

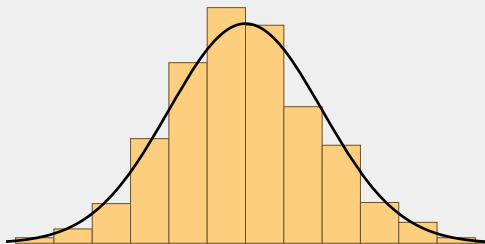
PROBABILISTYKA

WYKŁAD CZWARTY: POD JEDNYM WARUNKIEM

GRZEGORZ SIUDEM

WYDZIAŁ FIZYKI

WYKŁAD ZDALNY 2020



PO LEKTURZE PRAC DOMOWYCH

Przypominam o konieczności

- **Odpowiedniego tytułowania maili.**

Przypominam o konieczności

- **Odpowiedniego tytułowania maili.**
- **Oddawanego nazywania plików.**

Przypominam o konieczności

- **Odpowiedniego tytułowania maili.**
- **Oddawanie nazwy plików.**
- **Podawaniu źródeł.**

Przypominam o konieczności

- **Odpowiedniego tytułowania maili.**
- **Oddawanie nazywania plików.**
- Podawaniu źródeł.

Warto pisać też więcej komentarzy!

Uwagi LaTeXowe

- Wzory piszemy kursywą, ale funkcje regularnym fontem.

Przypominam o konieczności

- **Odpowiedniego tytułowania maili.**
- **Oddawanie nazywania plików.**
- Podawaniu źródeł.

Warto pisać też więcej komentarzy!

Uwagi LaTeXowe

- Wzory piszemy kursywą, ale funkcje regularnym fontem.
- Środowiska wpisywania wzorów.

Przypominam o konieczności

- **Odpowiedniego tytułowania maili.**
- **Oddawanie nazwy plików.**
- Podawaniu źródeł.

Warto pisać też więcej komentarzy!

Uwagi LaTeXowe

- Wzory piszemy kursywą, ale funkcje regularnym fontem.
- Środowiska wpisywania wzorów.
- Wektorowe rysunki.

Zalecam aby unikali Państwo

- łączenia punktów linią ciągłą.

Zalecam aby unikali Państwo

- łączenia punktów linią ciągłą.
- podawania wikipedii jako źródła.

Zalecam aby unikali Państwo

- łączenia punktów linią ciągłą.
- podawania wikipedii jako źródła.
- zostawiania ujemnego prawdopodobieństwa bez komentarza.

Zalecam aby unikali Państwo

- łączenia punktów linią ciągłą.
- podawania wikipedii jako źródła.
- zostawiania ujemnego prawdopodobieństwa bez komentarza.
- Dowodzenia, że inteligencja ma rozkład normalny, bo IQ ma rozkład normalny.

JAK UŻYWAĆ TABLICY DYSTRYBUANT?

- Definicjach i podstawowych własnościach momentów zmiennej losowej.

- Definicjach i podstawowych własnościach momentów zmiennej losowej.
- tym czym są estymatory i dlaczego ich potrzebujemy?

- Definicjach i podstawowych własnościach momentów zmiennej losowej.
- tym czym są estymatory i dlaczego ich potrzebujemy?
- prezentowaniu danych – wykresy skrzynkowe i histogramy.

- Definicjach i podstawowych własnościach momentów zmiennej losowej.
- tym czym są estymatory i dlaczego ich potrzebujemy?
- prezentowaniu danych – wykresy skrzynkowe i histogramy.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

Definicja

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Definicja

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Rysunek

Przykład

Losujemy jedną rodzinę spośród rodzin z dwójką dzieci. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że będzie to dwóch synów, jeśli

- starsze dziecko jest chłopcem.
- jest co najmniej jeden chłopiec.

WZÓR ŁAŃCUCHOWY

Definicja

Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n spełniają warunek

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0,$$

wówczas zachodzi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Definicja

Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n spełniają warunek

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0,$$

wówczas zachodzi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Szkic dowodu

Definicja

Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n spełniają warunek

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0,$$

wówczas zachodzi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Z listy pytań zawierającej 10 pytań łatwych i 20 trudnych trójka studentów losuje bez zwracania pytanie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trafią 3 łatwe pytania?

PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE

Definicja – rozbicie

Rozbiciem przestrzeni zdarzeń Ω nazywamy rodzinę zdarzeń $\{H_i\}_{i \in I}$ które parami się wykluczają, a ich suma wynosi Ω .

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Niech $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ będzie rozbiem Ω na zdarzenia o niezerowym prawdopodobieństwie. Wówczas dla dowolnego A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

WZÓR BAYESA

Twierdzenie

Niech $\{H_i\}_{i \in I}$ będzie (przeliczalnym) rozbiem Ω na zdarzenia o niezerowym prawdopodobieństwie oraz $\mathbb{P}(A) > 0$ wówczas dla dowolnego $j \in I$

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Twierdzenie

Niech $\{H_i\}_{i \in I}$ będzie (przeliczalnym) rozbiem Ω na zdarzenia o niezerowym prawdopodobieństwie oraz $\mathbb{P}(A) > 0$ wówczas dla dowolnego $j \in I$

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Dowód.

Twierdzenie

Niech $\{H_i\}_{i \in I}$ będzie (przeliczalnym) rozbiem Ω na zdarzenia o niezerowym prawdopodobieństwie oraz $\mathbb{P}(A) > 0$ wówczas dla dowolnego $j \in I$

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Dowód.

Wnioskowanie Bayesowskie

- $\mathbb{P}(H_i)$ prawdopodobieństwo *a priori*.
- $\mathbb{P}(H_j|A)$ prawdopodobieństwo *a posteriori*.

TESTY DIAGNOSTYCZNE - WSTĘP

Definicje

- Czułość testu to odsetek chorych u których test daje wynik dodatni.
- Swoistość testu to odsetek zdrowych u których test daje wynik ujemny.

PODSUMOWANIE

- Prawdopodobieństwie warunkowym.
- wzorze Bayesa i prawdopodobieństwie całkowitym.
- wnioskowaniu Bayesowskim.

PRACA DOMOWA

Zadanie 4. [10p]

Test na rzadką chorobę¹ daje fałszywie pozytywną odpowiedź u $p\%$ zdrowych, a u chorych zawsze daje poprawną, pozytywną, odpowiedź². Jaka jest szansa³ S , że osoba z pozytywnym wynikiem jest zdrowa? Narysuj wykres $S(p)$ przy założeniu $N = 10^3$. Odczytaj wartości dla $p = 1, 5, 10\%$.

¹To znaczy, że chora jest średnio jedna osoba na N i N jest duże (np. ok. 10^3).

²To znaczy, że test ma czułość 100% i swoistość $(100 - p)\%$.

³Przy wnioskowaniu tylko z wyniku testu

W NASTĘPNYM ODCINKU...

NA NASTĘPNYM WYKŁADZIE OPOWIEM O

- testy diagnostyczne – kontynuacja.
- Centralnym Twierdzeniu Granicznym
- Prawach Wielkich Liczb