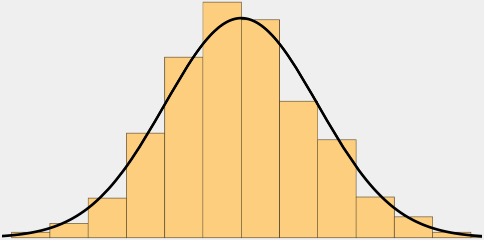
Probabilistyka

Wykład ósmy: Znaj rozkłady, nie ma rady!

Grzegorz Siudem

Wydział Fizyki

wykład zdalny 2020



W poprzednim odcinku...

Na poprzednim wykładzie opowiadałem o

- Rodzajach zbieżności.
- Aksjomatycznej definicji p-stwa.
- Metodach estymacji.

Twierdzenia

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, wówczas zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ (subaddytywność p-stwa),

Własności p-stwa – kontynuacja

Twierdzenia

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$, wówczas zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ (subaddytywność p-stwa),
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$ (WWW),

Twierdzenia

Niech $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, wówczas zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ (subaddytywność p-stwa),
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$ (WWW),
- Jeśli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Własności p-stwa – kontynuacja

Twierdzenia

Niech $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, wówczas zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ (subaddytywność p-stwa),
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$ (WWW),
- Jeśli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- Jeśli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Twierdzenia

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, wówczas zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ (subaddytywność p-stwa),
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$ (WWW),
- Jeśli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- Jeśli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ to $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Przykład – zbieżności raz jeszcze

Funkcje generujące

Funkcja generująca

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \int f(x)s^x dx \ \left(= \sum_k p_k s^k\right)$$

Definicje

Funkcja generująca

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \int f(x) s^x dx \ \left(= \sum_k p_k s^k \right)$$

Funkcja charakterystyczna/generująca momenty

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}E^{itX} = \int f(x) e^{itx} dx \ \left(= \sum_k p_k e^{itk} \right)$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int f(x) e^{tx} dx \ \left(= \sum_k p_k e^{tk} \right)$$

Funkcja generująca

- szereg potęgowy.

Funkcja generująca

- szereg potęgowy.
- nie zawsze istnieje.

Podstawowe własności

Funkcja generująca

- szereg potęgowy.
- nie zawsze istnieje.

Funkcja generująca momenty

- czyż to nie transformata Laplace'a?

Podstawowe własności

Funkcja generująca

- szereg potęgowy.
- nie zawsze istnieje.

Funkcja generująca momenty

- czyż to nie transformata Laplace'a?
- nie zawsze istnieje.

Funkcja generująca

- szereg potęgowy.
- nie zawsze istnieje.

Funkcja generująca momenty

- czyż to nie transformata Laplace'a?
- nie zawsze istnieje.

Funkcja charakterystyczna

- czyż to nie transformata Fouriera?

Podstawowe własności

Funkcja generująca

- szereg potęgowy.
- nie zawsze istnieje.

Funkcja generująca momenty

- czyż to nie transformata Laplace'a?
- nie zawsze istnieje.

Funkcja charakterystyczna

- czyż to nie transformata Fouriera?
- zawsze istnieje.

Relacje pomiędzy funkcjami

$$g_X(e^{it}) = \varphi_X(t),\ \varphi_X(-it) = M_X(t), \text{ etc.}$$

Podstawowe własności – cd.

Relacje pomiędzy funkcjami

$$g_X(e^{it}) = \varphi_X(t),\ \varphi_X(-it) = M_X(t), \text{ etc.}$$

Twierdzenie

Jeśli $X_1, \ldots, X_n$ to niezależne zmienne losowe o funkcjach tworzących $g_1, \ldots, g_n$ to suma $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ma funkcję tworzącą $\prod_{i=1}^{n} g_i$.

Dowód

Relacje pomiędzy funkcjami

$$g_X(e^{it}) = \varphi_X(t),\ \varphi_X(-it) = M_X(t), \text{ etc.}$$

Twierdzenie

Jeśli $X_1, \ldots, X_n$ to niezależne zmienne losowe o funkcjach tworzących $g_1, \ldots, g_n$ to suma $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ma funkcję tworzącą $\prod_{i=1}^{n} g_i$.

Dowód

Analogiczne twierdzenia zachodzą dla pozostałych funkcji.

Funkcje zmiennej losowej

Twierdzenie (dla rozkładów ciągłych)

Jeśli zmienna losowa X ma ciągły rozkład o gęstości f (z nośnikiem (a, b)), a $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz $\varphi'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$ wówczas zmienna losowowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}_{z=y} \right| \cdot I_{\varphi((a,b))}(y)$$

Przekształcenie zmiennej losowej przez funkcję

Twierdzenie (dla rozkładów ciągłych)

Jeśli zmienna losowa X ma ciągły rozkład o gęstości f (z nośnikiem (a, b)), a $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz $\varphi'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$ wówczas zmienna losowowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}_{z=y} \right| \cdot I_{\varphi((a,b))}(y)$$

Inny pomysł - operujmy na dystrybuancie.

Twierdzenie (dla rozkładów ciągłych)

Jeśli zmienna losowa X ma ciągły rozkład o gęstości f (z nośnikiem (a,b)), a $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz $\varphi'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$ wówczas zmienna losowowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}_{z=y} \right| \cdot I_{\varphi((a,b))}(y)$$

Inny pomysł - operujmy na dystrybuancie.

Przykłady.

Rozkłady

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ iid $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim$?

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ iid $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(2\mu, 2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Longrightarrow aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma)$

Quiz: jaki rozkład mają?

- $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ iid $\implies X_1 + X_2 \sim \ \mathcal{N}(2\mu, 2\sigma)$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies aX + b \sim \ \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma)$
- $\dots$

Więcej na ćwiczeniach!

Podsumowanie

Dzisiaj rozmawialiśmy o

- kolejnych, pasjonujących własnościach prawdopodobieństwa,
- funkcjach tworzących, charakterystycznych i generujących momenty.
- funkcjach zmiennych losowych.
- najważniejszych relacjach pomiędzy typowymi rozkładami prawdopodobienstwa.

W NASTĘPNYM ODCINKU…

Na następnym wykładzie opowiem o

- typowych rozkładach – kontynuacja,
- estymacji przedziałowej,
- tym do czego służą testy statystyczne.