Materiały pomocnicze - probabilistyka [1]

Grzegorz Siudem

10 maja 2019

[1] Złożono w klasie `tufte-handout`, `www.ctan.org/pkg/tufte-latex`

Zadania domowe i inne materiały uzupełniające treść wykładów i ćwiczeń z probabilistyki. Zadania pochodzą z wielu źródeł, jedynie do użytku wewnętrznego. Plik na bieżąco aktualizowany. Zgłoszenie każdego błędu będzie bardzo mile widziane.

Spis treści

Notacje i oznaczenia

σ-ciało $\mathcal{F}$

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- Jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $A' \in \mathcal{F}$,
- Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \ldots$ to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa Prawdopodobienstwo to funkcja $\mathbb{P}$ o wartościach w $\mathbb{R}$, określona na σ-ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, która spełnia następujące warunki

- $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, \ldots$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ to

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Przestrzeń probabilistyczna Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω to zbiór zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ σ-ciało, a $\mathbb{P}$ p-stwo na $\mathcal{F}$.

Zbieżność według prawdopodobienstwa Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny według p-stwa do zmiennej losowej X gdy dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0\right) \equiv \left(X_n \xrightarrow{P} X\right).$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem 1 (p.n.) Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny prawie na pewno (z p-stwem 1) do zmiennej losowej X gdy

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \equiv \left(X_n \xrightarrow{p.n.} X\right).$$

Indykatorem zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy funkcję[2]

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

O dwóch zdarzeniach A i B powiemy, że są **niezależne**[3] gdy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Funkcją masy prawdopodobieństwa[4] zmiennej[5] X nazwiemy

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k).$$

[2] W skrócie indykator odpowiada na pytanie czy dany x należy do zbioru A.

[3] Oczywiście zawsze dotyczy to pewnego szczególnego rozkładu prawdopodobieństwa, nie jest samodzielną cechą zdarzeń A i B.

[4] Wielkość ta ma sens jedynie dla rozkładów dyskretnych.

[5] Tam gdzie nie prowadzi to do nieporozumień pomijamy indeks X.

Gęstością prawdopodobieństwa nazwiemy funkcję $f_X = f$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$

Dystrybuantą zmiennej losowej[6] X nazywamy funkcję

$$F(x) = F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x). \tag{1}$$

Wartość oczekiwaną[7] funkcji $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla zmiennej X zapiszemy[8]

$$\mathbb{E}[G(X)] = \int_{\mathbb{R}} G(x)f(x)dx,$$
$$\mathbb{E}[G(X)] = \sum_k G(x_k)p_k.$$

[7] O ile istnieje.

[8] W wariancie ciągłym i dyskretnym.

Kwantylem rzędu $p \in (0, 1)$ zmiennej losowej nazywamy

$$Q(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : p \leq F(x)\}. \tag{2}$$

Rozkłady dyskretne

- Rozkład dwupunktowy[9]

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \ \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

- Rozkład jednostajny (dyskretny)[10]

$$p_k = \frac{1}{N},$$

- Rozkład geometryczny[11]

$$p_k = (1 - q)^k q.$$

- Rozkład Zipfa[12]

$$p_k = \frac{1}{H_{N,s} k^s}$$

- Rozkład Poissona[13]

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

- Rozkład Bernoulliego[14]

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k},$$

- Rozkład zeta[15]

$$p_k = \frac{1}{\zeta(s) k^s}$$

[9] gdzie $p \in [0, 1]$.

[10] gdzie $N \in \mathbb{N}$, a $k = 1, 2, \ldots, N$.

[11] gdzie $q \in (0, 1]$, a $k \in \mathbb{N}$.

[12] gdzie $s \in \mathbb{R}_+$, a $k = 1, 2, \ldots, N$, a stała normowania dana jest przez uogólnione liczby harmoniczne $H_{N,s} = \sum_{k=1}^{N} k^{-s}$.

[13] gdzie $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$.

[14] gdzie $p \in (0, 1)$, $N \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

[15] gdzie $s \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}_+$, a ζ to funkcja zeta Riemanna.

