

# Dynamiczne własności algorytmu propagacji przekonań

## 4. Interdyscyplinarne Warsztaty Matematyczne

Grzegorz Siudem

Wydział Fizyki  
Politechnika Warszawska

Będlewo, 26 maja, 2013

# Plan prezentacji

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

- 1 Na czym polega problem?
- 2 Algorytm *Belief propagation*
- 3 Zastosowania algorytmu *Belief propagation*
- 4 Model Isinga
- 5 Wyniki uzyskane wspólnie z prof. Grzegorzem Świątkiem
- 6 Podsumowanie

## Dynamiczne własności algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

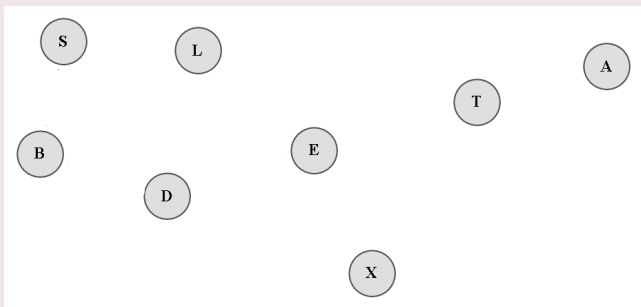
Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie



Rysunek: Zbiór zmiennych losowych.

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

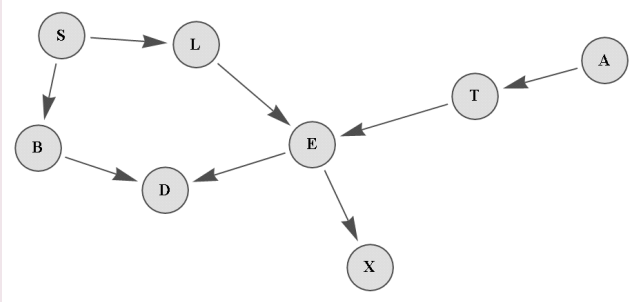
Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie



Rysunek: Zbiór zmiennych losowych z zależnościami.

# Uściślijmy problem

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Szukamy rozkładu brzegowego

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_N) &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_{N-1}} \mathbb{P}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_{N-1}} \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(x_i | \text{Rdz}(x_i)).\end{aligned}$$

# Dlaczego podejście naiwne nie wystarczy?

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Liczba składników w sumie

$$\mathbb{P}(x_N) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_{N-1}} \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(x_i | \text{Rdz}(x_i))$$

rośnie wykładniczo wraz z rozmiarami grafu!

# Sugestie i przekonania

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
**Belief  
propagation**

Zastosowania  
algorytmu  
**Belief  
propagation**

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Przyjmijmy zbiór parametrów rzeczywistych  $\mu_{ij}$  ( $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$ ), gdzie  $i, j$  to węzły grafu, który nazwiemy **sugestiami** (ang. *messages*).

# Sugestie i przekonania

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

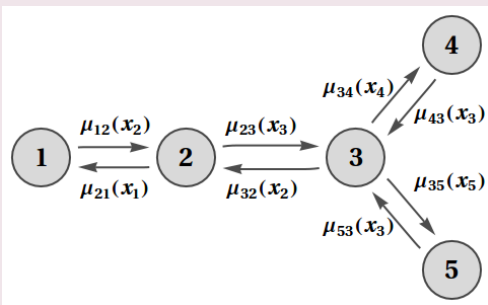
Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Przyjmijmy zbiór parametrów rzeczywistych  $\mu_{ij}$  ( $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$ ), gdzie  $i, j$  to węzły grafu, który nazwiemy **sugestiami** (ang. *messages*).



Rysunek: Schemat działania algorytmu BP.



# Sugestie i przekonania

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
**Belief  
propagation**

Zastosowania  
algorytmu  
**Belief  
propagation**

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Przekonania

**Przekonaniami** nazywać będziemy wyrażenia postaci  $b_i(X_i)$  i  $b_{ij}(X_i, X_j)$ , zależne w *pewien* sposób od sugestii.

