istotne czy wyrzuciliśmy po kolei: 3, 5, 1, 2 oczka czy też 5, 2, 1, 3. Ważne jest, że w sumie, w całym eksperymencie, uzyskaliśmy wyniki jak w tabeli 1. Taki rodzaj wykresu nazywa się histogramem. Na rysunku 4 wyniki zaprezentowane są na dwa sposoby. Po prawej skala pionowa przedstawia liczbę wystąpień danej liczby oczek. Po lewej zaś skala pionowa to częstotliwość występowania danej liczby oczek. Obydwa wykresy są poprawne. Który wybrać? Najlepiej ten, który będzie bardziej pasował do mierzonej wielkości czy też filozofii obliczeń.



Rysunek 4: Dwa przykładowe histogramy różniące się skalą pionową. Po lewej zliczenia po prawej częstość występowania.

4. Jak poprawnie zapisać wynik?

Cała praca wykonana przy pomiarach i analizie otrzymanych wyników byłaby niepotrzebna gdybyśmy nie byli w stanie podać konkretnego wyniku (np. opór elektryczny opornika to 455,4239 Ω). Ale musimy pamiętać o niepewności otrzymanego wyniku. Jak zatem zapisać wynik? Po pierwsze musimy poznać przyjętą konwencję zapisu. Wprowadzenie jednolitych oznaczeń bardzo ułatwia czytanie publikacji, norm, specyfikacji i wszystkich innych tekstów tego typu. Jeżeli zatem mierzoną wielkość oznaczyć X to jej niepewność będziemy oznaczać $u(X)$. Litera u pochodzi od angielskiego słowa 'uncertainty' które oznacza właśnie niepewność. Na przykład: niepewność długości L oznaczmy $u(L)$ a niepewność napięcia elektrycznego U oznaczmy $u(U)$.

Po drugie musimy uświadomić sobie, że precyzja wyniku jest całkowicie determinowana przez niepewność. Pierwszym krokiem jest zatem zaokrąglenie niepewności do jednej lub maksymalnie dwóch cyfr znaczących, tzn. pierwszej albo dwóch pierwszych cyfr różnych od zera. Wynika to z faktu że niepewność też jest wyznaczona z pewną niepewnością. Na przykład jeżeli w wyniku obliczeń otrzymaliśmy niepewność 0.532334 Ω to należy napisać $u(R) = 0.5 \Omega$ (albo $u(R) = 0.53 \Omega$). Następnie trzeba z taką samą dokładnością zapisać wynik. Ponieważ niepewność zaokrągliliśmy do części dziesiątych, również wynik musimy zapisać z taką samą dokładnością.

Guide podaje cztery sposoby zapisu niepewności:

1. $R = 455.4 \Omega, u_c(R) = 0.5 \Omega$
2. $R = 455.4(5) \Omega$
3. $R = 455.4(0.5) \Omega$
4. $R = (455.4 \pm 0.5) \Omega$

Którą metodę wybrać? Każda z metod ma swoje wady i zalety oraz oczywiście rzesze zagorzałych zwolenników i przeciwników.

- ad. 1. Ta metoda zapisu jest po prostu długa i przez to mało wygodna i mało czytelna.
- ad. 2. Ta metoda zapisu jest często stosowana w pracach naukowych. W szczególności jest użyteczna w tabelkach ze względu na swoją kompaktową formę.
- ad. 3. Ta metoda jest bardzo podobna do tej z pkt. 2. Naszym zdaniem jest jednak czytelniejsza. Zapisanie niepewności jako wartości bezwzględnej znacznie przyspiesza jej interpretację.
- ad. 4. Zapis z punktu czwartego jest często stosowany w tekście. Nie jest on jednak zalecany przez Guide ponieważ może być źle zinterpretowany przez nieuważnego Czytelnika. W bardzo podobny sposób zapisujemy niepewności rozszerzone o których będzie mowa dalej.

5. Jak oszacować niepewność pomiaru

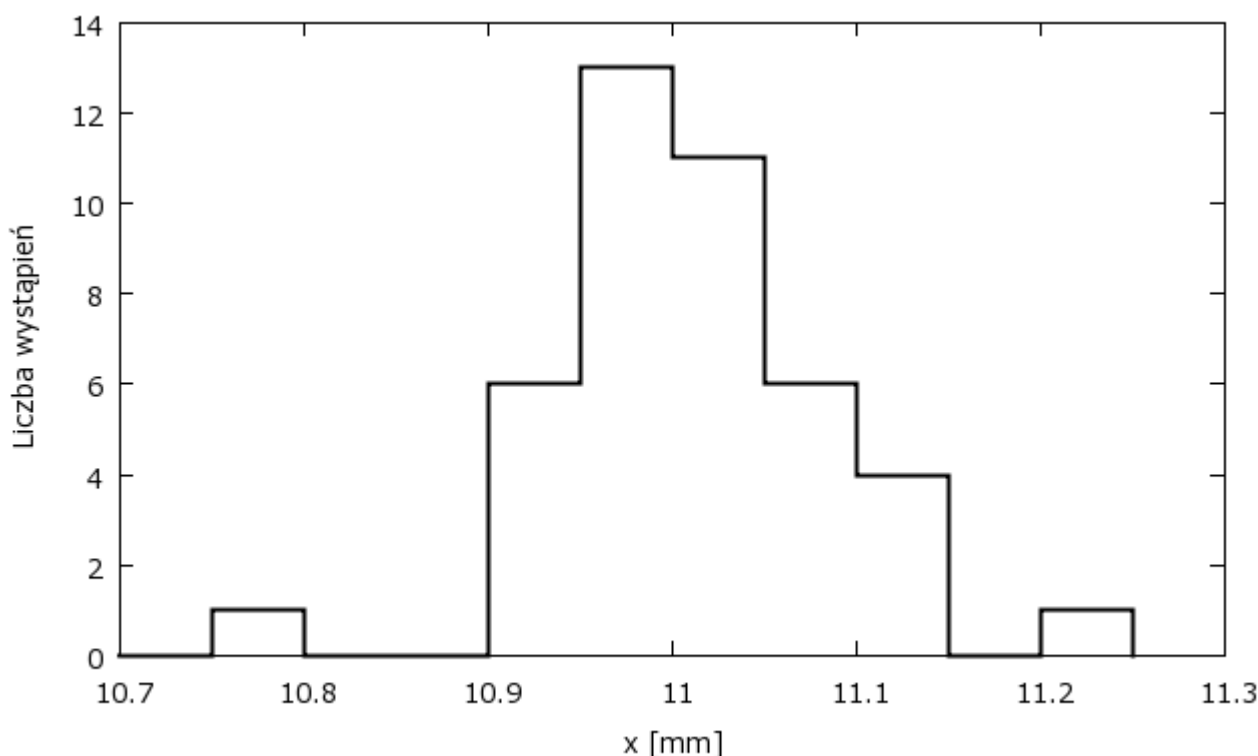
Guide podzielił metody szacowania niepewności pomiarowych na dwie grupy nazwane Metoda A i Metoda B. Poniżej zamieściliśmy opisy obydwu.

5.1. Metoda A

Prezentację Metody A zaczniemy od rozważenia przykładu.

Wykonano 40 pomiarów grubości płytki ołowianej za pomocą śruby mikrometrycznej. Niepewność systematyczna związana z użytym przyrządem pomiarowym wynosi zatem $\Delta x = 0.01 \text{ mm}$. Wyniki pomiaru przedstawiono w postaci histogramu na rysunku 5 wybierając szerokość przedziału 0.05 mm .

Gdybyśmy mieli możliwość wykonania pomiarów grubości płytki ołowianej z jeszcze większą dokładnością (niepewność systematyczna pomiaru $\Delta x \rightarrow 0$) i bardzo wiele razy ($n \rightarrow \infty$) wówczas wykres przedstawiony na rysunku 5 dążyłby do funkcji ciągłej:



Rysunek 5: Histogram 40 pomiarów grubości płytki ołowianej.

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{p(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Funkcja ta nosi nazwę różniczkowego rozkładu prawdopodobieństwa lub gęstości prawdopodobieństwa. Znajomość gęstości prawdopodobieństwa pozwala obliczyć prawdopodobieństwa znalezienia wartości x w przedziale $(x, x + \Delta x)$: $p(x) = \varphi(x) \Delta x$.

Na rysunku 5 można łatwo zaobserwować podstawowe cechy rozkładu pomiarów obarczonych niepewnościami przypadkowymi: rozkład ma jedno maksimum, jest symetryczny i szybko maleje w miarę oddalania się od maksimum.

Jeżeli założymy, że niepewność przypadkowa pojedynczego pomiaru składa się z szeregu niepewności elementarnych, których nakładanie się na siebie ze znakiem plus lub minus określone jest identycznym prawdopodobieństwem $p = 0.5$, to możemy oczekiwać że rozkład niepewności przypadkowej dużej liczby pomiarów opisany będzie krzywą Gaussa:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{\sigma}\right)^2} \quad (2)$$

Dowód tego twierdzenia znajduje się w książce A. Wróblewskiego i J. Zakrzewskiego pt. „Wstęp do fizyki” na stronie 54 (wyd I).

Funkcja $\varphi(x)$ opisywana wzorem (2) nosi nazwę rozkładu Gaussa lub rozkładu normalnego. Zależy ona od dwu parametrów a i σ oraz spełnia warunek normalizacyjny

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (3)$$

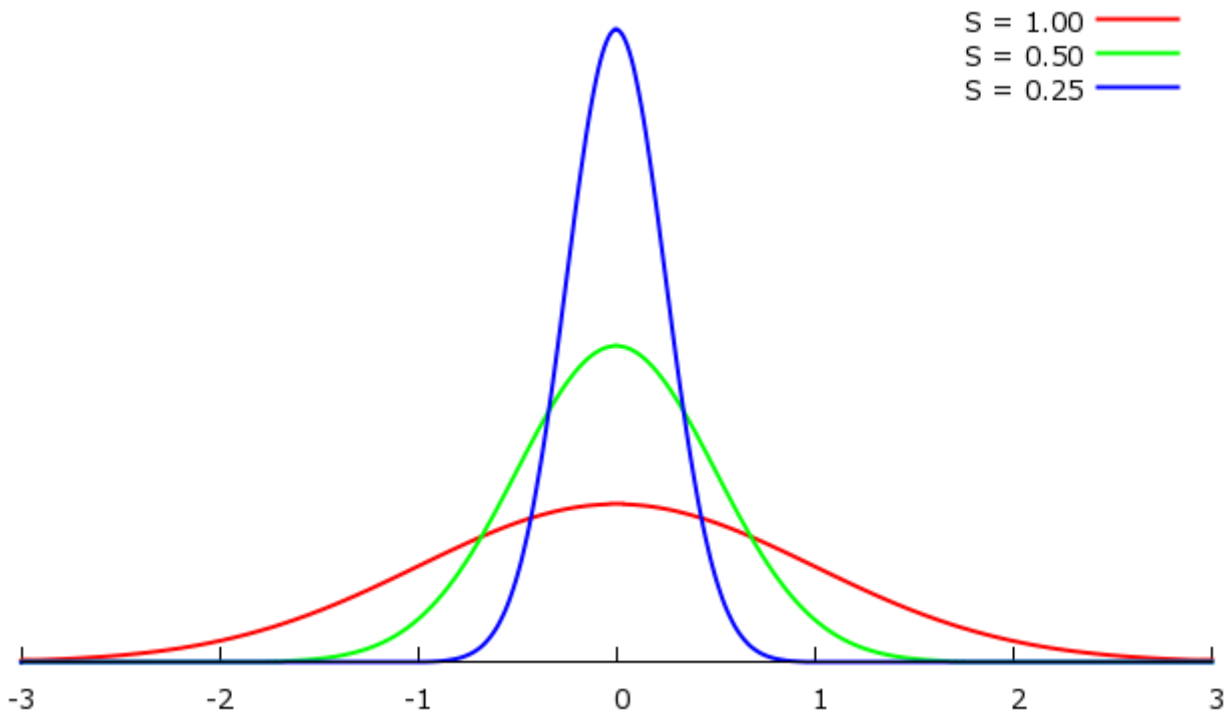
Warunek ten wynika z faktu, że prawdopodobieństwo znalezienia wyniku pomiaru w przedziale od x do $x+dx$ jest równe $\varphi(x)dx$, a prawdopodobieństwo znalezienia dowolnej wartości w przedziale od $-\infty$ do $+\infty$ musi być równe 1.

Parametry a i σ mają łatwą interpretację analityczną. Dla wartości $x=a$ funkcja $\varphi(x)$ osiąga maksimum. Parametr σ ma natomiast tę cechę że wartości $a+\sigma$ i $a-\sigma$ określają punkty przegięcia krzywej Gaussa. A więc wartość σ zwyczajowo traktuje się jako miarę szerokości rozkładu.

Statystyczną interpretację parametrów a i σ znajdzie czytelnik w rozdziale 11.2 Wykazano tam, że wartość a przy której funkcja Gaussa przyjmuje maksimum, jest wartością oczekiwaną $E(X)$ rozkładu, parametr σ natomiast jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji $D^2(X)$.

Z punktu widzenia pomiaru natomiast **parametr a jest interpretowany jako wynik pomiaru** (dokładnie jest to najlepsze znane nam przybliżenie wartości rzeczywistej mierzonej wielkości fizycznej). **Parametr σ interpretowany jest jako niepewność standardowa pomiaru.** W tym miejscu trzeba jeszcze zwrócić uwagę że parametr σ jest wielkością której wartości nigdy nie poznamy. Możemy natomiast łatwo wyliczyć jej estymator (czyli przybliżenie) korzystając z wartości otrzymanych w eksperymencie. Estymator ten oznacza się przez S . Oznaczenia te często stosuje się zamiennie chociaż nie jest to do końca ścisłe.