Rozkłady ciągłe

- Rozkład jednostajny (ciągły)[16]

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x),$$

- Rozkład normalny (Gaussa)[17]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Rozkład log-normalny [18]

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- Rozkład wykładniczy[19]

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x),$$

- Rozkład Pareto[20]

$$f(x) = \frac{\alpha x_{\mathrm{m}}^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} I_{[x_m,\infty)}(x).$$

- Rozkład Cauchy'ego[21]

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]},$$

- Rozkład gamma[22]

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x),$$

- Rozkład χ[23]

$$f(x) = \frac{1}{2^{(k/2)-1}\Gamma(k/2)} x^{k-1} e^{-x^2/2} I_{[0,\infty)}(x),$$

[18] gdzie $\mu \in \mathbb{R}$, a $\sigma \in \mathbb{R}_+$.

[19] gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.

[20] gdzie $\alpha, x_m \in \mathbb{R}_+$.

[21] gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

[22] gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, a Γ to funkcja gamma Eulera.

[23] gdzie $k \in \mathbb{R}_+$, a Γ to funkcja gamma Eulera.

Dystrybuanta

Najważniejsze własności dystrybuanty:

- jest funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą.
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Wzór (1) dla przypadku ciągłego przyjmuje postać[24]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \tag{3}$$

natomiast dla przypadku dyskretnego

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} \mathbb{P}(X = x_i). \tag{4}$$

[24] Dla przejrzystości pomijamy indeksy opisujące zmienną losową i przyjmujemy, że f to funkcja gęstości prawdopodobieństwa.

Momenty

Dla zmiennej o rozkładzie dyskretnym, mówimy, że posiada n-ty moment gdy $\sum_k |x_k|^n p_k < \infty$ i oznaczamy go przez

$$\mathbb{E}X^n = \sum_k x_k^n p_k.$$

Dla zmiennej o rozkładzie ciągłym, mówimy, że posiada n-ty moment gdy $\int |x|^n f(x)dx < \infty$ i oznaczamy go przez

$$\mathbb{E}X^n = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx.$$

Twierdzenia graniczne

Twierdzenie 1 *Poissona*[25]

Jeśli $n \to \infty$, $p_n \to 0$ oraz $np_n \to \lambda > 0$ to

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

[25] Por. rozdział 7.4 w [1].

Twierdzenie 2 [26]

Niech zmienna losowa S_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami n i p oraz $\lambda = np$. Wówczas dla każdego $B \subseteq \mathbb{N}$ mamy

$$\left| \mathbb{P}(S_m \in B) - \sum_{k\in B} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

[26] Por. rozdział 7.4 w [1].

Twierdzenie 3 *SPWL Bernoulliego*[27]

Jeżeli S_n jest liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego z n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p to dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leqslant \varepsilon \right) = 1$$

[27] Por. rozdział 7.2 w [1].

Twierdzenie 4 *SPWL Markowa*[28]

Niech $(X_n)_n$ będzie ciągiem zmiennych losowych takim, że

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{D}^2 S_n}{n^2} = 0$
  LUB
- *X_n są parami nieskorelowane i mają wspólnie ograniczone wariancje.*

wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

[28] Por. rozdział 7.2 w [1].

Twierdzenie 5 *MPWL Bernoulliego*[29]

Niech S_n oznacza tym razem liczbe sukcesów w n próbach Bernoulliego z p-stwem sukceu p. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant n} \left| \frac{S_k}{k} - p \right| \leqslant \varepsilon \right) = 1.$$

[29] Por. rozdział 7.2 w [1].

Twierdzenie 6 *MPWL Kołmogorowa*[30]

Jeżeli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie* $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}X_1$.

[30] Por. rozdział 7.2 w [1].

Centralne Twierdzenie Graniczne

Twierdzenie 7 *CTG*[31]

Niech (X_n) *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz niech* $\mathbb{E}X_1 = \mu$ *i* $\mathcal{D}^2 X_1 = \sigma^2 > 0$ *Wówczas dla dowolnego t*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(t).$$

[31] Por. rozdział 7.5 w [1].

W1: Po co to wszystko?

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Zadania domowe, spisane czytelnie i podpisane, oddajemy na **jednej kartce formatu A4**.
- Przypadkowy charakter zjawisk lub procesów może wymagać opisu statystycznego lub probabilistycznego, które, choć powiązane, nie są tożsame.
- W rozkładach dyskretnych prawdopodobieństwo zdarzenia jest proporcjonalne do liczby sprzyjających mu zdarzeń.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Dlaczego oczekujemy, ze prawdopodobieństwo ma sumować się do jedynki?