# Sugestie i przekonania

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Przekonania

**Przekonaniami** nazywać będziemy wyrażenia postaci  $b_i(X_i)$  i  $b_{ij}(X_i, X_j)$ , zależne w *pewien* sposób od sugestii.

Przekonania nie mają dobrej interpretacji, chyba, że algorytm BP zbiegnie do punktu stałego...

# Reguła uaktualniania sugestii w algorytmie BP

## Dynamiczne własności algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

**Algorytm  
Belief  
propagation**

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

$$\mu_{ij}^1 = F([\mu_{ij}^0]_{i,j=1,\dots,N}) \quad (1)$$

I dalej iterujemy

$$\mu_{ij}^n = F([\mu_{ij}^{n-1}]_{i,j=1,\dots,N}). \quad (2)$$

# Algorytm BP - podsumowanie

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

**Algorytm  
Belief  
propagation**

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Zbieżność na drzewach

Pearl wykazał w 1982, że algorytm BP na drzewach zbiega.

# Algorytm BP - podsumowanie

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątkiem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Zbieżność na drzewach

Pearl wykazał w 1982, że algorytm BP na drzewach zbiega.

## A co poza drzewami?

W ogólności problem pozostaje otwarty.

„jeśli zignorujemy istnienie cykli (...) sugestie mogą krążyć w niezidentyfikowany sposób wokół pętli, nie zbiegając do stanu równowagi [tłum. wł.]“

Judea Pearl cytowany za J. S. Yedidia, W. T. Freeman, Y. Weiss, *Understanding Belief Propagation and Its Generalizations*, Exploring Artificial Intelligence in the New Millennium, **8**, 239-236, (2003).

# Algorytm BP - podsumowanie

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Zbieżność na drzewach

Pearl wykazał w 1982, że algorytm BP na drzewach zbiega.

## A co poza drzewami?

W ogólności problem pozostaje otwarty.

„jeśli zignorujemy istnienie cykli (...) sugestie mogą krążyć w niezidentyfikowany sposób wokół pętli, nie zbiegając do stanu równowagi [tłum. wł.]“

Judea Pearl cytowany za J. S. Yedidia, W. T. Freeman, Y. Weiss, *Understanding Belief Propagation and Its Generalizations*, Exploring Artificial Intelligence in the New Millennium, **8**, 239-236, (2003).

## Po co ta zbieżność?

W punkcie stałym BP przekonania stają się rozkładami brzegowymi.

# Zastosowania algorytmu BP

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

**Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation***

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

- Systemy eksperckie (sieci bayesowskie),
- Model Isinga (losowe pola Markowa),
- Kody wykrywające błędy (grafy Tannera),
- Widzenie maszynowe,
- Poznawanie kodu DNA,
- Optymalizacja ruchu pakietów w sieci.

# Algorytm BP w medycynie

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Rozważmy przykład „Asia” autorstwa Lauritzena i Spiegelhaltera. Dysponujemy systemem eksperckim, który szacuje ryzyko chorób układu oddechowego.

- Wyjazd do Azji (A) zwiększa ryzyko gruźlicy (T).
- Palenie papierosów (S) to czynnik ryzyka zarówno raka płuc (L) jak i zapalenia oskrzeli (B).
- Obecność zarówno gruźlicy jak i raka płuc (E) może być wykryta poprzez prześwietlenie klatki piersiowej (X), ale na podstawie prześwietlenia nie można rozstrzygnąć która to choroba.
- Duszności mogą być spowodowane przez zapalenie oskrzeli (B) lub którąś z dwóch (E): gruźlicę lub raka płuc.



# Algorytm BP w medycynie

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

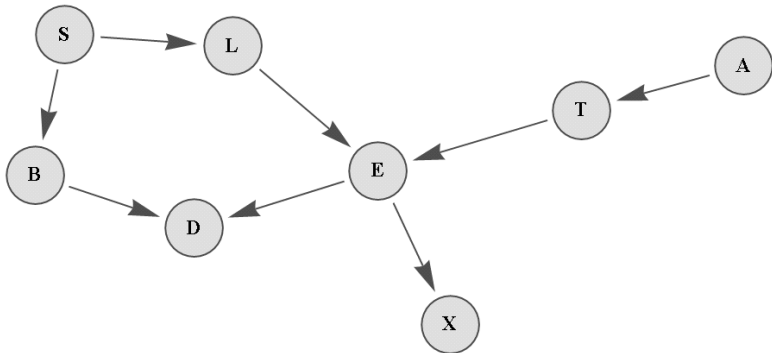
Podsumowanie

Rozważmy przykład „Asia” autorstwa Lauritzena i Spiegelhaltera. Dysponujemy systemem eksperckim, który szacuje ryzyko chorób układu oddechowego.