Z przedstawionych na rysunku 6 wykresów funkcji Gaussa dla różnych wartości parametru σ widać, że ze wzrostem wartości σ rozkłady stają się coraz bardziej spłaszczone, co można interpretować jako wzrost liczby pomiarów różniących się od wartości rzeczywistej.



Rysunek 6: Wykresy funkcji Gaussa dla różnych wartości parametru S i dla $x_0 = 0$.

Rozkład Gaussa jest rozkładem ciągłym, dobrze przybliżającym nam doświadczalny rozkład pomiarów, w których dominują niepewności przypadkowe. Stoimy teraz przed praktycznym problemem oszacowania parametrów tego rozkładu na podstawie skończonej liczby n pomiarów.

Wartość rzeczywistą x_0 , którą zinterpretowaliśmy jako wartość oczekiwaną rozkładu, najlepiej przybliży nam średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

Parametr σ określający rozrzut wyników wokół wartości rzeczywistej x_0 przybliżamy wielkością σ_x liczoną na podstawie wzoru:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_0 - x_i)^2}{n}} \quad (5)$$

Ponieważ nie znamy jednak wartości rzeczywistej x_0 , a jedynie jej oszacowanie przez średnią arytmetyczną \bar{x} , posługujemy się wzorem w postaci

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \quad (6)$$

Tak zdefiniowana niepewność pomiarowa nosi nazwę odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru: stosuje się również nazwę średniego błędu kwadratowego. Różnica pomiędzy wzorami 5 i 6 polega nie tylko na zastąpieniu wartości rzeczywistej x_0 przez średnią arytmetyczną \bar{x} , ale również na zamianie mianownika z n na $n - 1$. Wynika to z faktu, że w liczniku, który jest sumą kwadratów odchyłeń pomiaru x_i od średniej arytmetycznej \bar{x} , mamy już tylko $n - 1$ niezależnych składników: n -ty składnik można zawsze wyliczyć z definicji średniej arytmetycznej. Dokładne wyprowadzenie tej zależności można znaleźć w rozdziale 11.2

Wielkość s_x określa niepewność przypadkową pojedynczego pomiaru i jej wartość nie zależy od liczby pomiarów, a tylko od właściwości obiektu mierzonego i warunków, w jakich jest wykonywany pomiar, ponieważ tylko te czynniki decydują o szerokości rozkładu prawdopodobieństwa.

Dla eksperymentatora wykonującego n pomiarów danej wielkości najistotniejsza jest ocena, o ile i z jakim prawdopodobieństwem wyznaczona wartość średnia \bar{x} różni się od wartości rzeczywistej x_0 . Wielkością pozwalającą na taką ocenę jest odchylenie standardowe średniej, noszące również nazwę średniego błędu kwadratowego średniej, zdefiniowane wzorem:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (7)$$

Wzór ten wyprowadzimy w następnym rozdziale. Z powyższego wzoru wynika, że odchylenie standardowe średniej maleje ze wzrostem liczby pomiarów n .

Fakt, że odchylenie standardowe średniej $s_{\bar{x}}$ jest \sqrt{n} razy mniejsze od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru, można wytłumaczyć następująco: wyobraźmy sobie że wykonujemy kilka serii pomiarowych jakiejś wielkości x . Z każdej serii otrzymujemy troszeczkę inną wartość średnią, ale rozkład tych wartości będzie znacznie węższy od rozkładu pomiarów bezpośrednich, gdyż w wartościach średnich otrzymujemy znacznie mniejszy rozrzut. Odchylenie standardowe rozkładu

średnich będzie właśnie równe $\frac{s_x}{\sqrt{n}}$.

Wartość $s_{\bar{x}}$ określa wielkość rozrzutu wyniku wokół wartości średniej: $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ w którym z prawdopodobieństwem 68% można oczekiwać wartości rzeczywistej.

Standardowo, wynik pomiaru podajemy na poziomie jednego odchylenia standardowego (niepewność standardowa) i tylko w innych przypadkach (niepewności rozszerzonej) musimy obok końcowego wyniku podawać dodatkowe informacje.

Co ważne, wzory 4 i 7 oraz ich interpretacja są słuszne zawsze, nawet jeżeli nie możemy posługiwać się rozkładem Gaussa. Metoda A polega właśnie na wyliczeniu z tych wzorów wartości średniej i odchylenia standardowego dla uzyskanej serii pomiarów.

Na zakończenie wróćmy do pomiarów grubości płytki ołowianej, których wyniki zostały przedstawione w postaci histogramu na rysunku 5. Średnia arytmetyczna obliczona dla 40 pomiarów wynosi $\bar{x} = \sum x_i / n = 11.017 \text{ mm}$, a odchylenie standardowe średniej obliczone za pomocą wzoru (7) wynosi $s_{\bar{x}} = 0.012 \text{ mm}$. Wynik pomiaru grubości tej płytki powinien być zatem przedstawiony w sposób następujący:

$$\bar{x} \pm s_{\bar{x}} = (11.017 \pm 0.012) \text{ mm.},$$

gdyby nie potrzeba oszacowania niepewności Metodą B.

5.2. Metoda B

Opis Metody B rozpoczniemy również od analizy pewnego konkretnego przypadku. Wykonując pojedynczy pomiar jakiejś wielkości nie możemy posłużyć się opisaną w poprzednim rozdziale metodą. Na niepewności pomiarowe w takim przypadku składają się dwa przyczynki, jeden pochodzący od użytego przyrządu pomiarowego (Δx), drugi związany z wykonywaniem czynności pomiarowej przez obserwatora (Δx_e).

Niepewność związana z użytym przyrządem zależy od klasy dokładności tego przyrządu wskazującej na jego odstępstwa od wzorca. W dobrych przyrządach pomiarowych podziałka skali zgadza się zwykle z klasą danego przyrządu, która oznacza maksymalną niepewność wnoszoną przez sam przyrząd, np. dla termometru pokojowego niepewność maksymalna $\Delta t = 1^\circ \text{C}$, a dla miarki milimetrowej $\Delta l = 1 \text{ mm}$, itp.

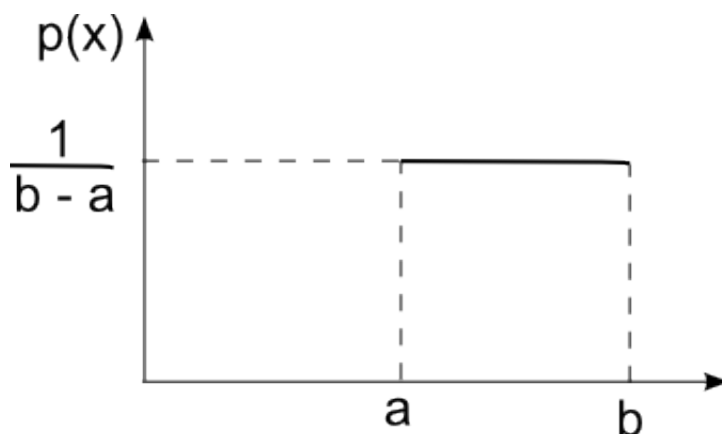
Niepewność odczytu ustala sam obserwator, uwzględniając różne czynniki wpływające na wynik pomiaru. Tak więc, jeśli wykonujemy pomiar napięcia woltomierzem analogowym, jego klasę

odczytujemy z tabliczki znamionowej. Przyrząd klasy 1, na zakresie 300V, pozwala dokonać pomiaru z niepewnością 300 V (zakres) 1% (klasa przyrządu) = 3V. Dodatkowo konstrukcja skali i sposób odczytu wyniku może stanowić kolejne źródło niepewności pomiaru. W przypadku odczytu z miernika może to być np. pół działki (w tym przykładzie pominiemy to źródło niepewności).

Tak określoną niepewność pomiarową nazywamy często maksymalną, przyjmując że rzeczywista wartość mierzonej przez nas wielkości mieści się z prawdopodobieństwem 100% w określonym przez nas przedziale. Taką sytuację zwykle opisuje się rozkładem prostokątnym – patrz Rysunek 7.

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin (x - \Delta x; x + \Delta x) \\ \frac{1}{2\Delta x} & \text{dla } x \in (x - \Delta x; x + \Delta x) \end{cases}$$

Ponieważ zdecydowaliśmy się przedstawiać niepewności pomiarowe na poziomie jednego odchylenia standardowego to musimy z niepewności maksymalnej oszacować niepewność standardową. Czyli wyliczyć odchylenie średnie standardowe rozkładu prostokątnego. Parametr ten można policzyć wprost z definicji (wprowadzone oznaczenia $a = x - \Delta x$, $b = x + \Delta x$):



Rysunek 7: Rozkład prostokątny.

$$E(X) = \int_a^b x p(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{b-a} \Big|_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_a^b \left(x - E(X)\right)^2 p(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^3 \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{3(b-a)} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b-a}{2}\right)^3 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Zatem:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

Czyli niepewność standardowa pomiaru w przypadku wspomnianego powyżej woltomierza klasy 1 na zakresie 300V będzie:

$$u(U) = \frac{3V}{\sqrt{3}} = 1.7320508075688772935274463415059 \approx 2V ,$$

a zatem wynik pomiaru zapiszemy: $U = 239(2) V$.

Zanim przejdziemy do następnego tematu należy się słowo wyjaśnienia. W zamieszczonym dwie linijki wyżej przeliczeniu niepewności maksymalnej napięcia na niepewność standardową celowo napisaliśmy absurdalnie dużo cyfr. Chcieliśmy pokazać że **zawsze** powinna ona być zapisana z odpowiednią precyzją, pomimo dużej precyzji obliczeń zapewnianej przez współczesne komputery czy kalkulatory. Innymi słowy, to na nas, świadomych użytkownikach, spoczywa obowiązek interpretacji otrzymanych liczb.

6. Jak „dodać” do siebie niepewności?

Na niepewność mierzonej wielkości ma wpływ kilka czynników. Na ogół mamy do czynienia z niepewnościami przypadkowymi, niepewnościami wynikającymi z rozdzielczości przyrządu i niepewnościami odczytu wartości przez eksperymentatora. Czasami powinniśmy uwzględnić również inne czynniki. Odpowiedź na pytanie jak uwzględnić te wszystkie czynniki przedstawiona jest właśnie w tym rozdziale.

6.1. Niepewności pomiarów bezpośrednich

Jak już wspominaliśmy, przyjęto konwencję że wszystkie niepewności wyrażane są jako niepewności standardowe tzn. odpowiadające wariancji rozkładu. Jeżeli pomiar obarczony jest różnymi, opisanymi wcześniej niepewnościami musimy uwzględnić w końcowym wyniku każdą z nich. Ponieważ jednak niepewności są wyrażone jako odchylenia standardowe do ich sumowania musimy posłużyć się metodami odpowiednimi dla dodawania odchyłeń standardowych⁴.

$$u_c(x) = \sqrt{u_s^2(x) + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}} \quad (9)$$

Czytelnik mógł zauważyć, że na oznaczenie niepewności (podawanej na poziomie jednego odchylenia standardowego) dotychczas zastosowaliśmy aż cztery symbole: u_c , u_s , s_x , σ . Poniżej wyjaśnienie znaczenia tych symboli:

σ – „sigma” jest to parametr funkcji Gaussa równy pierwiastkowi z wariancji

s_x – „es iks” jest estymatorem „sigmy”

u_s – jest to niepewność standardowa wyznaczona metodą A

u_c – jest to niepewność (również standardowa) wyznaczona ze wzoru 9, czyli uwzględniająca różne źródła niepewności.

Warto podkreślić że bardzo często wszystkie z powyższych wielkości nazywa się po prostu niepewnością (lub niepoprawnie błędem) pozostawiając Czytelnikowi domyslenie się z kontekstu o której konkretnie wielkości mowa.

⁴ Wynika on z faktu że rozkład sumy zmiennych losowych jest splotem rozkładów tych zmiennych. Formalne uzasadnienie można znaleźć w każdym podręczniku do statystyki.

Dobłą ilustracją tego zagadnienia będzie kontynuowanie rozważań o niepewności pomiarowej grubości płytki ołowianej. W rozdziale 5.1 na podstawie 40 pomiarów grubości płytki przy pomocy śruby mikrometrycznej wyznaczono średnią wartość grubości oraz jej niepewność standardową:

$$x = 11.017 \text{ mm} \quad u_s(x) = 0.012 \text{ mm}$$

W tych obliczeniach nie uwzględniono jednak niepewności pochodzących z dokładności przyrządu pomiarowego Δx oraz niepewności pochodzącej od eksperymentatora Δx_e . Niepewność śruby mikrometrycznej określamy z jej rozdzielczości. Niepewność eksperymentatora jest związana z odczytem wartości z podziałki śruby. Autorzy tego skryptu doszli do wniosku że, rozsądnie będzie przyjąć połowę działki skali śruby jako tę niepewność (czyli $\Delta x_e = 0.005 \text{ mm}$).

Po wprowadzeniu tych wielkości do wzoru (9) otrzymujemy:

$$u_c(x) = \sqrt{\Delta x = 0.01 \text{ mm} \quad \Delta x_e = 0.005 \text{ mm} \quad (0.012)^2 + \frac{(0.01)^2}{3} + \frac{(0.005)^2}{3}} = \sqrt{1,44 \cdot 10^{-4} + 3,3 \cdot 10^{-5} + 8,3 \cdot 10^{-8}} \approx 0.013$$

A więc ostatecznie wartość grubości płytki ołowianej wyniesie⁵:

$$x = (11.017 \pm 0.013) \text{ mm}$$

W sytuacjach, gdy niepewność przypadkowa pomiaru jest znacznie większa (przynajmniej o rząd wielkości) od niepewności wynikającej z użytego przyrządu i działalności eksperymentatora – uwzględnianie tych dwóch ostatnich niepewności nie ma wielkiego sensu.