$\heartsuit_2$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest przestrzeń probablistyczna.

$\heartsuit_3$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest przestrzeń statystyczna.

$\heartsuit_4$ Podaj[32] przykład rzeczywistego zjawiska lub procesu, które naturalnie opisuje się przy pomocy przestrzeni probablistycznej. Uzasadnij, że opis przy użyciu przestrzeni statystycznej będzie niewłaściwy.

[32] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

$\heartsuit_5$ Podaj przykład[33] rzeczywistego zjawiska lub procesu, które naturalnie opisuje się przy pomocy przestrzeni statystycznej. Uzasadnij, że opis przy użyciu przestrzeni probablistycznej będzie niewłaściwy.

[33] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

$\heartsuit_6$ Czy można zdefiniować rozkład prawdopodobieństwa o ograniczonym nośniku, w którym $p(n+1) \geqslant p(n)$ dla każdego n większego niż pewne, ustalone, N_0? Dlaczego?

$\heartsuit_7$ Czy można zdefiniować rozkład prawdopodobieństwa o nieograniczonym nośniku, w którym $p(n+1) \geqslant p(n)$ dla każdego n większego niż pewne, ustalone, N_0? Dlaczego?

$\heartsuit_8$ Czy można zdefiniować rozkład prawdopodobieństwa, w którym $p(n) = C/n^2$, gdzie C to normująca stała? Jeśli tak, to oblicz jej wartość.

$\heartsuit_9$ Czy można zdefiniować rozkład prawdopodobieństwa, w którym $p(n) = C/n$, gdzie C to normująca stała? Jeśli tak, to oblicz jej wartość.

$\heartsuit_{10}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest dyskretny rozkład prawdopodobieństwa. Podaj 3 przykłady rzeczywistych zjawisk lub procesów, które można opisać tego typu rozkładem.

$\heartsuit_{11}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest ciągły rozkład prawdopodobieństwa. Podaj 3 przykłady rzeczywistych zjawisk lub procesów[34], które można opisać tego typu rozkładem.

$\heartsuit_{12}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest skokowy rozkład prawdopodobieństwa. Podaj 3 przykłady rzeczywistych zjawisk lub procesów[35], które można opisać tego typu rozkładem.

$\heartsuit_{13}$ Udowodnij, że prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n rzutach niesymetryczną monetą o prawdopodobieństwie sukcesu p opisane jest rozkładem Bernoulliego[36] o parametrach (n, k, p).

$\heartsuit_{14}$ Wykaż, że dla dostatecznie małych $p \ll 1$ rozkład Bernoulliego[37] o parametrach (n, k, p) można przybliżać rozkładem Poissona. Ile wynosi parametr λ?

$\heartsuit_{15}$ Jaki rozkład prawdopodobieństwa ma suma rzutów n symetrycznych monet, gdzie orzeł warty jest 1, a reszka 0?

$\diamondsuit_{1}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[38]) można opisywać rozkładem Poissona? Zilustruj wykresem i skomentuj jak funkcja masy prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

$\diamondsuit_{2}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[39]) można opisywać rozkładem geometrycznym? Zilustruj wykresem i skomentuj jak funkcja masy prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

$\diamondsuit_{3}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykład[40]) można opisywać rozkładem Bernouliego? Zilustruj wykresem i skomentuj jak funkcja masy prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametrów.

$\diamondsuit_{4}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[41]) można opisywać rozkładem ujemnym dwumianowym Zilustruj wykresem i skomentuj jak funkcja masy prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

[34] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[35] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[36] W polskiej literaturze zwyczajowo nazywa się tak rozkład dwumianowy, podczas gdy w anglojęzycznej termin *Benoulli distribution* odnosi się do rozkładu dwupunktowego zero-jeden.

[37] W polskiej literaturze zwyczajowo nazywa się tak rozkład dwumianowy, podczas gdy w anglojęzycznej termin *Benoulli distribution* odnosi się do rozkładu dwupunktowego zero-jeden.