- Wyjazd do Azji (A) zwiększa ryzyko gruźlicy (T).
- Palenie papierosów (S) to czynnik ryzyka zarówno raka płuc (L) jak i zapalenia oskrzeli (B).
- Obecność zarówno gruźlicy jak i raka płuc (E) może być wykryta poprzez prześwietlenie klatki piersiowej (X), ale na podstawie prześwietlenia nie można rozstrzygnąć która to choroba.
- Duszności mogą być spowodowane przez zapalenie oskrzeli (B) lub którąś z dwóch (E): gruźlicę lub raka płuc.

Algorytm BP może dostarczyć tutaj, bardzo pożądaných rozkładów brzegowych.

## Ilustracja



Rysunek: Graf ilustrujący sieć bayesowską Asia.

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

# Model Isinga

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

**Model Isinga**

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Założenia

Niech  $X$  będzie polem losowym Markowa.  $\Lambda = \{-1, 1\}$ , Ponadto niech  $G(S, N) = \mathbb{Z}_p^2$ .

# Model Isinga

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Świątek

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

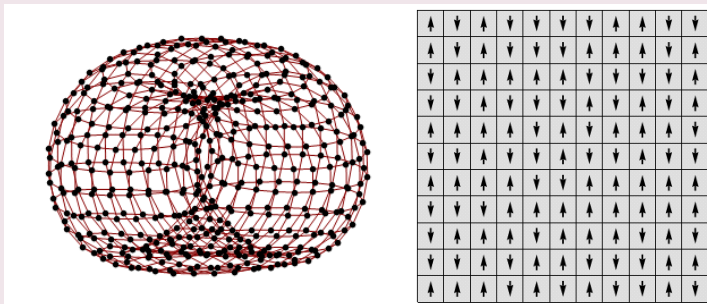
Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Założenia

Niech  $X$  będzie polem losowym Markowa.  $\Lambda = \{-1, 1\}$ , Ponadto niech  $G(S, N) = \mathbb{Z}_p^2$ .

## Ilustracja



# Model Isinga

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

**Model Isinga**

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Hamiltonian

$$U(\sigma) = - \sum_{i \in G} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in G} h_i \sigma_i$$

# Model Isinga

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

**Model Isinga**

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Hamiltonian

$$U(\sigma) = - \sum_{i \in G} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in G} h_i \sigma_i$$

## Rozkład Gibbsa

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{\exp(-\beta U(\sigma))}{Z}, \quad Z = \sum_{\sigma} \exp(-\beta U(\sigma))$$

# Model Isinga

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

## Hamiltonian

$$U(\sigma) = - \sum_{i \in G} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in G} h_i \sigma_i$$

## Rozkład Gibbsa

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{\exp(-\beta U(\sigma))}{Z}, \quad Z = \sum_{\sigma} \exp(-\beta U(\sigma))$$

## Cel

Dla ustalonych pola  $h$ , całki wymiany  $J$  i temperatury  $\beta$  znaleźć magnetyzację w każdym punkcie czyli wartość oczekiwaną według **rozkładu brzegowego**.