6.2. Niepewności pomiarów pośrednich

Problem dodawania niepewności pośrednich uważany jest przez studentów za dość skomplikowany. I nie można się temu dziwić. Złożoność problemu polega na tym, że wynik dodawania dwóch niepewności równych 2 nie jest wcale 4, lecz $\sqrt{8}$. Aby ten szok poznawczy nieco złagodzić podamy najpierw chyba najprostszy z możliwych przykładów. Następnie napiszemy wzór na dodawanie niepewności pośrednich gdy wynik końcowy zależy tylko od wyników pomiarów dwóch wielkości fizycznych i zilustrujemy ten problem prostym przykładem. Na zakończenie wyprowadzimy wzór dla dowolnej liczby wielkości mierzonych.

⁵ Wynik można również zapisać jako:

$x = 11.017(13) \text{ mm}$

$x = 11.017(0.013) \text{ mm}$

$x = 11.017 \text{ mm} \quad u_c(x) = 0.013 \text{ mm}$

6.2.1. Chyba najprostszy przykład

Na samym początku rozważmy chyba najprostszy z możliwych przykładów⁶. Powiedzmy, że interesuje nas jakaś wielkość F która jest sumą dwóch innych wielkości X i Y . Wielkości F nie możemy zmierzyć bezpośrednio, ale możemy zmierzyć wielkości X i Y . Wyliczenie wartości F nie jest trudne bo jest to zwykłe dodawanie. Pytaniem na które musimy dać odpowiedź jest jak znaleźć niepewność wielkości F znając niepewności wielkości X i Y . Wróćmy do przykładu z rozdziału 5.1 gdzie do wymodelowania pomiaru posłużyliśmy się rozkładem Gaussa. Upraszczając nieco rozumowanie, ale nie tracąc nic z jego ogólności, przyjmijmy, że wartości wielkości X i Y są równe zero a ich niepewności są odpowiednio $u(x)=\sigma_x$ $u(y)=\sigma_y$. Możemy zatem napisać że:

$$P(x) \sim e^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}}$$
$$P(y) \sim e^{\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}}$$

Interesujące dla nas jest znalezienie rozkładu prawdopodobieństwa wielkości F . Ponieważ jest ona sumą X i Y możemy zacząć od znalezienia prawdopodobieństwa zmierzenia pary (x,y) , które to jest po prostu iloczynem prawdopodobieństwa uzyskania wartości x i prawdopodobieństwa uzyskania wartości y . Czyli:

$$P(x, y) \sim e^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}} e^{\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}} = e^{\frac{-1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right)}.$$

Przekształćmy nieco wykładnik:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = \frac{(x+y)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} + \frac{(\sigma_y x + \sigma_x y)^2}{\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)} = \frac{(x+y)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} + z^2$$

Zatem prawdopodobieństwo $P(x, y)$ można zapisać jako:

$$P(x, y) = P(x+y, z) \sim e^{-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Zauważmy, że zdarzenie polegające na wystąpieniu pary (x, y) zastąpiliśmy parą $(f = x+y, z)$, a to już prawie poszukiwana gęstość prawdopodobieństwa. Trzeba jeszcze tylko pozbyć się zależności od z . Można to zrobić dosyć łatwo: trzeba zsumować prawdopodobieństwa wystąpienia $x+y$ dla

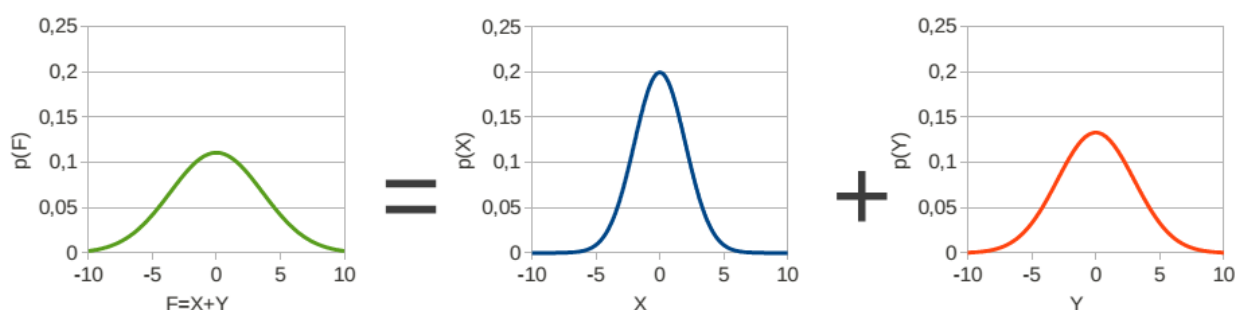
6 Przykład zaadoptowany z książki Johna R. Taylora „Wstęp do analizy błęd pomiarowego”.

wszystkich wartości z , czyli policzyć całkę oznaczoną⁷ po całym przedziale zmienności zmiennej z .
Dochodzimy zatem do wyniku:

$$P(f) = P(x+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x+y, z) dz \sim e^{-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} = e^{-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}}$$

Co to oznacza? Że nowa zmienna losowa $f = x + y$ również ma rozkład Gaussa. Wartość średnia jest równa zero (bo $0 = 0 + 0$), natomiast odchylenie średnie standardowe wielkości f równe jest pierwiastkowi z sumy kwadratów odchyleń standardowych x i y :

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$



Rysunek 8: Graficzna ilustracja dodawania zmiennych losowych.

6.2.2. Przykład nieco bardziej złożony.

W tym paragrafie będziemy zajmowali się obliczaniem niepewności wielkości złożonej $f(x,y)$, która zależy tylko od dwóch wielkości x i y mierzonych bezpośrednio. To że wielkość została zmierzona oznacza że znamy nie tylko jej wartość ale również niepewność (standardową), zatem znamy również $u_c(x)$ i $u_c(y)$. Wówczas niepewność standardowa (na poziomie jednego odchylenia standardowego) wielkości $f(x,y)$ jest równa:

$$u(f(x, y)) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u^2(y)}.$$

Przypomnijmy tu jeszcze raz, że zwykle, jeśli pomiar polega na otrzymaniu serii wyników to wielkości średnie \bar{x} i \bar{y} interpretujemy jako wynik pomiaru, natomiast odchylenie średnie

⁷ Warto tu przypomnieć że: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$

standardowe wartości średniej $s_{\bar{x}}$ uznajemy za niepewność standardową wyniku pomiaru.

Zastosujmy podany powyżej wzór w praktyce. W poprzednim rozdziale wyznaczyliśmy grubość płytki ołowianej, która wynosi $x = 11.017(0.013) \text{ mm}$. Wyznamy objętość tej płytki, jeśli pomiary średnicy wykonane za pomocą suwmiarki zostały umieszczone w tabeli 3.

Liczba wyników pomiarów n_i	1	6	11	6	3	3
Wynik pomiaru ϕ_i [cm]	4.87	4.88	4.89	4.90	4.91	4.92

Tabela 3: Wyniki pomiarów średnicy płytki.

Korzystając ze wzorów (5) i (6) obliczamy średnią wartość średnicy płytki oraz odchylenie standardowe średniej – Metoda A. Również szacujemy niepewności maksymalne związane z przyrządem i eksperymentatorem – Metoda B.

$$\phi = 4.894 \text{ cm} \quad u_s(\phi) = 0.002 \text{ cm} \quad \Delta \phi = 0.01 \text{ cm} \quad \Delta \phi_e = 0.005 \text{ cm}$$

Całkowita niepewność standardowa średnicy płytki jest zatem:

$$u_c(\phi) = \sqrt{(u_s(\phi))^2 + \frac{\Delta \phi^2}{3} + \frac{\Delta \phi_e^2}{3}} = \sqrt{0.002^2 + \frac{0.01^2}{3} + \frac{0.005^2}{3}} = \sqrt{4.0 \cdot 10^{-6} + 33 \cdot 10^{-6} + 8.3 \cdot 10^{-8}} = \sqrt{37 \cdot 10^{-6}} = 0.61 \cdot 10^{-3} \approx 0.006$$

A więc $\phi = (4.894 \pm 0.006) \text{ cm}$.

Objętość płytki obliczamy ze wzoru:

$$v = v(\phi, x) = \pi \left(\frac{\phi}{2} \right)^2 x.$$

Podstawiając odpowiednie wartości liczbowe otrzymujemy (Uwaga! Grubość x płytki wyrażona jest w mm trzeba zatem przeliczyć ją na cm .):

$$v = 3.1415 \left(\frac{4.894}{2} \right)^2 11.017 \cdot 10^{-1} = 20.72375036420495 \text{ cm}^3$$

Następnie obliczamy niepewność objętości płytki posługując się wzorem (16).

$$u_c(v) = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \phi} \right)^2 u_c^2(\phi) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 u_c^2(x)} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \phi x \right)^2 u_c^2(\phi) + \left(\frac{\pi}{4} \phi^2 \right)^2 u_c^2(x)}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

$$u_c(v) = \sqrt{\left(\frac{3.1415}{2} \cdot 4.894 \cdot 1.1017\right)^2 \cdot 0.0013^2 + \left(\frac{3.1415}{4} \cdot 4.894^2\right)^2 \cdot 0.006^2} = \sqrt{0.000121214750 + 0.012738330314} = \sqrt{0.012859545064} = 0.113399934144 \approx 0.11 \text{ cm}^3$$

Zwróć Czytelniku uwagę na dwie rzeczy. W wyrażeniu powyżej, pod pierwiastkiem jest suma dwóch składników. Są to dwa przyczynki do niepewności wyznaczenia objętości pochodzące od niepewności wyznaczenia średnicy (pierwszy) i niepewności wyznaczenia grubości (drugi). Patrząc na wartości liczbowe widać, że dominuje niepewność związana z pomiarem średnicy. Po drugie zaś, pomimo dużej precyzji obliczeń (która to jest jak najbardziej pożądana) wynik został zapisany z odpowiednią dokładnością. Najpierw niepewność została zapisana z dokładnością do dwóch cyfr znaczących a następnie wynik z taką samą dokładnością co niepewność.

Ostateczny wynik zatem zapisujemy w postaci⁸: $v = (20.72 \pm 0.11) \text{ cm}^3$.

6.2.3. Wyprowadzenie wzoru ogólnego.

Założmy, że wielkość fizyczna z jest funkcją dwóch innych wielkości fizycznych x i y , których pomiar możemy wykonać bezpośrednio: $z = f(x, y)$. Próbkę pomiarów wielkości x i y mają rozkłady o znanych parametrach \bar{x}, σ_x i \bar{y}, σ_y . Jak na podstawie tych informacji ocenić rzeczywistą wartość i odchylenie standardowe wielkości z ?

Ustalmy, że wykonaliśmy n pomiarów wielkości x i m pomiarów wielkości y . Na podstawie dowolnego pomiaru x_i i dowolnego pomiaru y_k możemy otrzymać jakąś wartość wielkości złożonej $z_{ik} = f(x_i, y_k)$. Zauważmy, że liczba możliwych możliwych do otrzymania wielkości z_{ik} równa jest iloczynowi nm .

Można wykazać że średnią wartość z , równą z definicji:

$$\bar{z} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ik} \quad (10)$$

dobrze przybliża zależność

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}) \quad (11).$$

Zatem, analogicznie jak przy pomiarach bezpośrednich wartość średnią z przyjmiemy jako

⁸ Równie dobre będą notacje: $v = 20,72(11) \text{ cm}^3$ czy też $v = 20,72(0,11) \text{ cm}^3$.

najlepsze przybliżenie jej wartości rzeczywistej. Poniżej wyprowadzimy wzór na odchylenie standardowe wielkości złożonej $z = f(x, y)$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned}d_i &= x_i - x_0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\g_k &= y_k - y_0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\w_{ik} &= z_{ik} - z_0\end{aligned}$$

gdzie: x_0, y_0, z_0 – wartości rzeczywiste zmiennych x, y, z .

Rozwijając funkcję z w szereg Taylora i pomijając wielkości małe drugiego i wyższych rzędów otrzymamy

$$z_{ik} = f(x_i, y_k) = f(x_0 + d_i, y_0 + g_k) = f(x_0, y_0) + d_i \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + g_k \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \quad (12)$$

Ponieważ oczywiste jest, że $z_0 = f(x_0, y_0)$, wzór przyjmuje postać

$$w_{ik} = d_i \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + g_k \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \quad (13)$$

A zatem odchylenie standardowe s_z wielkości złożonej z , które zgodnie ze wzorem (12) jest równe

$$s_z = \sqrt{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m w_{ik}^2} \quad (14)$$

po uwzględnieniu zależności (13) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[d_i \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + g_k \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \right]^2 = \\&= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\left(d_i \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \right)^2 + 2 d_i g_k \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} + \left(g_k \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Jeżeli wielkości x i y są wyznaczone niezależnie, wówczas:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m d_i g_k \approx 0$$

oraz, zgodnie ze wzorem (5), spełnione są zależności

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = n \sigma_x^2, \quad \sum_{k=1}^m g_k^2 = m \sigma_y^2$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności wzór (14) upraszcza się do postaci:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \bigg|_{x_0, y_0} + \sigma_y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \bigg|_{x_0, y_0}$$

Przechodząc od wartości rzeczywistych do wartości średnich, tzn. stosując przybliżenie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{x_0, y_0}$$

oraz zastępując σ przez ich estymatory s , ostatecznie otrzymujemy:

$$s_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} \right)^2 s_y^2}.$$

Uogólniając to na funkcję wielu zmiennych $f(x_1, \dots, x_N)$ mamy:

$$s_z = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)}{\partial x_j} \bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_N} \right)^2 s_{x_j}^2}. \quad (15)$$

Powyższy wzór nosi nazwę prawa przenoszenia odchyłeń standardowych.