[38] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[39] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[40] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[41] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[42] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

$\diamondsuit_5$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[42]) można opisywać rozkładem Zipfa Zilustruj wykresem i skomentuj jak funkcja masy prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

$\diamondsuit_6$ Wyznacz stałą normowania dla rozkładu geometrycznego.

$\diamondsuit_7$ Wyznacz stałą normowania dla rozkładu Bernouliego.

$\diamondsuit_8$ Wyznacz stałą normowania dla rozkładu ujemnego dwumianowego.

$\diamondsuit_9$ Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa uzyskania wyniku n będącego sumą rezultatów rzutów trzech kostek $k6$.

$\diamondsuit_{10}$ Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa uzyskania wyniku n będącego iloczynem rezultatów rzutów dwóch kostek $k6$.

$\diamondsuit_{11}$ Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa uzyskania wyniku n będącego ilorazem rezultatów rzutów dwóch kostek $k6$.

$\diamondsuit_{12}$ Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa uzyskania wyniku n będącego sumą rezultatów rzutów kostek $k4$ i $k12$.

$\diamondsuit_{13}$ Jakie jest prawdopodobieństwo, że w 100 rzutach symetryczną monetą pojawi się nieprzerwana seria minimum k orłów. Narysuj wykres p(k) dla $k = 0, 1, \ldots, ...100$.

$\diamondsuit_{14}$ Jakie jest prawdopodobieństwo, że podczas gry w chińczyka w 4 osoby co najmniej jednej z nich każdy z n rzutów zakończy się uzyskaniem ⚅? Narysuj wykres p(n) dla $n = 1, \ldots, 20$.

$\diamondsuit_{15}$ Ile razy trzeba rzucić kostką $k4$, żeby, z prawdopodobieństwem $p = 0.99$ wylosować chociaż raz każdą ze ścian kostki.

$\clubsuit_1$ Oblicz o ile bardziej prawdopodobne jest uzyskanie w rozdaniu pokera jednej pary niż dwóch par.

$\clubsuit_2$ Oblicz o ile bardziej prawdopodobne jest uzyskanie w rozdaniu pokera Strita niż Pokera.

$\clubsuit_3$ Rozstrzygnij czy bardziej prawdopodobne jest otrzymanie w rozdaniu pokera Koloru czy Fula?

$\clubsuit_4$ Rozstrzygnij czy bardziej prawdopodobne jest otrzymanie w rozdaniu pokera Karety czy Fula?

♣$_5$ Załóżmy, że wykładowca chcialby losować studentów do odpowiedzi rzucając 3 kostkami $k6$ i jako numer osoby wylosowanej przyjmując sumę oczek. Czy taka metoda jest sprawiedliwa? Dlaczego?

♣$_6$ Jak zmodyfikować metodę z poprzedniego zadania, żeby była sprawiedliwa?

♣$_7$ Jak przy pomocy (odpowiedniej liczby) rzutów symetryczną monetą emulować rzut kostką $k6$?

♣$_8$ Jakie jest prawdopodobieństwo ukończenia n-polowej gry w Chińczyka w co najmniej m rzutach kostką (zakładamy, że tor gry jest liniowy i w grze nie ma dodatkowych utrudnień/ułatwień)? Narysuj wykresy $p(n)$ i $p(m)$.

♣$_9$ Napisz program[43], który symuluje działanie nieistniejącej fizycznie kostki $k13$. Narysuj histogram uzyskanych wyników.

[43] Środowisko/narzędzie dowolne.

♣$_{10}$ Napisz program[44], który symuluje rzucanie dwiema kostkami $k7$ i liczy sumę ich oczek. Narysuj histogram uzyskanych wyników.

[44] Środowisko/narzędzie dowolne.

♣$_{11}$ Rozstrzygnij czy jest możliwe, a jeśli tak, opisz jak, mając do dyspozycji kostki $k6$, $k10$ i $k4$ wylosować z rozkładu równomiernego liczby całkowite z przedziałów $[1, 11]$, $[1, 24]$, $[1, 50]$.

♣$_{12}$ Jakie jest prawdopodobieństwa trafienia n-tki w dużego lotka? Narysuj wykres $p(n)$ dla $n = 1, \ldots, 6$.

♣$_{13}$ Załóżmy, że małpa siedząca przy klawiaturze losuje każdą literę z równym prawdpodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że po n wciśnięciach w uzyskanym ciągu liter co najmniej raz pojawi się Twoje imię.