# Reguła uaktualniania sugestii w algorytmie BP dla modelu Isinga

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

$$F([\mu_{ij}]_{i,j=1,\dots,N}) = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\cosh \left[ \beta \left( h_j + J_{ij} + \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_j \\ n \neq i}} \mu_{jn} \right) \right]}{\cosh \left[ \beta \left( h_j - J_{ij} + \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_j \\ n \neq i}} \mu_{jn} \right) \right]}$$



# Rezultaty badań numerycznych

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Wielokrotne symulacje numeryczne dla krat z  $p = 3, 4, 5, 6$  pokazują, że możliwe są tylko dwa scenariusze bifurkacji

# Rezultaty badań numerycznych

Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
Belief  
propagation

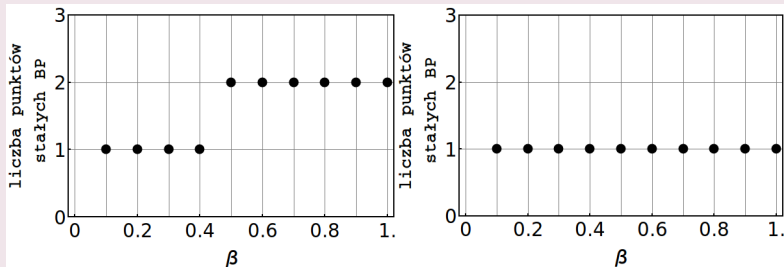
Zastosowania  
algorytmu  
Belief  
propagation

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

Wielokrotne symulacje numeryczne dla krat z  $p = 3, 4, 5, 6$  pokazują, że możliwe są tylko dwa scenariusze bifurkacji



**Rysunek:** Typowe wyniki symulacji - liczba stabilnych punktów stałych algorytmu BP w funkcji  $\beta$ .

## Twierdzenie

*W przypadku ferromagnetycznym ( $J > 0$ ) przy stałej całce wymiany i polu zewnętrznym możliwe są następujące scenariusze zachowania algorytmu BP jeśli rozważamy punkty stałe stałe na niezerowych współrzędnych*

- *dla  $h = 0$  następuje bifurkacja w wyniku której powstają trzy punkty stałe - dwa stabilne, jeden niestabilny,*
- *dla  $h \in (-2J, 2J) \setminus \{0\}$  następuje dokładnie jedna bifurkacja w wyniku której oprócz istniejącego stabilnego punktu stałego powstają dwa nowe, z czego jeden stabilny, a drugi niestabilny,*
- *dla  $|h| \geq 2J$  bifurkacje nie zachodzą i dla każdej wartości  $\beta$  układ posiada dokładnie jeden punkt stały.*

## Twierdzenie

*Po wykonaniu algorytmu BP wszystkie elementy macierzy sugestii są ograniczone, ponadto  $\mu_{ij} \in (-|J_{ij}|, |J_{ij}|)$ .*

## Twierdzenie

*Jeśli macierz sugestii w punkcie stałym algorytmu BP jest symetryczna, a całka wymiany i zewnętrzne pole stałe, wówczas wszystkie niezerowe wyrazy macierzy sugestii są sobie równe.*

Co z dowolnym polem i całką wymiany?

Hipoteza

*Zachodzą inne niż trywialna bifurkacje, skutkujące pojawieniem się egzotycznych punktów stałych.*

Hipoteza

*Zachodzi dokładnie jedna bifurkacja, w której z jednego punktu stałego powstają dwa punkty stałe.*

## Problemy otwarte

- Identyfikacja wszystkich punktów stałych (stabilnych i niestabilnych) BP i ich basenów przyciągania.
- Identyfikacja orbit okresowych.
- Kiedy zachodzą bifurkacje punktów stałych?

# Podsumowanie

## Dynamiczne własności algorytmu BP

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

Podsumowanie

- Przedstawiony został iteracyjny algorytm poszukiwania rozkładów brzegowych dla losowych pól Markowa.
- Algorytm BP może być stosowany w wielu dziedzinach - od fizyki statystycznej, przez inżynierię po medycynę.
- Dla analizy modelu Isinga istotnym pytaniem są bifurkacje punktów stałych w algorytmie BP.
- Ciągle jest wiele problemów otwartych! 😊

**Dynamiczne  
własności  
algorytmu BP**

Grzegorz  
Siudem

Plan  
prezentacji

Na czym  
polega  
problem?

Algorytm  
*Belief  
propagation*

Zastosowania  
algorytmu  
*Belief  
propagation*

Model Isinga

Wyniki  
uzyskane  
wspólnie z  
prof.  
Grzegorzem  
Świątkiem

**Podsumowanie**

Dziękuję za uwagę!