W tym momencie możemy udowodnić wzór (5) na odchylenie standardowe średniej arytmetycznej \bar{x} . Otóż wartość średnią \bar{x} można traktować jako wielkość mierzoną pośrednio; obliczoną na podstawie wzoru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_N).$$

Odchylenie standardowe wartości średniej liczymy w oparciu o wzór (15) przyjmując, że estymatory odchyłeń standardowych pomiarów x_1, x_2, \dots, x_N są sobie równe:

$$s_{x_1} = s_{x_2} = \dots = s_{x_N}$$

zatem:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)}{\partial x_j} = \frac{1}{n}$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{n}\right)^2 s_{x_j}^2}$$

a więc:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}.$$

Warto zastanowić się nad statystyczną interpretacją odchylenia standardowego wartości średniej. Gdybyśmy zrobili kilka serii pomiarów i w każdej takiej serii policzyli wartość średnią, wówczas rozkład wartości średnich byłby również rozkładem normalnym o odchyleniu standardowym mniejszym niż odchylenie standardowe dowolnej serii. W przedziale $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ powinno się mieścić 68% wartości średnich ze wszystkich serii pomiarowych.

Estymator odchylenia standardowego wartości średniej \bar{z} otrzymujemy wstawiając do wzoru (15) odchylenia standardowe średnich zamiast odchyłeń standardowych pojedynczych pomiarów:

$$s_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_N} \right)^2 s_{\bar{x}_j}^2} \quad (16)$$

Odchylenie standardowe wielkości mierzonej pośrednio ma analogiczną interpretację statystyczną jak odchylenie standardowe wielkości mierzonej bezpośrednio.

7. Jak dopasować teorię (model matematyczny) do danych doświadczalnych?

7.1. Metoda najmniejszych kwadratów

W doświadczeniach często się zdarza, że jedna mierzona przez nas wielkość y jest funkcją drugiej mierzonej wielkości x , przy czym mierzymy jednocześnie wartości x_i i y_i . Na przykład mierzymy wartość oporu w zależności od temperatury, czy też wielkość prądu płynącego przez fotokomórkę, w zależności od długości fali padającego światła. Zmierzone wartości przedstawiamy następnie na wykresie i próbujemy znaleźć krzywą odpowiadającą funkcji $y = f(x)$, która najlepiej opisywałaby przebieg punktów doświadczalnych.

W ogólnym przypadku, funkcja ta ma $m+1$ parametrów, co możemy wyrazić jako $y = f(x, a_0, \dots, a_m)$. Parametry te są liczbami, które chcemy wyznaczyć. Ze względu na to, że pomiary x_i i y_i są obarczone niepewnościami przypadkowymi, równania $y = f(x, a_0, \dots, a_m)$ nie są nigdy ściśle spełnione, a więc

$$y_i - f(x_i, a_0, \dots, a_m) = d_i \quad (17).$$

Za najbardziej prawdopodobne parametry a_0, \dots, a_m uważamy takie, dla których suma kwadratów odchylen d_i będzie najmniejsza, tzn.:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a_0, \dots, a_m)]^2 = \min \quad (18)$$

Zakładamy przy tym, że odchylenia d_i mają rozkład normalny.

Zastosujemy teraz metodę najmniejszych kwadratów do obliczenia parametrów funkcji liniowej. Załóżmy, że wykonujemy pomiar wielkości y , podlegającej rozkładowi normalnemu i będącej funkcją liniową wielkości x , której niepewności przypadkowe możemy zaniedbać. Punkty P_i odpowiadające parom wielkości mierzonych x_i, y_i układają się wokół szukanej prostej

$$y = ax + b \quad (19).$$

Jeśli podstawimy do tego równania zmierzoną wartość x_i , to otrzymamy wartość

$$\hat{y}_i = ax_i + b \quad (20)$$

odbiegającą na ogół od zmierzonej wartości y_i .

Parametry prostej a i b musimy dobrać w ten sposób, aby suma kwadratów różnic między wartościami zmierzonymi y_i i obliczonymi była najmniejsza, czyli

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \min \quad (21).$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum tego wyrażenia jest zerowanie się pochodnych cząstkowych względem a i b , tj.

$$2 \sum_{i=1}^n (-x_i)(y_i - ax_i - b) = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^n (-1)(y_i - ax_i - b) = 0.$$

Po dokonaniu przekształceń algebraicznych otrzymujemy układ równań liniowych

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0.$$

Rozwiązując ten układ równań względem a i b otrzymujemy parametry prostej najlepiej pasującej do danych pomiarowych

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (22),$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (23)$$

A odchylenie standardowe s_a i s_b współczynników a i b oblicza się ze wzorów:

$$s_a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n d_i^2} \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \quad (24)$$

$$s_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n d_i^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \quad (25)$$

gdzie:

$$d_i = y_i - (ax_i + b) .$$

Powyższe wzory zostały wyprowadzone po założeniu, że wszystkie wielkości y_i zmierzone zostały z jednakową dokładnością i obarczone są tylko niepewnościami przypadkowymi. Wówczas, gdy wielkości y_i zmierzone zostały z różnymi dokładnościami, musimy uwzględnić wagi poszczególnych pomiarów i wzory znacznie się komplikują.

W wielu przypadkach, jeżeli zależność między y i x nie jest liniowa, możemy naszą funkcję sprowadzić do postaci liniowej poprzez odpowiednią zamianę zmiennych.

Do postaci liniowej łatwo jest sprowadzić funkcję wykładniczą typu

$$y = ce^{ax}$$

Po zlogarytmowaniu otrzymujemy

$$\ln y = \ln c + ax .$$

Po podstawieniu $z = \ln y$, $b = \ln c$ otrzymujemy funkcję liniową

$$z = ax + b .$$

W podobny sposób można do postaci liniowej sprowadzić funkcję potęgową

$$y = cx^a$$

podstawiając $z = \log y$, $b = \log c$, $t = \log x$, otrzymujemy $z = at + b$.

W przypadku funkcji typu hiperbolicznego

$$y = \frac{a}{x} + b$$

postać liniową otrzymujemy przez podstawienie $t = \frac{1}{x}$.

7.2. Dopasowanie do dowolnego modelu

Zdarza się, że funkcje z którymi mamy do czynienia są skomplikowane i nie dadzą się przekształcić do prostej. Mogą mieć zbyt wiele parametrów czy też ich postać matematyczna może być bardziej złożona. W takiej sytuacji metoda najmniejszych kwadratów z rozdziału 7.1 nie daje się zastosować. Najprościej zastosować wtedy którąś z numerycznych metod optymalizacji funkcji. Metodą która łączy w sobie większość zalet znanych sposobów jest algorytm Levenberga – Marquardta. Jest on zaimplementowany w znakomitej większości programów do analizy danych. Zatem, wcześniej czy później, będziesz zmuszony jej użyć. Chcielibyśmy zatem przedstawić jej krótki opis, najważniejsze cechy, zalety i oczywiście wady.

Celem każdej optymalizacji jest minimalizacja (albo maksymalizacja) jakiejś funkcji zwanej funkcją celu. W przypadku dopasowania modelu matematycznego do danych doświadczalnych jest to zwykle „odstępstwo” punktów doświadczalnych od krzywej teoretycznej mierzone zmienną χ^2 . Znajdowanie minimum przebiega w trzech krokach. Pamiętaj że zmiennymi dla funkcji celu są parametry modelu! (Na pierwszy rzut oka może to być trochę skomplikowane.)

1. po pierwsze, poprzez policzenie pochodnych, sprawdzamy jaki jest wpływ poszczególnych parametrów na funkcję celu
2. następnie zwykle zakładamy, że funkcja celu jest wielowymiarową parabolą (paraboloidą) i wyliczamy gdzie znajduje się jej minimum przy zadanej wielkości kroku
3. otrzymane minimum staje się nowym punktem startowym jeżeli tylko jest lepsze tzn. funkcja celu jest mniejsza w nowym minimum, jeżeli tak nie jest to wracamy do punktu 2 i zmieniamy wielkość kroku
4. postępujemy tak do czasu aż uzyskiwane zmiany funkcji celu będą mniejsze od zadanego progu.

Opisana powyżej metoda jest bardzo szybka. Zwykle mniej niż 10 kroków pozwala osiągnąć poszukiwane dopasowanie. Dzisiejszym komputerom zajmuje to mniej niż sekundę! Nie ma też

żadnych ograniczeń w używanych modelach matematycznych.

Metoda ta dobrze działa jeśli znajdujemy się blisko minimum (tzn. musimy dobrze zgadnąć początkowe wartości wszystkich parametrów) i dobrze odgadniemy wartość kroku. Ponieważ rezultat opiera się na doświadczeniu eksperymentatora (czyli zgadywaniu podbudowanym wiedzą i umiejętnością) zawsze musimy być bardzo krytyczni w stosunku do otrzymanych rezultatów.

Stosując zaś metodę najmniejszych kwadratów otrzymamy poprawny wynik o ile nie pomyliliśmy się przy wprowadzaniu danych lub postulując model matematyczny.

8. Jeśli nie Gauss to co?

Rozpad promieniotwórczy ma charakter statystyczny. Wyniki rozpadów promieniotwórczych opisywane są rozkładem Poissona. W niniejszym rozdziale omówiony zostanie rozkład dwumianowy, rozkład Poissona oraz będzie podany przykład opracowania wyników pomiarów promieniotwórczych.

8.1. Rozkład dwumianowy

Wyprowadzenia rozkładu dwumianowego nie będziemy przytaczać (kiedyś to wyprowadzenie stanowiło materiał szkoły średniej). Przypomnijmy tylko, że zmienną losową X o rozkładzie dwumianowym otrzymujemy w następującym schemacie doświadczeń, zwanym schematem Bernoulliego. Dokonujemy n doświadczeń losowych. W rezultacie każdego doświadczenia może zajść zdarzenie A z prawdopodobieństwem p i zdarzenie przeciwne do A z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

Przyporządkujmy zdarzeniu A liczbę 1 i zdarzeniu przeciwnemu liczbę 0 . W rezultacie n doświadczeń losowych zdarzenie A może nastąpić $0, 1, 2, \dots, n$ razy. Wobec tego zmienna losowa X może przybierać wartości $k = 0, 1, 2, \dots, n$, przy czym równość $X = k$ oznacza, że w n doświadczeniach zdarzenie A zaszło dokładnie k razy. Funkcja prawdopodobieństwa tej zmiennej dana jest wzorem:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (26)$$

i nosi nazwę rozkładu dwumianowego. Nazwa ta wynika z faktu, że współczynniki $\binom{n}{k}$ w powyższym wzorze pokrywają się ze współczynnikami przy z^k w rozwinięciu na szereg dwumianu $(1+z)^n$.

8.2. Rozkład Poissona

Rozkład Poissona otrzymujemy jako przybliżenie rozkładu dwumianowego przy przejściu do granicy z liczbą prób n i założeniu, że prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia p jest małe (co implikuje warunek $k \ll n$).

Zastanówmy się, co dzieje się wówczas ze współczynnikiem przy iloczynie prawdopodobieństw w

rozkładzie dwumianowym

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\dots(n-1)n}{(n-k)!k!} \underset[k \ll n]{n \rightarrow \infty} \approx \frac{n^k}{k!} \quad (27)$$

Przekształćmy teraz iloczyn prawdopodobieństw, wprowadzając oznaczenie $y = (1-p)^{n-k}$. Logarytmując to wyrażenie otrzymamy $\ln y = (n-k) \ln(1-p)$. Korzystając z przybliżenia $(n-k) \rightarrow n$ oraz $\ln(1-p) \approx -p$ dostajemy $\ln y = -np$, a więc:

$$y = (1-p)^{n-k} \gg e^{-np} \quad (28)$$

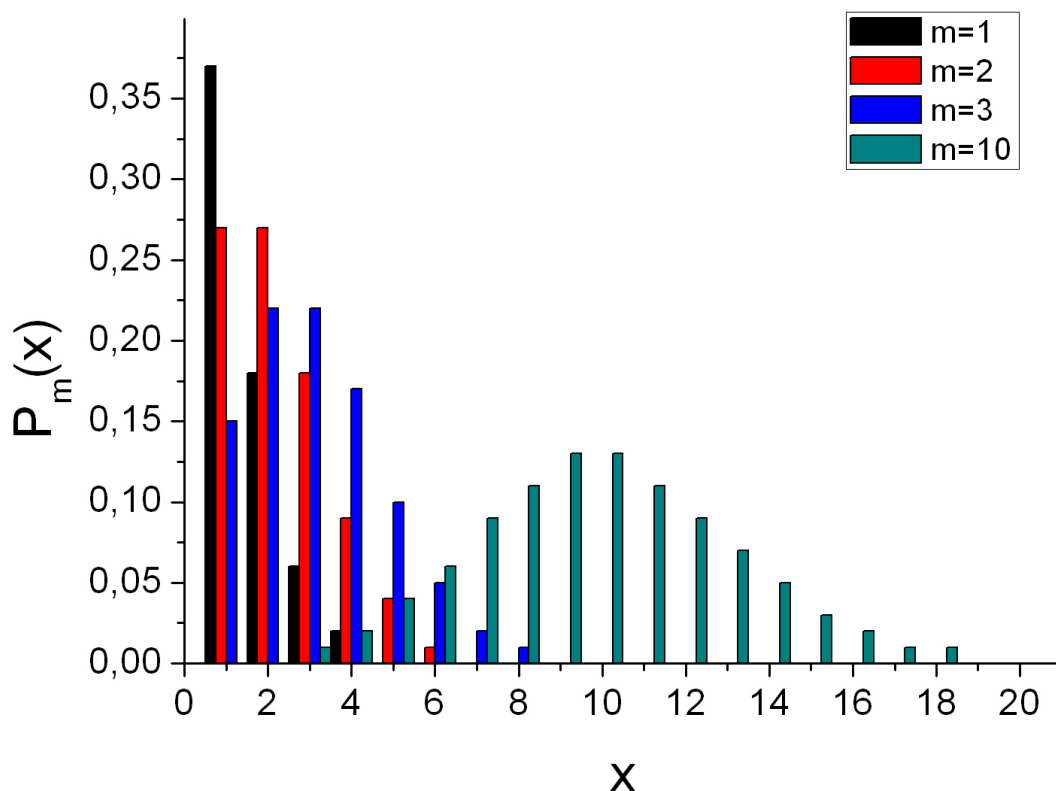
Podstawiając te dwa przybliżenia, (27) i (28), do wzoru (26) otrzymujemy rozkład Poissona:

$$P_n(k) = \frac{n^k}{k!} p^k e^{-np} \quad (29)$$

Oznaczmy iloczyn np literą m i połóżmy $k = x$, wówczas rozkład Poissona przyjmie postać (30).

