

# Wolfram Mathematica nie tylko dla matematyka

## Laboratoria

GRZEGORZ SIUDEM

semestr zimowy 2023

### 1 Na rozgrzewkę - elementy logiki i teorii mnogości

- Wybierz menu `Palletes` → `Basic Math Assistant`. Sprawdź jaką funkcjonalność oferuje ten przybornik. Jeśli nie wiesz do czego służy dana funkcja - sprawdź w dokumentacji wciskając `F1`.
- Narysuj wykres `Plot[]` funkcji sinus. Dodaj do niego także kosinusoidę.
- Wykorzystując funkcję `Manipulate[]` zmieniaj na poprzednim wykresie częstość i fazę.
- Stwórz własną listę, zdefiniuj zmienną oraz funkcję.
- Przy pomocy funkcji `Graphics[]` i funkcji graficznych stwórz własny rysunek.
- Podstawą oceny będzie odpowiednio sformatowany notatnik `Mathematiki`.

### 2 Policzmy się z analizą matematyczną

Przed zajęciami należy przygotować sobie (najlepiej na kartce) po jednym (nietrywialnym) przykładzie całki, pochodnej, granicy, sumy szeregu i funkcji analitycznej.

- Oblicz symbolicznie pochodną wybranej funkcji, narysuj na wykresie funkcję i jej pochodną.
- Oblicz symbolicznie granicę i sumę szeregu, porównaj je z wynikami numerycznymi dla pierwszych  $n$  wyrazów (na wykresie typu `ListPlot[]`).
- Oblicz całkę symbolicznie oraz numerycznie, porównaj czasy wykonywania.
- Rozwiń funkcję w szereg, narysuj kilka wybranych rozwinięć na jednym wykresie.
- Stwórz przykładowy dokument `LATEX`, wyeksportuj do niego wyniki uzyskane w poprzednich punktach.

### 3 Algebra liniowa czyli w $\mathbb{R}^n$ -ie spełnia się każde marzenie

- Stwórz listę kwadratów pierwszych 10 liczb naturalnych na co najmniej 3 sposoby.
- Przy pomocy funkcji `Table[]` wygeneruj macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

- Jak wyznaczyć jej wektory i wartości własne?
- Narysuj dwie proste zadane w postaci parametrycznej (`Manipulate[]`?).
- Wyznacz ich punkt przecięcia i narysuj w tym miejscu kropkę (`Disk[]`).
- Sprawdź działanie powyższego kodu dla różnych wartości parametrów.
- Zadanie nieobowiązkowe: jak powyższe punkty powtórzą się dla przypadku w  $\mathbb{R}^3$
- Zwizualizuj dla zadanej macierzy  $2 \times 2$  pole wektorowe przez nią zadane.
- Zbierz uzyskane wyniki w formie prezentacji przygotowanej w  $\text{\LaTeX}$ u.

### 4 Sprawdźmy wszystkie powiązania, czyli teoria grafów

- Wykorzystując funkcję `GraphData[]` narysuj ulubiony graf. Korzystając z menu po prawo-kliku zmień jego wygląd, a następnie znajdź w dokumentacji jak uzyskać ten sam efekt pisząc własną komendę.
- Przy pomocy funkcji `EdgeList[]` uzyskaj listę krawędzi poprzednich grafów, narysuj je (funkcyjnie!) przy pomocy funkcji `Graph[]`.
- Wygeneruj listę krawędzi w siatce kwadratowej. Narysuj ten graf.
- Przy pomocy `HighlightGraph[]` podkreśl wybrane elementy jednego z poprzednich grafów.
- Podkreśl i narysuj najkrótszą ścieżkę pomiędzy wybranymi wierzchołkami jednego z poprzednich grafów.
- Sprawozdanie powinno przyjąć formę sformatowanego notatnika *Mathematici*.

## 5 Wszystko się zmienia – równania różniczkowe

### 6 (podwójne zajęcia)

Rozważmy równanie różniczkowe opisujące ruch wahadła matematycznego.

