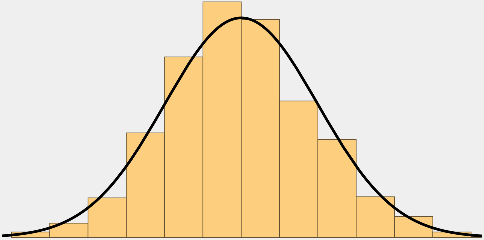
Probabilistyka

Wykład IX: W moim przedziale wszyscy trzej, ojej!

Grzegorz Siudem

Wydział Fizyki

wykład zdalny 2020



W poprzednim odcinku…

Na poprzednim wykładzie opowiadałem o

- kolejnych, pasjonujących własnościach prawdopodobieństwa,
- funkcjach tworzących, charakterystycznych i generujących momenty.
- funkcjach zmiennych losowych.

Rozkłady

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim ?$

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Longrightarrow aX + b \sim ?$

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies e^X \sim$

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies e^X \sim ?$
- $X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim$

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies e^X \sim \ Lognorm(\mu, \sigma^2)$
- $X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim ?$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ niezależne
  $\implies X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim$

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies e^X \sim \ Lognorm(\mu, \sigma^2)$
- $X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ niezależne
  $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ niezależne
  $\implies X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim ?$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ niezależne
  $\implies t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim$

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies e^X \sim \ Lognorm(\mu, \sigma^2)$
- $X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ niezależne $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ niezależne $\implies X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \ \chi_n^2$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ niezależne $\implies t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim ?$
- Więcej? Na ćwiczeniach :)

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ niezależne
  $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Longrightarrow aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Longrightarrow e^X \sim \ Lognorm(\mu, \sigma^2)$
- $X_1, X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ niezależne
  $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ niezależne
  $\Longrightarrow X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \ \chi_n^2$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ niezależne
  $\Longrightarrow t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \ t_{n-1}$
- Więcej? Na ćwiczeniach :)

Estymatory wariancji

Estymacja przedziałowa

Co nam daje etymacja punktowa?

Niewiele – przykład.

Co nam daje etymacja punktowa?

Niewiele – przykład.

Pomysł

Poszukujemy statystyk (funkcji próby) T_L, T_P, dla których

$$\mathbb{P}(T_L \leqslant \theta \leqslant T_P) \geqslant 1 - \alpha$$

Co nam daje etymacja punktowa?

Niewiele – przykład.

Pomysł

Poszukujemy statystyk (funkcji próby) T_L, T_P, dla których

$$\mathbb{P}(T_L \leqslant \theta \leqslant T_P) \geqslant \underbrace{1 - \alpha}_{\text{przedzial ufnosci}}$$

Co nam daje etymacja punktowa?

Niewiele – przykład.

Pomysł

Poszukujemy statystyk (funkcji próby) T_L, T_P, dla których

$$\mathbb{P}(T_L \leqslant \theta \leqslant T_P) \geqslant \underbrace{1-\alpha}_{\text{przedzial ufnosci}}$$

Cel

Poszukujemy najmniejszego takiego przedziału.

A co z pozostałymi rozkładami?

:(

Dla każdego przypadku należy skonstruować przedział!

A co z pozostałymi rozkładami?

:(

Dla każdego przypadku należy skonstruować przedział!

:)

Jeśli próba jest dostatecznie duża – korzystamy z CTG.

A co z pozostałymi rozkładami?

Przykład

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne z tego samego rozkładu o skończonych pierwszych momentach $\mu = \mathbb{E}X$, $\sigma^2 = Var(X)$

Testy statystyczne

Problem weryfikacji hipotez

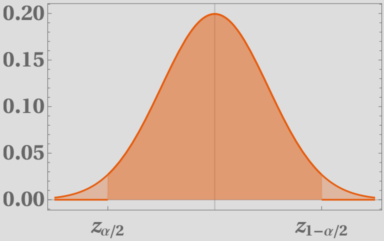
Zmieniamy nieco podejście i chcemy sprawdzić czy

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 0, \\ H_1: & \mu \neq 0. \end{cases}$$

Zmieniamy nieco podejście i chcemy sprawdzić czy

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 0, \\ H_1: & \mu \neq 0. \end{cases}$$

Przy prawdziwości H_0 mamy



Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.

Test statystyczny – intuicja

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.
- Jeżeli $T(x) \in \mathcal{K}_\alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0.

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.
- Jeżeli $T(x) \in \mathcal{K}_\alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0.
- Jeżeli $T(x) \notin \mathcal{K}_\alpha$ to **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy** H_0.

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.
- Jeżeli $T(x) \in \mathcal{K}_\alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0.
- Jeżeli $T(x) \notin \mathcal{K}_\alpha$ to **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy** H_0.

Błędy pierwszego i drugiego rodzaju

Podsumowanie

Dzisiaj rozmawialiśmy o

- najważniejszych relacjach pomiędzy typowymi rozkładami prawdopodobienstwa.
- estymacji przedziałowej.
- tym do czego służą testy statystyczne statystycznych

W następnym odcinku…

Na następnym wykładzie opowiem o

- testowaniu hipotez statystycznych