$$P_m(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m} \quad (30)$$

Wyrażenie (30) określa prawdopodobieństwo zarejestrowania x rozpadów promieniotwórczych w wybranym odcinku czasu przy ustalonej wartości m . Zastanówmy się nad doświadczalną interpretacją iloczynu $np = m$. Prawo wielkich liczb Bernoulliego mówi nam, że jeśli wykonujemy n doświadczeń i prawdopodobieństwo, że nastąpi zdarzenie A wynosi p , to przy dużej liczbie prób możemy określić oczekiwaną liczbę pozytywnych zdarzeń jako $np = m$. Ilość pozytywnych zdarzeń nosi nazwę wartości oczekiwanej w schemacie prób Bernoulliego. Przypomnijmy, że wartość oczekiwana równa jest z definicji:



Rysunek 9: Rozkład Poissona dla $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=10$.

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x_i p(x_i) \quad (31)$$

gdzie x_i – zmienna losowa a $p(x_i)$ – prawdopodobieństwo jej wystąpienia. Obliczmy wartość oczekiwaną dla rozkładu Poissona

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x_i \frac{m^x}{x!} e^{-m} = \sum_{x=1}^{\infty} x_i \frac{m^x}{x!} e^{-m} = \sum_{x=0}^{\infty} m \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} e^{-m} = m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m^{-j}}{j!} e^{-m} = m \quad (32)$$

Jak wynika z powyższych zależności rozkład Poissona jest wyznaczony jednoznacznie tylko przez jeden parametr – wartość oczekiwaną, jest więc rozkładem jednoparametrycznym. Na rysunku 9 przedstawiono wykresy rozkładów Poissona dla różnych wartości m , wyraźnie niesymetryczne. Ze wzrostem m rozkład staje się coraz bardziej symetryczny.

Badając próbkę n jąder promieniotwórczych wartość oczekiwaną rozkładu Poissona $m = np$ można bardzo dobrze przybliżyć przez średnią liczbę rozpadów zarejestrowanych w naszym eksperymencie w jednostkowym przedziale czasu, tzn $np = m = N$. Obliczmy wariancję w

rozkładzie Poissona

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 \quad (33)$$

Liniową miarą rozrzutu zmiennych losowych wokół wartości średniej jest pierwiastek kwadratowy z wariancji (odchylenie standardowe)

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{m^x}{x!} e^{-m} = m \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} e^{-m} = m \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{m^j}{j!} e^{-m} = m(m+1) \quad (34)$$

Wstawiając (32) i (31) do wzoru (29) otrzymujemy:

$$D^2(X) = m = \sigma^2 \quad (35)$$

Odchylenie standardowe w rozkładzie Poissona równe jest \sqrt{m} , co tłumaczy wzrost szerokości rozkładu ze wzrostem średniej.

Z powyższego wynika, że jeżeli mamy do czynienia ze zmienną losową podlegającą rozkładowi Poissona, to większość wyników będzie się grupowało w przedziale $m \pm \sqrt{m}$. W przypadku, gdy przeprowadzany eksperyment polega na zliczaniu niezależnych wielkości przypadkowych i gdy mamy do dyspozycji tylko jeden pomiar (N) – niepewność tego pomiaru możemy określić stosując kolejne przybliżenia⁹:

$$N \simeq \bar{N} \quad \sigma = \sqrt{\bar{N}} \approx \sqrt{N} \quad (36).$$

8.3. Przykład

Pomiar polegał na liczeniu kwantów γ o energii $1,274 \text{ MeV}$ emitowanych przez ^{22}Na . Pierwszym parametrem który należy określić w czasie tego eksperymentu jest czas zliczania kwantów (wielkość tę nazywa się zwykle bramką) – tu wybrano 50 ms . Drugim parametrem jest liczba powtórzeń pojedynczego pomiaru. W opisywanym eksperymencie dokonano 100 powtórzeń. Wynik eksperymentu jest zapisany w tabeli 4.

9 Jest to odpowiednik szacowania niepewności standardowej metodą B z tym, że rozkład prostokątny został zamieniony na rozkład Poissona.

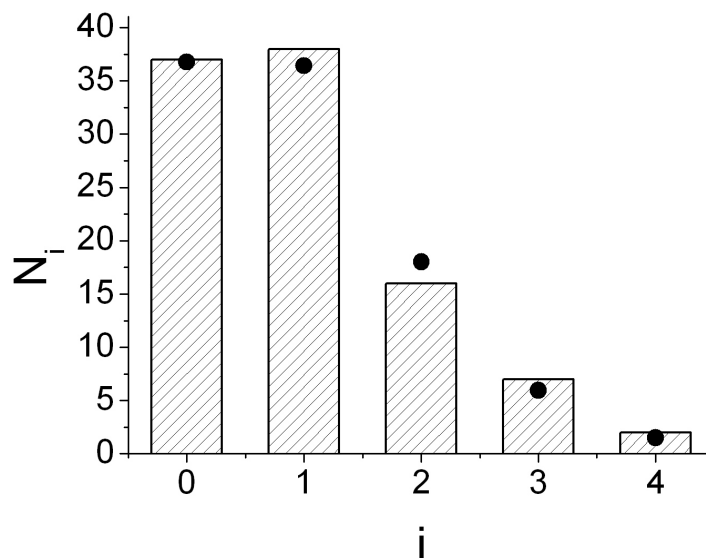
i	0	1	2	3	4
N_i	37	38	16	7	2

Tabela 4: Wyniki eksperymentu. i oznacza liczbę zliczeń, N_i liczbę wystąpień i w całej serii pomiarowej.

Zatem średnio, w ustalonym przedziale czasu do licznika dociera:

$$\bar{N} = \frac{0 \cdot 37 + 1 \cdot 38 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2}{37 + 38 + 16 + 7 + 2} = \frac{0 + 38 + 32 + 21 + 8}{100} = \frac{99}{100}$$

kwantów gamma. Jaki rozkład opisuje powyższe wyniki? Zgodnie z poprzednim podrozdziałem suma zdarzeń niezależnych (a rozpady promieniotwórcze są niezależne) jest opisana rozkładem Poissona. Wartość średnia (poprzednio oznaczona przez m) jest już policzona powyżej. Na rysunku przedstawione są rozkład otrzymany doświadczalnie i policzony ze wzoru 30.



Rysunek 10: Doświadczalny rozkład liczby rozpadów (słupki) i rozkład teoretyczny (kropki) policzony ze wzoru 30.

Na koniec powtórzmy że dokonując w ustalonym czasie pomiaru N zliczeń rozpadów promieniotwórczych możemy bez dodatkowych pomiarów stwierdzić, że niepewność tej wielkości, na poziomie jednego odchylenia standardowego wynosi \sqrt{N} . Ta niepewność statystyczna wynika ze statystycznego charakteru zjawiska.

9. Jak interpretować wyniki

9.1. Test χ^2

Test χ^2 (czyt. „chi kwadrat”) służy do ilościowej oceny zgodności serii pomiarów z krzywą teoretyczną, która naszym zdaniem powinna opisywać uzyskane punkty doświadczalne. Niech wspomniana krzywa teoretyczna ma postać $y=f(x)$, a serię pomiarową stanowić będzie l wartości wielkości y_i zmierzonych przy ustalonych wartościach x_i .

Wówczas suma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (37)$$

gdzie: σ_i – niepewność mierzonych wielkości y_i , może dobrze odzwierciedlać odstępstwa wszystkich punktów eksperymentalnych od krzywej teoretycznej. Spodziewana wielkość χ^2 winna być zbliżona do liczby składników sumy, gdyż wkład każdego ze składników przy poprawnie przeprowadzonym eksperymencie jest rzędu 1.

Dokładne prześledzenie problemu może dostarczyć bardziej precyzyjnych informacji. Można udowodnić, że jeśli wielkość y_i obarczona jest tylko niepewnościami przypadkowymi (z odchyleniem standardowym σ_i), to wielkość χ^2 również podlega pewnemu rozkładowi prawdopodobieństwa o gęstości:

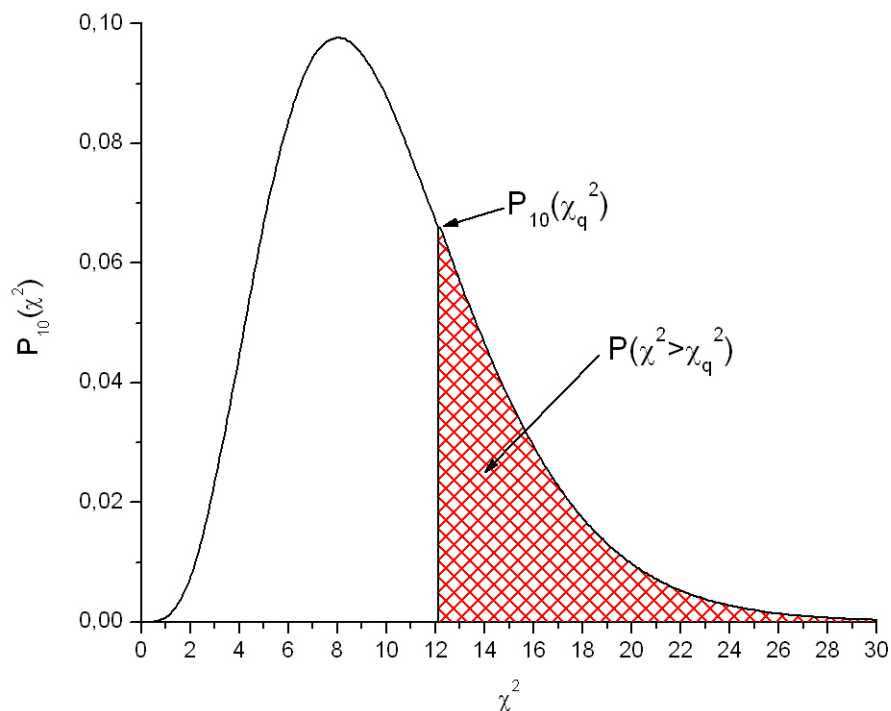
$$P_k(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (38)$$

gdzie: k jest liczbą stopni swobody rozkładu χ^2 , równą liczbie niezależnych składników sumy (7).

Wartość oczekiwana wielkości χ^2 jest równa liczbie stopni swobody k . Wyrażenie:

$$\int_{\chi_q^2}^{\infty} P(\chi^2) d\chi^2 = P(\chi^2 > \chi_q^2) \quad (39)$$

oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa χ^2 przyjmie wartość większą od χ_q^2 . Wielkość P nosi nazwę poziomu istotności – rysunek 11.



Rysunek 11: Graficzna interpretacja poziomu ufności dla testu χ^2 .

9.2. Niepewności rozszerzone/przedziały ufności

Niepewność standardowa $u_c(x)$ określa rozrzut wyników. Czasem taka informacja jest jednak niewystarczająca. Wróćmy do modelu w którym nasze pomiary opisywaliśmy rozkładem Gaussa.