- Zacznij od prostszej, zlinearyzowanej wersji, w tym celu rozwiń prawą stronę równania w szereg potęgowy i utnij go na pierwszym wyrazie. Rozwiąż tak uzyskane równanie przy pomocy funkcji `DSolve[]`.
- Narysuj diagram fazowy oraz szeregi czasowe rozwiązań.
- Rozwiąż równanie wahadła matematycznego przy pomocy funkcji `NDSolve[]`.
- Narysuj diagram fazowy oraz szeregi czasowe rozwiązań, wykonaj animację.
- Zaimplementuj (przy pomocy funkcji `NestList[]`) metodę Eulera i rozwiąż równanie numerycznie. Zaobserwuj zależność rozwiązań na diagramie fazowym i szeregach czasowych od wartości kroku czasu w metodzie Eulera.
- Wykonaj animację dla wyników z metody Eulera.
- Dodaj do analizowanego równania człon dyssypatywny (odpowiedzialny za straty energii). Zaobserwuj wyniki w animacjach i na wykresach dla rozważanych metod.
- Jako sprawozdanie przygotuj prezentację w środowisku Wolfram Mathematica.

## 7 Zróbmy sobie zbiór Mandelbrota – dynamika zespolona

### 8 (podwójne zajęcia)

- Narysuj dyskretne przybliżenie zbioru Mandelbrota dla rodziny kwadratowej na płaszczyźnie zespolonej. Uwaga: zadanie wymaga implementacji operacji na listach.
- Dla wybranego wielomianu narysuj pokolorowany zbiór Julii dla metody Newtona-Raphsona szukania jego miejsce zerowych.
- Wygeneruj jeszcze dwie inne grafiki fraktalne.
- Sprawozdaniem powinien być sformatowany notatnik Mathematici.

## 9 Przetwarzanie danych

- Wczytaj wybrany plik tekstowy (sugeruję wybrać ulubioną lekturę z książek, które przeszły do domeny publicznej np. na wolnelektury.pl). Narysuj histogram częstości występowania słów oraz (dla tych, dla których to możliwe) `WordCloud[]`.

- Wczytaj kilka obrazków – plików graficznych.
- Wybierz ulubione filtry i metody przetwarzania grafiki, a następnie zastosuj je do stworzenia animacji z grafiki z poprzedniego zadania.
- Sprawozdaniem powinien być sformatowany notatnik Mathematiki **w formacie CDF**.

## 10 Prawdopodobnie najciekawsze - rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

- Wygeneruj liczby pseudolosowe o wybranym rozkładzie, stwórz histogram uzyskanych wyników i porównaj go na jednym wykresie z gęstością lub funkcją masy prawdopodobieństwa.
- Przy pomocy funkcji `AbsoluteTiming[]` sprawdź czas wykonywania wybranego fragmentu kodu z wcześniejszych zajęć (np. porównując działanie iteracji `Nest[]` na liczbach wymiernych i zmiennoprzecinkowych). Oblicz estymatory wartości oczekiwanej (średnią) i wariancji oraz medianę.
- Ostatnie zadanie jest ilustracją istotnego ograniczenia metod Monte Carlo. Celem jest wygenerowanie punktów z rozkładu jednostajnego na  $n$ -wymiarowej kuli. Najpierw rozważmy przypadek dwuwymiarowy. Należy wygenerować liczby pseudolosowe z rozkładu jednostajnego na kwadracie jednostkowym, a następnie odrzucać te, które leżą poza kołem jednostkowym. Te nieodrzucone dadzą poszukiwaną próbkę. W przypadku trójwymiarowym - analogicznie. Należy losować liczby z jednostkowego sześcianu, odrzucać te spoza kuli. Wraz ze wzrostem wymiarowości szybko okaże się jak niewydajna jest to metoda (stosunek odrzucanych do akceptowanych punktów drastycznie maleje). Celem zadania jest oszacowanie do jakiego  $n$  warto ją stosować?
- Sprawozdaniem powinien być sformatowany notatnik Mathematiki.