♣$_{14}$ Załóżmy, że małpa siedząca przy klawiaturze losuje każdą literę z równym prawdpodobieństwem. Ile liter powinna wcisnąć, żeby z prawdopodoieństwem $1/2$ w wynikowym ciągu znaków pojawiło się co najmniej jeden raz "hakunamatata"?

♣$_{15}$ Oblicz jakie jest prawdodopodobieństwo, że w ustalonym tekście[45] losowo wybrana litera to a, b lub c?

[45] Dowolny fragment tekstu literackiego w języku polskim, nie krótszy niż 300 znaków proszę go dołączyć do wyniku.

♠$_1$ Rzuć monetą 200 razy i zapisz wyniki[46]. Jakie jest (statystyczne) prawdopodobieństwo orła? Czy te wyniki sugerują, że moneta jest symetryczna?

[46] Wyniki proszę dołączyć do wyniku i przesłać mailem na mój adres e-mail.

♠$_2$ Rzuć kostką k6 200 razy i zapisz wyniki[47]. Czy kostka, na podstawie tych wyników można wnioskować, że kostka jest uczciwa?

[47] Wyniki proszę dołączyć do wyniku i przesłać mailem na mój adres e-mail.

♠$_3$ Sprawdź jak zmieni się prawdopodobieństwo siłowego złamania hasła[48] jeśli używamy tylko liter $[a - z]$, gdy dodamy do nich litery $[A - Z]$. Narysuj wykres tej różnicy w funkcji długości hasła n.

[48] Zakładamy, że przeciwnik zna długość naszego hasła i zbiór liter.

♠$_4$ Sprawdź jak zmieni się prawdopodobieństwo siłowego złamania hasła[49] jeśli używamy tylko liter $[a - z]$ i $[A - Z]$, gdy dodamy do nich cyfry $[0 - 9]$. Narysuj wykres tej różnicy w funkcji długości hasła n.

[49] Zakładamy, że przeciwnik zna długość naszego hasła i zbiór liter.

♠$_5$ Sprawdź jak zmieni się prawdopodobieństwo siłowego złamania hasła[50] jeśli używamy tylko liter $[a - z]$, gdy dodamy do nich litery $[A - Z]$ i cyfry $[0 - 9]$. Narysuj wykres tej różnicy w funkcji długości hasła n.

[50] Zakładamy, że przeciwnik zna długość naszego hasła i zbiór liter.

♠$_6$ Rozstrzygnij, czy, w ataku siłowym, bezpieczniejsze jest hasło o długości n_1 i alfabecie o m_1 znaków czy takie o długości n_2 i alfabecie o m_2 znaków, przy czym $n_1 < N_2$, ale $m_1 > m_2$. Wnioski podaj też dla konretnych wartości tych parametrów.

♠$_7$ Rozstrzygnij, czy dla hasła o długości n i alfabecie o m znaków, bardziej zabezpieczymy je przed atakiem siłowym inkrementując n czy m.

♠$_8$ Załóżmy, że używasz słownikowego hasła[51]. Sprawdź o ile większe są szanse jego słownikowego złamania, niż ma to miejsce w przypadku ataku siłowego[52]. Narysuj zależność tej różnicy w funkcji długości hasła.

[51] Proszę niezwłocznie zmienić hasło, to nie jest bezpieczne! A na potrzeby zadania załóżmy, że w bazie słownikowych haseł nieprzyjaciela jest 10^4 haseł.

[52] Przyjmijmy, że hasło ma 6 znaków i wykorzystuje symbole $[a - z]$ $[A - Z]$ i $[0 - 9]$.

♠$_9$ Rzuć monetą 200 razy i zapisz wyniki[53]. Jakie jest (statystyczne) prawdopodobieństwo następującej po sobie pary orzeł-reszka? Czy jest zgodne z przewidywaniem teoretycznym dla symetrycznej monety?

[53] Wyniki proszę dołączyć do wyniku i przesłać mailem na mój adres e-mail.

♠$_{10}$ Rzuć monetą 200 razy i zapisz wyniki[54]. Jakie jest (statystyczne) prawdopodobieństwo następującej po sobie pary reszka-reszka? Czy jest zgodne z przewidywaniem teoretycznym dla symetrycznej monety?