Ważne znaczenie mają wartości następujących całek oznaczonych:

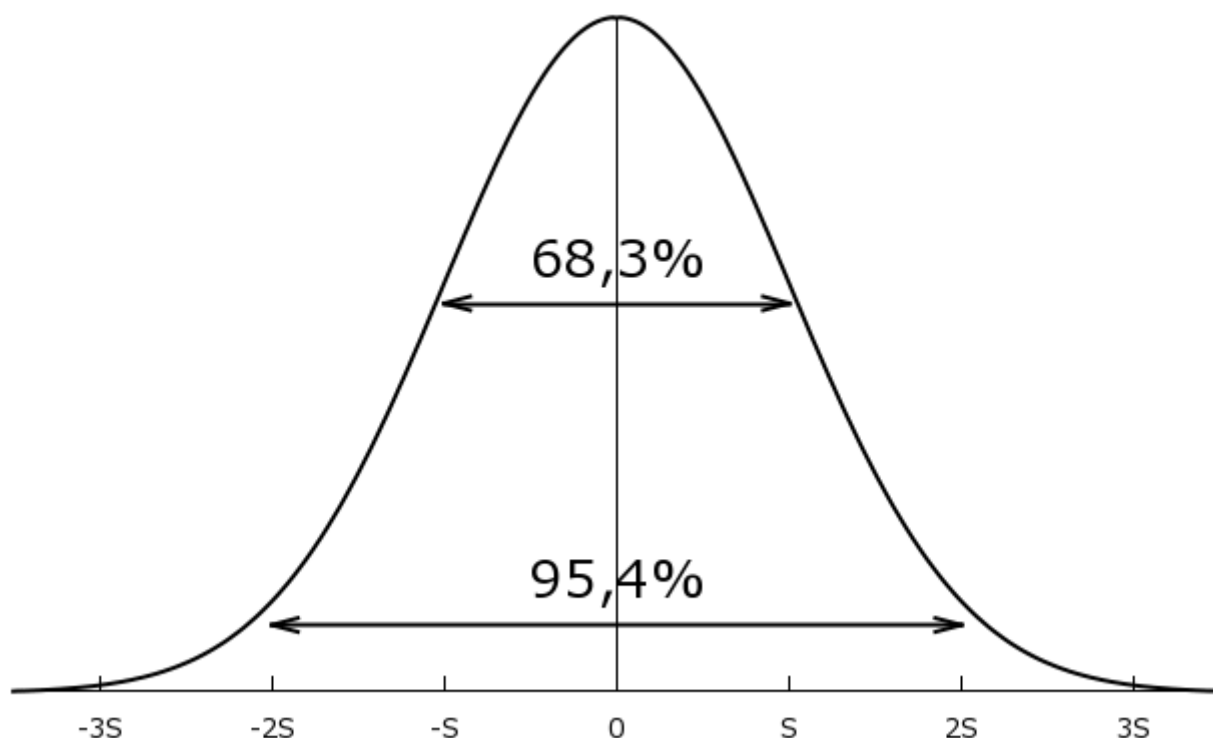
$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(x) dx = 0.683 \quad (40)$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} \varphi(x) dx = 0.954 \quad (41)$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} \varphi(x) dx = 0.997 \quad (42)$$

gdzie: $\varphi(x)$ – funkcja Gaussa.

Można z nich wyciągnąć następujące wnioski: w przedziale $x_0 \pm \sigma$ powinno znajdować się 68% pomiarów, w przedziale $x_0 \pm 2\sigma$ – 95.4% pomiarów, a w przedziale $x_0 \pm 3\sigma$ – ponad 99%.



Rysunek 12: Interpretacja odchylenia standardowego.

Oznacza to, że jeżeli np. x będzie wytrzymałością mostu to około 30% mostów nie wytrzyma planowanego natężenia ruchu. Oczywiście taka sytuacja jest niemożliwa do zaakceptowania! Wszędzie tam gdzie w grę wchodzi życie, zdrowie albo duże pieniądze chcielibyśmy dużo większej pewności niż „prawie” 70%. W takich przypadkach wprowadza się tzw. niepewność rozszerzoną – U . Niepewność ta jest po prostu k – razy zwiększoną niepewnością standardową.

$$U = k u_c(y)$$

Dobór współczynnika k nie jest łatwym zadaniem. Trzeba znaleźć rozkład statystyczny interesującej nas wielkości Y (co jest chyba najtrudniejsze), ustalić jakie prawdopodobieństwo jest akceptowalne i wyznaczyć odpowiadający mu przedział ufności czyli współczynnik rozszerzenia - k .

W praktyce, jeżeli niepewność standardowa została oszacowana na podstawie dużej liczby pomiarów i jest ona względnie niewielka, można przyjąć że pomiar Y może być opisany rozkładem

normalnym. Jeżeli tak to $k = 2$ odpowiadałoby $p = 95\%$ a $k = 3$ odpowiadałoby $p = 99\%$. Jeśli wyniki pomiarów nie mogą być opisane rozkładem normalnym, to wartości współczynników rozszerzenia będą inne niż podane powyżej.

Niepewności rozszerzone zapisujemy:

$$Y = y \pm U$$

podając jednocześnie wartość prawdopodobieństwa p oraz sposób określenia współczynnika k i jego wartość.

10. Jak rozwiązać problem małej liczby pomiarów oraz problem pomiarów o niejednakowej dokładności.

W tym rozdziale zamieściliśmy bardziej zaawansowane problemy.

10.1. Mała liczba pomiarów (rozkład t – Studenta).

Niepewność standardowa $u(x)$ pomiaru wielkości fizycznej wymodelowany rozkładem Gaussa oznacza, że jej wartość rzeczywista x_0 znajduje się z prawdopodobieństwem 68.3% w przedziale $x - u(x) \leq x_0 \leq x + u(x)$. Informację tę możemy zapisać w postaci:

$$P(x - u(x) \leq x_0 \leq x + u(x)) = 0.683$$

a dla niepewności rozszerzonej w postaci

$$P(x - U(x) \leq x_0 \leq x + U(x)) = \alpha \quad (43)$$

Przy czym prawdopodobieństwo α nosi nazwę **poziomu istotności**, a przedział $(\bar{x} - \Delta x, x + \Delta x)$ - **przedziału ufności**.

Wyrażenie (43) oznacza, że z prawdopodobieństwem α wartość rzeczywista znajduje się w granicach podanego przedziału. Im większego prawdopodobieństwa żądamy, tym większy otrzymujemy przedział ufności i odwrotnie. Przypomnijmy raz jeszcze, że dla przedziału ufności $x - 2u(x) \leq x_0 \leq x + 2u(x)$ poziom istotności α wynosi 0.95 (współczynnik rozszerzenia $k = 2$), a dla przedziału $\bar{x} - 3u(x) \leq x_0 \leq x + 3u(x)$ $\alpha = 0.997$ ($k = 3$).

Podane powyżej wartości przedziałów ufności i poziomów istotności są jednak poprawne tylko w przypadku dostatecznie dużej liczby pomiarów, gdy wartość średnią \bar{x} z serii pomiarów i odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru s_x możemy uznać za bardzo dobre przybliżenie wartości rzeczywistej x_0 i parametru σ rozkładu wyników pomiarów. Dzieje się tak dlatego, że wartości prawdopodobieństwa α wyznaczone są jako wartości całek z funkcji Gaussa o parametrach x_0 i σ , obliczanych w granicach określonych przedziałem ufności. Dla małej liczby pomiarów wartości \bar{x} i s_x mogą bardzo odbiegać od wartości x_0 i σ . Gdybyśmy, na przykład, z 40 pomiarów grubości płytki ołowianej wybierali losowo po 5 pomiarów, to za każdym razem moglibyśmy otrzymać różne wartości średnie i różne odchylenia standardowe.

Dlatego chcąc zachować poziomy ufności takie, jak dla nieskończenie dużej liczby pomiarów,

musimy w przypadku niewielkiej liczby pomiarów n , zwiększyć przedziały ufności, mnożąc oszacowaną niepewność ($u_s(x)=s_{\bar{x}}$) przez odpowiednie współczynniki $t_{\alpha,n}$ noszące nazwę współczynników **t – Studenta**. A więc:

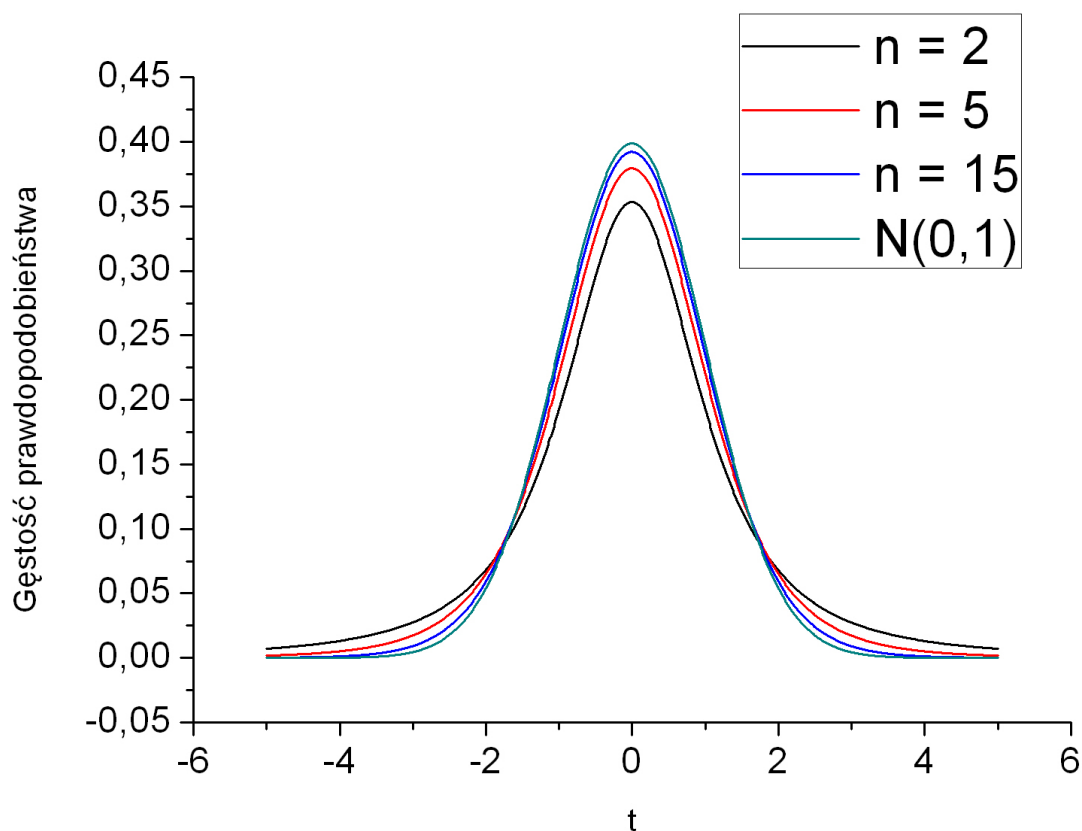
$$U(x) = t_{\alpha,n} s_{\bar{x}}$$

$$P(\bar{x} - U(x) \leq x_0 \leq \bar{x} + U(x)) = \alpha$$

Współczynniki $t_{\alpha,n}$ podlegają tzw. rozkładowi t – Studenta

$$S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Rozkład ten dla bardzo dużych n ($n \geq 30$) przechodzi w rozkład Gaussa jak pokazano na rysunku 13.



Rysunek 13: Wykres gęstości prawdopodobieństwa rozkładu t – Studenta dla 2, 5 i 15 stopni swobody oraz rozkład normalny.

Przykład.

Wyniki dziesięciu pomiarów grubości płytki ołowianej wyrażone w mm wynoszą odpowiednio: 10.95; 10.92; 10.97; 10.94; 10.92; 10.96; 10.97; 10.96; 10.93; 10.98. Znajdźmy przedziały ufności przy poziomach istotności $\alpha = 0.683$ i $\alpha = 0.997$ (niepewność rozszerzona z $k = 3$) dla odpowiednio pierwszych 3 i 10 pomiarów.

Dla 3 pierwszych pomiarów obliczamy wartość średnią \bar{x} i wielkość $s_{\bar{x}}$. Otrzymujemy $x_3 = 10.947 \text{ mm}$ i $s_{x_3} = 0.014 \text{ mm}$. Dla poziomu ufności $\alpha = 0.683$ znajdujemy w tablicy rozkładu t – Studenta wartość współczynnika $t_{0.683,3} = 1.321$. Odchylenie standardowe będzie zatem $u(x_3) = s_{x_3} t_{0.683,3} = 0.019 \text{ mm}$. Przedział ufności, w którym z prawdopodobieństwem 68.3% winna znajdować się wartość rzeczywista która wynosi $(10.947 \pm 0.019) \text{ mm}$.

Wyniki obliczeń uzyskane w wyżej podany sposób zamieszczone zostały w tabelach 5 i 6.

Liczba pomiarów n	x_n [mm]	s_{x_n} [mm]	$t_{0.683,n}$	$u(x_n)$ [mm]
3	10.947	0.014	1.321	10.947(19)
10	10.950	0.007	1.059	10.950(7)

Tabela 5: Poziom istotności $\alpha = 0,683$.

Liczba pomiarów n	x_n [mm]	$3s_{x_n}$ [mm]	$t_{0.997,n}$	$U(x_n), k=3$ [mm]
3	10.947	0.042	8.89	10.95(27)
10	10.950	0.021	3.89	10,950(28)

Tabela 6: Poziom istotności $\alpha = 0.997$.

Zamieszczona w powyższej tablicy wartość $3s_{\bar{x}}$ podana została w celu zorientowania się na ile istotne są poprawki wynikające z rozkładu t – Studenta. Z powyższego zestawienia nasuwają się dwa wnioski dotyczące rozkładu t:

1. Żądanie wysokich poziomów istotności przy małej liczbie pomiarów (3+6) jest nieuzasadnione i może prowadzić, ze względu na bardzo duże współczynniki t , do zawyżonego (a niekiedy niefizycznego) oszacowania niepewności pomiarowych.
2. Dla niewysokich poziomów istotności ($\alpha \approx 0.7$) stosowanie współczynników t – Studenta

dla $n \geq 10$ staje się już nieistotne (poprawka jest mniejsza od 6% niepewności pomiarowej).

10.2. *Pomiary o niejednakowej dokładności.*

Czasami zdarza się że mamy kilka pomiarów pewnej wielkości wykonanych z różną dokładnością. Przyczyną mogą być różne metody pomiarowe, istotne różnice w warunkach wykonywania pomiaru lub znacząco różna liczba pomiarów. Szacowanie wartości wielkości rzeczywistej poprzez średnią arytmetyczną prowadzi wówczas do nieusprawiedliwionego równouprawnienia pomiarów o różnej dokładności. Najbardziej wiarygodną (wyprowadzoną z tzw. metody największej wiarygodności) oceną wartości rzeczywistej jest wówczas tzw. średnia ważona \bar{x}_w , zdefiniowana wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (44)$$

gdzie: x_i – wynik i-tego pomiaru, w_i – waga i-tego pomiaru, n – liczba pomiarów.

