

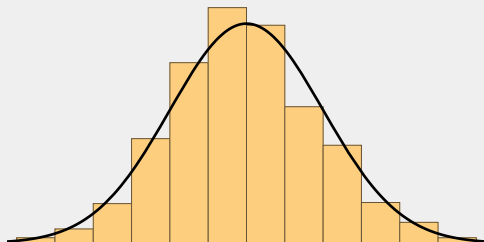
PROBABILISTYKA

WYKŁAD SIÓDMY: TEORETYCZNIE TAK.

GRZEGORZ SIUDEM

WYDZIAŁ FIZYKI

WYKŁAD ZDALNY 2020



W POPRZEDNIM ODCINKU...

- zastosowaniach praw wielkich liczb.
- Centralnym Twierdzeniu Granicznym.
- estymatorach i ich najważniejszych cechach.

RODZAJE ZBIEŻNOŚCI

SPWL Markowa

Przy założeniach SPWL średnia zbiega **według p-stwa**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

SPWL Markowa

Przy założeniach SPWL średnia zbiega **według p-stwa**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

MPWL Kołmogorowa

Przy założeniach MPWL średnia zbiega **z p-stwem 1**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}X_1.$$

SPWL Markowa

Przy założeniach SPWL średnia zbiega **według p-stwa**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

MPWL Kołmogorowa

Przy założeniach MPWL średnia zbiega **z p-stwem 1**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}X_1.$$

Na czym polega różnica?

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny według p-stwa do zmiennej losowej X gdy dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \right) \equiv \left(X_n \xrightarrow{P} X \right).$$

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny według p-stwa do zmiennej losowej X gdy dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \right) \equiv \left(X_n \xrightarrow{P} X \right).$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem 1 (p.n.)

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny prawie na pewno (z p-stwem 1) do zmiennej losowej X gdy

$$\left(\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1 \right) \equiv \left(X_n \xrightarrow{p.n.} X \right).$$

AKSJOMATY TEORII P-STWA

Zdarzenia

- Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy przez Ω .

Zdarzenia

- Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy przez Ω .
- Jeśli wynikiem doświadczenia jest $\omega \in \Omega$ oraz $\omega \in A$ to mówimy, że zaszło zdarzenie A ...

Zdarzenia

- Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy przez Ω .
- Jeśli wynikiem doświadczenia jest $\omega \in \Omega$ oraz $\omega \in A$ to mówimy, że zaszło zdarzenie A ...
- oraz, że nie zaszło zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$.

Zdarzenia

- Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy przez Ω .
- Jeśli wynikiem doświadczenia jest $\omega \in \Omega$ oraz $\omega \in A$ to mówimy, że zaszło zdarzenie A ...
- oraz, że nie zaszło zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$.

Czego oczekujemy po zbiorze wszystkich zdarzeń $\mathcal{F}$?

Zdarzenia

- Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy przez Ω .
- Jeśli wynikiem doświadczenia jest $\omega \in \Omega$ oraz $\omega \in A$ to mówimy, że zaszło zdarzenie A ...
- oraz, że nie zaszło zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$.

Czego oczekujemy po zbiorze wszystkich zdarzeń $\mathcal{F}$?

Definicja σ -ciała $\mathcal{F}$

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- Jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $A' \in \mathcal{F}$,
- Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \dots$ to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicja

Prawdopodobieństwo to funkcja $\mathbb{P}$ o wartościach w $\mathbb{R}$, określona na σ -ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, która spełnia następujące warunki

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, \dots$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ to

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Definicja

Prawdopodobieństwo to funkcja $\mathbb{P}$ o wartościach w $\mathbb{R}$, określona na σ -ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, która spełnia następujące warunki

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, \dots$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ to

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Czy Państwo się z nią zgadzacie?

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω to zbiór zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ σ -ciało, a $\mathbb{P}$ p-stwo na $\mathcal{F}$.

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω to zbiór zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ σ -ciało, a $\mathbb{P}$ p-stwo na $\mathcal{F}$.

Twierdzenie

Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (skończona addytywność),

Twierdzenie

Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (skończona addytywność),
- $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$,

Twierdzenie

Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (skończona addytywność),
- $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- Jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$,

Twierdzenie

Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (skończona addytywność),
- $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- Jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$,
- Jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotoniczność),

Twierdzenie

Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ zachodzą poniższe fakty

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (skończona addytywność),
- $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- Jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$,
- Jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotoniczność),
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

METODY ESTYMACJI

NAJWAŻNIEJSZE METODY TWORZENIA ESTYMATORÓW

- Metoda momentów
- Metoda największej wiarygodności

Metoda momentów

1. Wyrażamy interesujący nas parametr przez momenty rozkładu.
2. Zastępujemy momenty momentami empirycznymi.

Przykłady

- Wyznacz estymator parametru λ w rozkładzie Poissona.

Przykłady

- Wyznacz estymator parametru λ w rozkładzie Poissona.
- Wyznacz estymatory parametrów rozkładu Gamma

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x).$$

Metoda największej wiarogodności

1. Obliczamy funkcję wiarogodności

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \\ f(x_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) f(x_2; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \dots f(x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \\ p(x_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) p(x_2; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \dots p(x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

- szukamy parametrów θ_i , dla których L (lub, równoważnie, $\ln L$) osiąga maksimum.

Przykłady

- Wyznacz estymator parametru λ w rozkładzie Poissona.

Przykłady

- Wyznacz estymator parametru λ w rozkładzie Poissona.
- Wyznacz parametr p rozkładu dwupunktowego.

PODSUMOWANIE

- Rodzajach zbieżności.
- Aksjomatycznej definicji p -stwa.
- Metodach estymacji.

Zadanie 7. [10p]

Udowodnij, że metoda odwrotnej dystrybucyjności umożliwia generowanie liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie. Zaimplementuj ją aby uzyskać próbki z trzech różnych typów rozkładów. Porównaj histogramy uzyskanych wyników ze spodziewanym rezultatem.

W NASTĘPNYM ODCINKU...

NA NASTĘPNYM WYKŁADZIE OPOWIEM O

- Najważniejsze relacje pomiędzy typowymi rozkładami prawdopodobieństwa.
- Funkcjach zmiennych losowych

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!