[54] Wyniki proszę dołączyć do wyniku i przesłać mailem na mój adres e-mail.

♠$_{11}$ Rzuć monetą 200 razy i zapisz wyniki[55]. Jakie jest (statystyczne) prawdopodobieństwo następującej po sobie pary reszka-orzeł? Czy jest zgodne z przewidywaniem teoretycznym dla symetrycznej monety?

[55] Wyniki proszę dołączyć do wyniku i przesłać mailem na mój adres e-mail.

♠$_{12}$ Rzuć 2 kostkami $k6$ 100 razy i zapisz wyniki[56]. Jaki jest rozkład sum oczek z każdego rzutu?

[56] Wyniki proszę dołączyć do wyniku i przesłać mailem na mój adres e-mail.

♠$_{13}$ Sprawdź empiryczny rozkład cyfr w losowaniach lotto[57]. Narysuj

[57] `www.lotto.pl/lotto/wyniki-i-wygrane/statystyki`

wykresy dla min. 3 wybranych przedziałów czasowych i skomentuj różnice/braki różnic między nimi.

♠14 Sprawdź empiryczny rozkład cyfr w losowaniach lotto[58]. Narysuj wykresy dla min. 3 wybranych przedziałów czasowych i skomentuj różnice/braki różnic między nimi.

[58] `www.lotto.pl/lotto/wyniki-i-wygrane/statystyki`

♠15 Jakie jest prawdopodobieństwo, że wpisując w wyszukiwarkę `www.lotto.pl/lotto/wyniki-i-wygrane/sprawdz-szostke` losową szóstke liczb trafimy wygraną?

W2: Ciągle myślę o probabilistyce

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Intuicyjne zrozumienie czym są zmienne losowe i niezależność.
- Opis zmiennych ciągłych – funkcja gęstości prawdopodobieństwa.
- Dystrybuanta ($F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$) jest ważną wielkością, pozwala także zdefiniować kwantyle.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Czym[59] jest zmienna losowa?

$\heartsuit_2$ Co[60] oznacza niezależność dwóch zmiennych losowych?

$\heartsuit_3$ Podaj przykłady[61] zjawisk, w opisie których istotne jest rozstrzygnięcie czy odpowiednie zmienne losowe są niezależne.

$\heartsuit_4$ Wyznacz[62] wartość granicy $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

$\heartsuit_5$ Wyznacz[63] wartość granicy $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

$\heartsuit_6$ Udowodnij[64], że dla rozkładów ciągłych gęstość prawdopodobieństwa można policzyć jako pochodną F'.

$\heartsuit_7$ Udowodnij[65], że dla rozkładów dyskretnych funkcję masy prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(x_k)$ można policzyć jako[66] $F(x_k) - F(x_{k-1})$.

$\heartsuit_8$ Dla rozkładu ciągłego oblicz granicę $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$\heartsuit_9$ Dla rozkładu ciągłego oblicz granicę $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$\heartsuit_{10}$ Rozstrzygnij, czy z faktu, że dwie zmienne losowe ciagłe są niezależne wynika, że mają różne rozkłady.

$\heartsuit_{11}$ Rozstrzygnij czy z faktu, że dwie zmienne losowe dyskretne są niezależne wynika, że mają różne rozkłady.

$\heartsuit_{12}$ Rozstrzygnij czy dwie zmienne losowe ciągłe o różnych rozkładach muszą być od siebie niezależne.

$\heartsuit_{13}$ Rozstrzygnij czy dwie zmienne losowe dyskretne o różnych rozkładach muszą być od siebie niezależne.

$\heartsuit_{14}$ Udowodnij[67], że dystrybuanta zmiennej ciągłej jest funkcją niemalejącą.

$\heartsuit_{15}$ Udowodnij[68], że dystrybuanta zmiennej dyskretnej jest funkcją niemalejącą.

[59] Proszę odpowiedzieć intuicyjnie, własnymi słowami, a nie przepisując definicję.

[60] Proszę odpowiedzieć intuicyjnie, własnymi słowami, a nie przepisując definicję.

[61] Minimum 3, różne niż na wykładzie.

[62] Wychodząc z definicji dystrybuanty F.

[63] Wychodząc z definicji dystrybuanty F.

[64] Wychodząc z definicji dystrybuanty F.