Wagę w_i definiujemy jako odwrotność kwadratu niepewności.

$$w_i = \frac{1}{u^2(x_i)} \quad (45)$$

Przy tak zdefiniowanej średniej ważonej, największy wpływ na wynik końcowy mają pomiary o największej wadze, a więc obciążone najmniejszą niepewnością pomiarową.

Niepewność pomiarową średniej ważonej można łatwo policzyć na podstawie znanego już wzoru określającego niepewność wielkości złożonej.

$$u(x_w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_w}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^2} \sum_{i=1}^n w_i^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n u^2(x_i)}} \quad (46)$$

Przykład:

Wykonano pomiary położenia widma I, II i III rzędu w siatce dyfrakcyjnej oświetlonej światłem sodowym (światło pomarańczowe o długości fali $\lambda = 589.3 \text{ nm}$), otrzymując następujące wartości kątów ugięcia: $6^\circ 50'$, $13^\circ 45'$, $20^\circ 50'$. Niepewność wyznaczenia kątów składa się z dokładności

odczytu kąta wynoszącej 1', do której musimy dodać połowę szerokościątowej obrazu szczeliny (niepewności oszacowane Metodą B).

Ostatecznie niepewność odczytu kąta dla I, II i III rzędu wynosi odpowiednio: 10', 18', 40'. Należy wyznaczyć stałą siatki dyfrakcyjnej.

Stałą siatki dyfrakcyjnej obliczamy ze wzoru:

$$d = \frac{k \lambda}{\sin \phi_k}$$

gdzie: k – rząd widma, λ – długość fali światła sodowego i ϕ_k – kąt ugięcia.

Niepewność stałej siatki należy oszacować na podstawie zależności opisującej niepewność wielkości złożonej:

$$u(d) = \sqrt{\left(-\frac{k \lambda}{\sin^2 \phi_k} \right)^2 u^2(\phi_k)}.$$

Niepewności wyznaczenia kątów w przeliczeniu na radiany wynoszą: 0.0017 rad, 0.0030 rad, 0.0067 rad.

Tak więc wartości stałych siatki dyfrakcyjnej dla trzech kolejnych rzędów widma są równe:

$$\begin{aligned} d_I &= (4953 \pm 70) \text{ nm} \\ d_{II} &= (4959 \pm 63) \text{ nm} \\ d_{III} &= (4970 \pm 94) \text{ nm} \end{aligned}$$

Końcowy wynik na stałą siatki uzyskamy licząc średnią ważoną na podstawie wzoru (44) i jej niepewność systematyczną z zależności (46). Obliczenia zostały umieszczone w Tabeli 7.

k	d_k [nm]	$u(d_k)$ [nm]	w_k [nm ⁻²]	$d_k w_k$ [nm ⁻¹]
1	4953	70	0.000204	1.01
2	4959	63	0.000252	1.25
3	4970	94	0.000113	0.56
		Suma:	0.000569	2.82

Tabela 7: Obliczenie stałej siatki dyfrakcyjnej – d .

Zatem:

$$d = \frac{2,82}{0,000569} = 4956,0632688927943760984182776801$$

$$u(d) = \frac{1}{\sqrt{0,000569}} = 41,922180815031855354210392334891$$

Mając obliczone wartości można już zapisać wynik końcowy:

$$d_w = (4956 \pm 42) \text{ nm}$$

11. Dodatki

11.1. Wartość oczekiwana i wariancja dla rozkładu Gaussa i rozkładu prostokątnego

Wartość oczekiwana (przeciętna) zmiennej losowej X o ciągłym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ określana jest wzorem

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (47)$$

Rozrzut zmiennej losowej wokół wartości przeciętnej opisuje inny parametr rozkładu, tzw. wariancja $D^2(X)$. Rozrzut ten jest scharakteryzowany poprzez wartość przeciętną kwadratu odchylenia zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej

$$D^2(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx. \quad (48)$$

Policzmy teraz te dwa parametry: wartość oczekiwaną oraz wariancję dla rozkładu normalnego i prostokątnego.

Rozkład normalny posiada gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$ określoną wzorem.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]}.$$

Obliczenie jego wartości oczekiwanej sprowadza się więc do policzenia całki:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

Wprowadzając podstawienie $t = \frac{x-a}{\sigma}$ mamy:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a) e^{\left[-\frac{1}{2}t^2\right]} \sigma dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)} dt$$

Pierwsza z tych całek jest równa zeru, ponieważ funkcja podcałkowa jest funkcją nieparzystą, natomiast drugą całkę liczymy następująco:

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)} dt$$

Podstawiając $t = \sqrt{2} y$ i korzystając ze znajomości całki:

$$\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

mamy:

$$\frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{2a \sqrt{2} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi} 2} = a$$

A więc dla funkcji Gaussa wartość oczekiwana równa jest wartości a , przy której funkcja przyjmuje wartość maksymalną $E(X) = a$.

Wariację rozkładu normalnego policzymy, korzystając ze wzoru (48) oraz policzonej powyżej wartości przeciętnej rozkładu normalnego

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m d_i g_k \approx 0,$$

$$D^2(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{\left(\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

podstawiając $t = \frac{x-a}{\sigma}$ otrzymujemy

$$D^2(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \sigma^2 e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)} \sigma dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} t^2 dt$$

Całkując przez części, przy zastosowaniu następujących podstawień

$$\begin{aligned} t &= u & v &= -e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ dt &= du & dv &= t e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

$$D^2(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-t e^{-\frac{1}{2}t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right]$$

Scałkowane wyrażenie jest równe zeru, a całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

a więc wariancja rozkładu normalnego przyjmuje wartość

$$D^2(X) = \sigma^2$$

Rozkład prostokątny jest to rozkład o gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ stałej w przedziale (a, b) a poza tym przedziałem – równej zero. Wartość funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) otrzymujemy z warunku normalizacji (powierzchnia pod krzywą, opisującą gęstość prawdopodobieństwa, winna być równa 1)

$$f(x) \cdot (b-a) = 1$$

czyli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{dla } x < a \text{ i } x > b \end{cases}$$

Tak więc wartość oczekiwaną dla rozkładu normalnego policzymy ze wzoru

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}$$

a wariancję dla tego rozkładu definiuje nam zależność

$$D^2(X) = \int_a^b \left(x - \frac{b-a}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

11.2. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru

Różnicę pomiędzy pomiarem x_i a wartością rzeczywistą x_0 oznaczmy przez d_i

$$d_i = x_i - x_0 \quad (49)$$

natomiast różnicę między pomiarem x_i a wartością średnią \bar{x} przez w_i

$$w_i = x_i - \bar{x} \quad (50)$$

Wówczas wzory (5) i (6). z rozdziału 5.1 przyjmują postać:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2}, \quad (51)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n w_i^2} \quad (52)$$

sumując d_i dla wszystkich składników i otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n x_i - nx_0$$

skąd:

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

Skorzystajmy z definicji średniej arytmetycznej

$$x_0 = \bar{x} - \bar{d}$$

Podstawiając ostatnią zależność do wzoru (49) i uwzględniając wzór (50)

$$d_i = x_i - \bar{x} + \bar{d}$$

$$d_i = w_i + \bar{d}$$

$$w_i = d_i - \bar{d} \quad (53)$$

Zależność (53) podnosimy do kwadratu, sumujemy po i , a następnie dzielimy przez n , otrzymując w rezultacie:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2 = \overline{d^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2 - \frac{2}{n} \bar{d} \sum_{i=1}^n d_i \quad (54)$$

Korzystając z definicji średniej arytmetycznej, wzór (54). można przekształcić do postaci:

$$\overline{w^2} = \overline{d^2} + (\bar{d})^2 - 2(\bar{d})^2 \quad (55)$$

Aby znaleźć związek między kwadratem średniej $(\bar{d})^2$, a średnią kwadratów $\overline{d^2}$, należy zauważyć że:

$$(\bar{d})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n (d_1 d_i + d_2 d_i + \dots) \right] \quad (56)$$

Zaniedbując wyrazy wyższych rzędów i po raz kolejny uwzględniając definicję średniej arytmetycznej zależność (56). upraszcza się do postaci

$$(\bar{d})^2 = \frac{1}{n} \overline{d^2}$$

Wówczas zależność (55) przyjmuje postać:

$$\overline{w^2} = \overline{d^2} + (\bar{d})^2 - 2(\bar{d})$$

$$(\bar{d})^2 = \frac{1}{n} \overline{d^2}$$

$$\overline{w^2} = \overline{d^2} + \frac{1}{n} \overline{d^2} - \frac{2}{n} \overline{d^2} = \overline{d^2} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} \right),$$

$$\overline{w^2} = \frac{n-1}{n} \overline{d^2}$$

Rozpisując wartości średnie:

$$\frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (57)$$

i wstawiając zależność (40) do wzoru (51) przy uwzględnieniu (50). otrzymujemy:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Tak więc został udowodniony wzór (6). z rozdziału (5.1) na odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru.

12. Końcówka

12.1. Czy zatem kość do gry jest uczciwa?

Spróbujmy zadać pytanie postawione w tytule rozdziału troszeczkę inaczej. Uczciwą kość do gry zdefiniujemy jako kość dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia każdej liczby oczek jest jednakowe. Pomiar polegał na oszacowaniu prawdopodobieństwa wyrzucenia każdej z liczby oczek. Bezpośrednio z definicji prawdopodobieństwa wynika że trzeba po prostu policzyć ile ze wszystkich rzutów dało po kolei jedno oczko, dwa oczka, itd. Spodziewamy się że w każdym przypadku dostaniemy liczbę bliską, ale nie dokładnie równą, sto. Jeżeli zatem różnica pomiędzy wartością teoretyczną a uzyskaną w doświadczeniu nie będzie „zbyt duża” kość uznamy za uczciwą. Żeby opisać tę różnicę ściśle, musimy wykorzystać statystykę. Na pewno znamy wartość oczekiwaną, czyli liczbę rzutów dla danej liczby oczek. Nasz pomiar, czyli sumę (bo zliczamy rzuty) zdarzeń niezależnych (bo każdy wynik jest bez związku z innymi wynikami), opisuje rozkład dwumianowy. Odchylenie średnie tego rozkładu jest równe $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$. Znając rozkład i wszystkie jego parametry możemy teraz sprawdzić czy otrzymane przez nas odstępstwo jest „duże”. A właściwie czy jest prawdopodobne! Oczywiście posłużymy się testem χ^2 opisanym w rozdziale 9.1. Zbierzmy dane:

- wyniki pomiarów są w tabeli 1 (oraz powtórzone w tabeli 8); liczbę oczek indeksujemy i , natomiast liczbę rzutów z i oczkami oznaczmy n_i
- wartość oczekiwana: $y_i = 100$ dla $i = 1, \dots, 6$
- odchylenie średnie standardowe rozkładu dwumianowego (niepewność pomiaru):

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{600 \cdot 1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = 9.13 \text{ dla } i = 1, \dots, 6$$

- hipoteza zerowa (czyli sprawdzana): kość jest uczciwa co oznacza że $n_i = 100$ dla $i = 1, \dots, 6$

Przypomnijmy jeszcze wzór na zmienną χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{y_i - n_i}{\sigma_i} \right)^2$$

W tabeli 8 są zamieszczone wyniki obliczeń.

i	1	2	3	4	5	6
n_i	92	110	98	112	95	93
χ_i^2	0.77	1.20	0.05	1.73	0.3	0.59

Tabela 8: Wyniki eksperymentu i test χ^2 .

Otrzymaliśmy zatem: $\chi^2 = 4.63$. Przyjmijmy poziom istotności $\alpha = 10\%$ (tzn. godzimy się na to że 10% uczciwych kości zostanie przez nas uznane za nieuczciwe). Wartość progową możemy znaleźć w Tablicach albo policzyć w którymś z dostępnych programów. Dla sześciu stopni swobody $k = 6$ wartość progowa $\chi_p^2 \approx 10.6$. Ponieważ otrzymana doświadczalnie wartość χ^2 jest mniejsza od wartości progowej $\chi_p^2 > \chi^2$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy czyli uznajemy kość za uczciwą przy poziomie istotności $\alpha = 10\%$.

12.2. Jeszcze raz pomiary płytki

Na zakończenie powtórzmy jeszcze raz kluczowe punkty analizy niepewności pomiaru objętości płytki. Po co? – ponieważ jest to bardzo dobry przykład kolejnych kroków jakie trzeba podjąć żeby poprawnie oszacować niepewność¹⁰.

Powtórzmy jeszcze że objętości płytki V jest funkcją średnicy płytki – φ , oraz jej grubości – d .

$$V = V(\varphi, d) = \frac{\pi \varphi^2 d}{4}$$

I. Najpierw mierzymy grubość płytki śrubą mikrometryczną.

1. Z rozdzielczości przyrządu szacujemy niepewność maksymalną (Metoda B): $\Delta d = 0,01 \text{ mm}$.

2. Ze sposobu odczytu wielkości mierzonej ze skali szacujemy niepewność tego odczytu: $\Delta d_e = 0,005 \text{ mm}$.

3. Korzystając z wzoru (7) $u_s(d) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d - d_i)^2}{n(n-1)}}$ szacujemy niepewność ze statystycznego rozkładu otrzymanych wyników: $u_s(d) = 0,012 \text{ mm}$.

