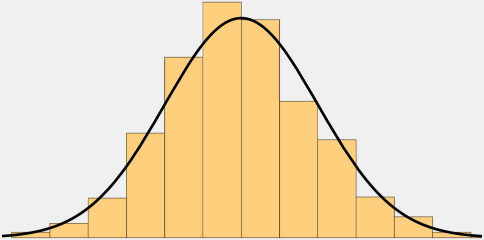
Probabilistyka

Wykład X: Postawmy sobie hipotezę.

Grzegorz Siudem

Wydział Fizyki

wykład zdalny 2020



W poprzednim odcinku…

Na poprzednim wykładzie opowiadaliśmy o

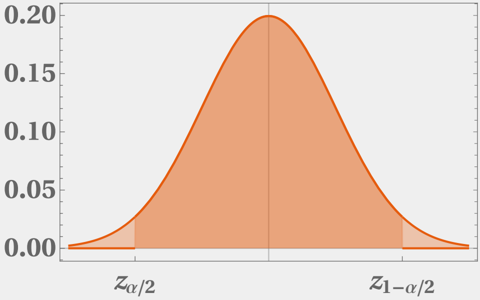
- najważniejszych relacjach pomiędzy typowymi rozkładami prawdopodobienstwa.
- estymacji przedziałowej.
- tym do czego służą testy statystyczne statystycznych

Estymacja przedziałowa – przypomnienie

Idea

Poszukujemy statystyk (funkcji próby) T_L, T_P, dla których

$$\mathbb{P}(T_L \leqslant \theta \leqslant T_P) \geqslant \underbrace{1-\alpha}_{\text{przedzial ufnosci}}$$



Testy statystyczne

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.
- Jeżeli $T(x) \in \mathcal{K}_\alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0.

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.
- Jeżeli $T(x) \in \mathcal{K}_\alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0.
- Jeżeli $T(x) \notin \mathcal{K}_\alpha$ **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy** H_0.

Test statystyczny – intuicja

Jak testować - poradnik praktyczny

- Mając probę x stawiamy hipotezy H_0 i H_1 (ich kolejność ma znaczenie!).
- Do hipotez dobieramy statystykę T.
- Przy założeniu prawdziwości H_0 wyznaczamy rozkład statystyki T. Znajdujemy obszar krytyczny $\mathcal{K}_\alpha$.
- Jeżeli $T(x) \in \mathcal{K}_\alpha$ to odrzucamy hipotezę H_0.
- Jeżeli $T(x) \notin \mathcal{K}_\alpha$ **nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy** H_0.

Testowanie hipotezy może byc widziane jako sprawdzanie czy uzyskany pomiar należy do wyestymowanego przy prawdziwości hipotezy H_0 przedziału.

"Typowy" test statystyczny

Niech próbą będzie $\mathbb{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Rozważmy statystykę T z obszarem krytycznym $\mathcal{K}_\alpha$ przy założeniu hipotezy. Testem statystycznym nazywamy funkcję

$$\phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1, & gdy\ T(\mathbb{X}) \in \mathcal{K}_\alpha \\ 0, & gdy\ T(\mathbb{X}) \notin \mathcal{K}_\alpha \end{cases}$$

Asymetria

0 Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

1 Odrzucamy H_0.

Tabelka

Tabelka

Przykłady

$$\begin{cases} H_0: & \text{niewinny} \\ H_1: & \text{winny} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: & \text{chory} \\ H_1: & \text{zdrowy} \end{cases}$$

Błędy pierwszego i drugiego rodzaju

Tabelka

Przykłady

$$\begin{cases} H_0: & \text{niewinny} \\ H_1: & \text{winny} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: & \text{chory} \\ H_1: & \text{zdrowy} \end{cases}$$

Brak tu symetrii!

Chcemy przede wszystkim minimalizować α.

Poziom istotności testu

- Górne ograniczenie prawdopdobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju, oznaczamy α.

Poziom istotności testu

- Górne ograniczenie prawdopdobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju, oznaczamy α.
- Testy są konstruowane tak, żeby miec zadany poziom istotności.

Poziom istotności testu

- Górne ograniczenie prawdopdobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju, oznaczamy α.
- Testy są konstruowane tak, żeby miec zadany poziom istotności.
- A co z błędem drugiego rodzaju?

Poziom istotności testu

- Górne ograniczenie prawdopdobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju, oznaczamy α.
- Testy są konstruowane tak, żeby miec zadany poziom istotności.
- A co z błędem drugiego rodzaju?
- Testy mogą być lepsze lub gorsze (mimo tego samego α mogą mieć różne β).

Moc testu

Definicja

Mocą testu nazywamy prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy H_0

$$M_\phi = 1 - \beta.$$

Moc testu

Definicja

Mocą testu nazywamy prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy H_0

$$M_\phi = 1 - \beta.$$

Poszukujemy zatem testu, który

$$\begin{cases} \alpha_\phi \leqslant \alpha \\ M_\phi \to \max \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_\phi \leqslant \alpha \\ \beta_\phi \to \min \end{cases}$$

Moc testu

Definicja

Mocą testu nazywamy prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy H_0

$$M_\phi = 1 - \beta.$$

Poszukujemy zatem testu, który

$$\begin{cases} \alpha_\phi \leqslant \alpha \\ M_\phi \to \max \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_\phi \leqslant \alpha \\ \beta_\phi \to \min \end{cases}$$

Funkcja mocy testu

$M_\phi(\theta)$, bo zależy od parametru θ.

W praktyce z przyjętą wartością α porównujemy

$$\mathrm{p-value} = \sup_{\theta \in \Theta_{H_0}} \mathbb{P}_\theta[T(X) \geqslant T(\mathbb{X})]$$

W praktyce z przyjętą wartością α porównujemy

$$\mathrm{p-value} = \sup_{\theta \in \Theta_{H_0}} \mathbb{P}_\theta[T(X) \geqslant T(\mathbb{X})]$$

A po ludzku

p-value to prawdopodobieństwo, ze statystyka testowa będzie „gorsza“ od tej dla naszej próby.

Potestujmy!

Podsumowanie

Dzisiaj rozmawialiśmy o

- testach statystycznych.
- błędach pierwszego i drugiego rodzaju.
- poziomie istotności, mocy testów i *p*-value.

W następnym odcinku…

Na następnym wykładzie opowiem o

- różnych rodzajach i zastosowaniach testów statystycznych.