4. Czy są jeszcze inne źródła niepewności pomiarowej których wpływ możemy oszacować?

5. Dodajemy do siebie, korzystając ze wzoru (9) $u_c(d) = \sqrt{u_s^2(d) + \frac{(\Delta d)^2}{3} + \frac{(\Delta d_e)^2}{3} + \dots}$, niepewności z punktów I.1 i I.2 otrzymując niepewność całkowitą: $u_c(d) = 0,013 \text{ mm}$.

II. Następnie mierzymy średnicę płytki suwmiarką. Postępując analogicznie jak w punkcie I szacujemy składowe niepewności mierzonej wielkości.

1. $\Delta \varphi = 0,01 \text{ cm}$

2. $\Delta \varphi_e = 0,005 \text{ cm}$

3. $u_s(\varphi) = 0,002 \text{ cm}$

4. ???

5. $u_c(\varphi) = 0,006 \text{ cm}$

III. Teraz mając już niepewności wielkości których funkcją jest objętość możemy oszacować niepewność standardową objętości płytki. Korzystamy z wzoru:

$$u_c(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V(d, \varphi)}{\partial d}\right)^2 u_c^2(d) + \left(\frac{\partial V(d, \varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 u_c^2(\varphi)}.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy interesujący nas wynik. Pozostaje tylko **poprawnie** go zapisać.

¹⁰ Może to być dobra ściągą!

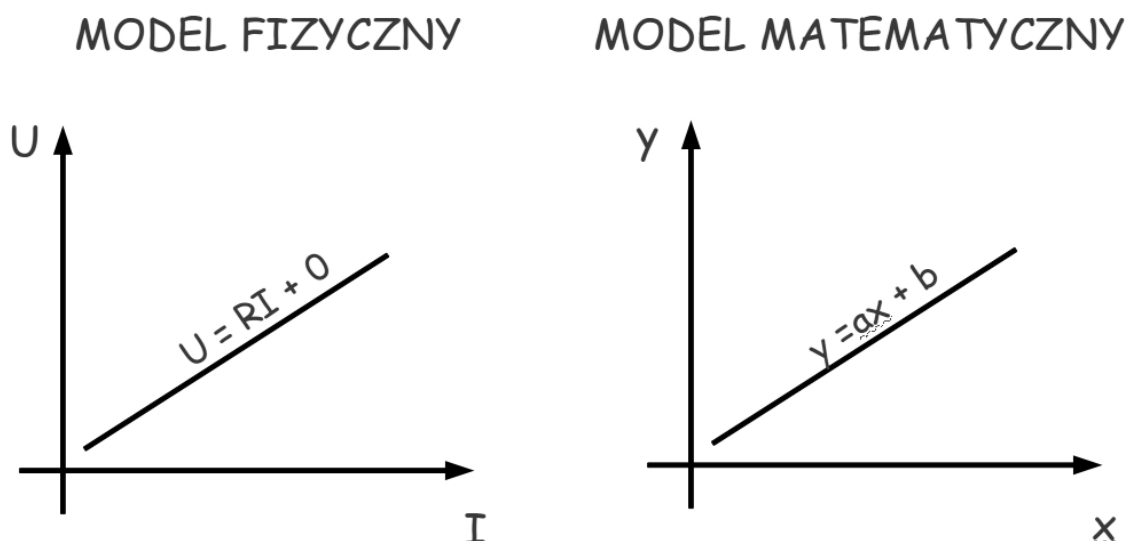
12.3. Przykład wykorzystania metody najmniejszych kwadratów

Nieźłym przykładem będzie ponowne przeanalizowanie przykładu z rozdziału 3 w którym jest pokazane jak narysować wykres i zapisać wynik. Potrzebne wzory (22), (23), (24) i (25) zostały wyprowadzone w rozdziale 7.1. Dane pomiarowe umieszczone są w tabeli 2.

Od czego zatem zacząć? Oczywiście od modelu fizycznego (który w tym konkretnym przypadku jest oczywiście oczywisty):

$$U(I) = RI.$$

Porównując z równaniem prostej $y(x) = ax + b$ natychmiast można przypisać znaczenie matematycznym współczynnikom. Rysunek 8 przedstawia graficznie to rozumowanie.



Rysunek 14: Graficzne porównanie modelu fizycznego i matematycznego.

Współczynnik kierunkowy prostej jest oporem R , zmienną niezależną jest natężenie prądu a zmienną zależną mierzone na oporniku napięcie. Współczynnik b , w zaproponowanym modelu, jest równy zero. Należałoby zatem również sprawdzić czy tak jest w rzeczywistości. Będzie to test pozwalający stwierdzić czy teoria dobrze opisuje rzeczywistość.

$$a \rightarrow R, \quad b \approx 0, \quad x \rightarrow I, \quad y \rightarrow U$$

Dane pomiarowe zostały powtórzone w szarej części tabeli 9. Przed policzeniem współczynników prostej (patrz odpowiednie równania) trzeba wykonać kilka dodatkowych operacji. W tabeli 9, w czwartej i piątej kolumnie zostały wyliczone $U \cdot I$ oraz I^2 ; w szóstej, nieco na wyrost, wielkość d^2 ; w ostatnim wierszu znajduje się suma poszczególnych kolumn.

	U [V]	I [mA]	0.0000	0.0000	0.0000
1	2.3	5	11.5	25	0.0056
2	4.6	10	46	100	0.0008
3	7.0	15	105	225	0.0135
4	9.1	20	182	400	0.0015
5	11.4	25	285	625	0.0001
6	13.7	30	411	900	0.0028
7	16.0	35	560	1225	0.0096
8	18.2	40	728	1600	0.0019
9	20.1	45	904.5	2025	0.0967
10	22.8	50	1140	2500	0.0181
	125.2	275	4373	9625	0.1505

Tabela 9: Dane pomiarowe wraz z obliczeniami. Trzy ostatnie kolumny to obliczenia. W ostatnim wierszu znajduje się suma poszczególnych kolumn.

W ten sposób, wymagający, zdaniem autorów, najmniej wysiłku, zostały policzone wszystkie wielkości potrzebne do wyliczenia współczynników, zatem:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{10} I_i \sum_{i=1}^{10} U_i - 10 \sum_{i=1}^{10} I_i U_i}{\left(\sum_{i=1}^{10} I_i \right)^2 - 10 \sum_{i=1}^{10} I_i^2} = \frac{275 \cdot 125.2 - 10 \cdot 4373}{275^2 - 10 \cdot 9625} = \frac{34430 - 43730}{75625 - 96250} = 0.450909$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{10} I_i \sum_{i=1}^{10} I_i U_i - \sum_{i=1}^{10} U_i \sum_{i=1}^{10} I_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{10} I_i \right)^2 - 10 \sum_{i=1}^{10} I_i^2} = \frac{275 \cdot 4373 - 125.2 \cdot 9625}{275^2 - 10 \cdot 9625} = \frac{1202575 - 1205050}{75625 - 96250} = 0.12$$

Pozostają jeszcze do policzenia niepewności wyznaczonych współczynników.

$$u(a) = \sqrt{\frac{1}{10-2} \sum_{i=1}^{10} d_i^2} \sqrt{\frac{10}{10 \sum_{i=1}^{10} I_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} I_i \right)^2}} = \sqrt{\frac{0.1505}{8}} \sqrt{\frac{10}{10 \cdot 9625 - 275^2}} = \sqrt{\frac{1.505}{8 \cdot 20625}} = 0.003020134$$

$$u(b) = \sqrt{\frac{1}{10-2} \sum_{i=1}^{10} d_i^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} I_i^2}{10 \sum_{i=1}^{10} I_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} I_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{0.1505}{8}} \sqrt{\frac{9625}{10 \cdot 9625 - 275^2}} = 0.093697207$$

Zatem zapisując wyniki otrzymujemy: $a=0.450(3)$, $b=0.12(9)$. Interpretując otrzymane matematyczne współczynniki możemy powiedzieć że:

$$R=0.450(3)k\Omega=450(3)\Omega$$

Spodziewaliśmy się otrzymać współczynnik b równy (bardziej ściśle: bliski) zero. Otrzymana wartość różni się od zera. Różnica ta jest większa od niepewności standardowej pomiaru $u(b)$. Ale nie jest dużo większa $b-0=1.33 \cdot u(b)$. Jeśli porównać tę wartość z dystrybuantą rozkładu gaussa to okaże się że zaistniałej sytuacji odpowiada prawdopodobieństwo:

$$\int_{-1,33\sigma}^{1,33\sigma} \phi(x) dx = 0.82$$

Powyższy wynik możemy zinterpretować np. tak: (wiedząc że niepewność pomiaru ma interpretację statystyczną) mierząc (pośrednio) b mieliśmy mniej szczęścia (mniej więcej o $82\% - 68\% = 14\%$) i nie zmieściliśmy się w ogólnie przyjętym przedziale; ale jeśli zaakceptujemy te dodatkowe 14% możemy przyjąć że pomiary pozostają w zgodzie w przyjętym modelem.

Uważny czytelnik może zapytać dlaczego w rozdziale 3.3 otrzymaliśmy inne wyniki. Otóż, wykorzystane tu wzory są najprostszym wariantem metody. Celem powyższego przykładu jest jak najprostsze pokazanie krok po kroku sposobu postępowania i umożliwienie Studentowi zrozumienie zagadnienia. Poprzednio została wykorzystana najbardziej zaawansowana wersja metody, uwzględniająca niepewności poszczególnych pomiarów jako wagi – wszystkie żmudne obliczenia wykonywał komputer.

12.4. Pytania

1. Co to jest niepewność pomiarowa?
2. Jaka jest różnica pomiędzy błędem pomiarowym a niepewnością pomiaru?
3. Po co linearyzować funkcje i stosować metodę najmniejszych kwadratów?
4. Co to jest histogram?
5. Co to jest cyfra najbardziej znacząca?
6. Jaka jest reguła zapisu niepewności pomiarowych i z czego ona wynika?
7. Czym różnią się Metoda A i Metoda B oceny niepewności pomiarowych?
8. Kiedy stosujemy Metodę A a kiedy Metodę B?
9. Jak interpretujemy wartość średnią i odchylenie średnie standardowe serii pomiarów?
10. Czym, z punktu widzenia statystyki, jest niepewność standardowa?
11. Dlaczego niepewności pomiarowe pochodzące z różnych źródeł dodajemy w tak dziwny sposób?
12. Czy zamiast niepewności możemy szacować i dodawać błędy (niepewności graniczne)?
13. Dlaczego niepewność wielkości złożonej wyraża się tak skomplikowanym wzorem?
14. Na czym polega test χ^2 ?
15. Co to jest niepewność rozszerzona i czym różni się od niepewności standardowej?
16. W jaki sposób wyznacza się współczynnik rozszerzenia?

12.5. Zadania

1. W wyniku pomiaru długości stołu otrzymano wynik 149.1 cm. Zapisz poprawnie wynik pomiaru wiedząc że pomiaru dokonano miarką z podziałką milimetrową.
2. Suwmiarką zmierzono średnicę śrutu. Z podziałki odczytano 15.5 mm. Zapisz poprawnie wynik pomiaru.
3. Śrubą mikrometryczną zmierzono grubość blachy w 10 miejscach. Z podziałki urządzenia odczytano: 2.21; 2.22; 2.20; 2.02; 2.19; 2.21; 2.20; 2.22; 2.23; 2.20. Ile wynosi grubość blachy?
4. Jeden bok prostokąta (10 mm) zmierzono linijką a drugi suwmiarką (5,1 mm). Wyznacz pole prostokąta.
5. Wyznacz pole wycinka koła. Średnica koła wynosi 5,0(1) mm a kąt $25(1)^\circ$.

13. **Posłowie**

Wiadomości zawarte w Skrypcie, który Państwo właśnie skończyliście czytać, wystarczą do opracowania wyników pomiarów otrzymywanych przez studentów wykonujących ćwiczenia w Centralnym Laboratorium Fizycznym Wydziału Fizyki PW.

Warto podsumować czym różni się podejście do liczenia niepewności pomiarowych prezentowane w tym skrypcie w porównaniu z metodami zalecanymi w poprzednich wersjach. W tym skrypcie zaleca się podawanie niepewności **na poziomie jednego odchylenia standardowego**, zgodnie z zaleceniami Joint Committee for Guides in Metrology opisanymi w dokumencie „Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement” z 2008 r. . Używana terminologia jest również zgodna z tym dokumentem. Również, zgodnie z tymi zaleceniami, „metoda różniczki zupełnej” jest metodą „zakazaną”, gdyż generuje ona tak zwany „błąd maksymalny”, który jest co najmniej 3 razy większy niż wielkość jednego odchylenia standardowego.

Podkreślmy jeszcze związek między „metodami A i B” a metodami opisywanymi w poprzedniej wersji skryptu. Gdy niepewności przypadkowe przewyższały niepewności systematyczne i mamy do dyspozycji co najmniej kilka pomiarów stosowaliśmy analizę statystyczną otrzymanych wyników. Taki sposób szacowania niepewności został nazwany Metodą A. Metodę B należy stosować do właściwej oceny niepewności systematycznej lub w przypadku, gdy dysponujemy tylko pojedynczym pomiarem danej wielkości. Pewną nowością jest wymaganie jawnego oszacowania niepewności obydwojema metodami i odpowiedniego ich zsumowania.

14. Literatura:

R. Nowak, „Statystyka dla fizyków. Ćwiczenia”, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002

„Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement”, JCGM 2008

R. Taylor „Wstęp do analizy błęd pomiarowego”, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995

H. Abramowicz, „Jak analizować wyniki pomiarów?”, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1992

G.L. Squires „Praktyczna fizyka”, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1992

N.C. Barford „Experimental measurements: precision, error and truth” John Wiley & Sons, 1985

J. Arendarski „Niepewność pomiarów”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2006