[65] Wychodząc z definicji dystrybuanty F.

[66] Gdzie $\{x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \}$ to nośnik, przy czym przyjmujemy $F(x_{-1}) = 0$.

[67] Wychodząc z definicji.

[68] Wychodząc z definicji.

$\diamondsuit_1$ Dla ciągłej zmiennej X wyraź przez dystrybuantę $\mathbb{P}(X > 0)$.

$\diamondsuit_2$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę rozkładu geometrycznego.

$\diamondsuit_3$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę ciągłego rozkładu jednostajnego.

$\diamondsuit_4$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę dyskretnego rozkładu jednostajnego.

$\diamondsuit_5$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę rozkładu Zipfa.

$\diamondsuit_6$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę rozkładu wykładniczego.

$\diamondsuit_7$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę rozkładu Cauchy'ego.

$\diamondsuit_8$ Znajdź zwarty wzór na dystrybuantę rozkładu Bernoulliego.

$\diamondsuit_9$ Co, intuicyjnie, oznacza p-ty kwantyl?

$\diamondsuit_{10}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[69]) można opisywać rozkładem normalnym[70]?

$\diamondsuit_{11}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[71]) można opisywać rozkładem wykładniczym[72]?

$\diamondsuit_{12}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[73]) można opisywać rozkładem log-normalnym[74]?

$\diamondsuit_{13}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[75]) można opisywać rozkładem gamma[76]?

$\diamondsuit_{14}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[77]) można opisywać rozkładem χ[78]?

$\diamondsuit_{15}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[79]) można opisywać rozkładem Cauchy'ego[80]?

$\clubsuit_1$ Wyznacz analitycznie kwantyle rozkładu Cauchy'ego.

$\clubsuit_2$ Wyznacz analitycznie kwantyle rozkładu geometrycznego.

$\clubsuit_3$ Wyznacz analitycznie kwantyle rozkładu wykładniczego.

$\clubsuit_4$ Wyznacz analitycznie kwantyle dyskretnego rozkładu jednostajnego.

$\clubsuit_5$ Wyznacz analitycznie kwantyle ciągłego rozkładu jednostajnego.

$\clubsuit_6$ Wyznacz graficznie kwantyle rozkładu normalnego. Narysuj wykres.

[69] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[70] Zilustruj wykresem i skomentuj jak gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametrów.

[71] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[72] Zilustruj wykresem i skomentuj jak gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametrów.

[73] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[74] Zilustruj wykresem i skomentuj jak gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametrów.

[75] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[76] Zilustruj wykresem i skomentuj jak gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

[77] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[78] Zilustruj wykresem i skomentuj jak gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

[79] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[80] Zilustruj wykresem i skomentuj jak gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu zależy od jego parametru.

♣7 Wyznacz graficznie kwantyle rozkładu log-normalnego. Narysuj wykres.

♣8 Wyznacz graficznie kwantyle rozkładu Cauchy'ego. Narysuj wykres.

♣9 Wyznacz graficznie kwantyle rozkładu gamma. Narysuj wykres.

♣10 Wyznacz numerycznie kwantyle rozkładu normalnego. Narysuj wykres.

♣11 Wyznacz numerycznie kwantyle rozkładu log-normalnego. Narysuj wykres.

♣12 Wyznacz numerycznie kwantyle rozkładu wykładniczego. Narysuj wykres.

♣13 Wyznacz numerycznie kwantyle rozkładu gamma. Narysuj wykres.

♣14 Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej, dla której kwantyle dane są przez $Q(u) = u^2$.

♣15 Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej, dla której kwantyle dane są przez $Q(u) = u^3$.

♠1 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[81] $\mathbb{P}(-0.1 < X < 4.1)$.

[81] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠2 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[82] $\mathbb{P}(-1.2 < X < -0.2)$.

[82] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠3 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[83] $\mathbb{P}(0.1 < X < 1.1)$.

[83] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠4 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[84] $\mathbb{P}(0.5 < X < 0.6)$.

[84] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠5 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[85] $\mathbb{P}(-0.1 < X < 0.1)$.

[85] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠6 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[86] $\mathbb{P}(-0.2 < X < 0.2)$.

[86] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠7 Odczytaj z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego[87] $\mathbb{P}(-0.3 < X < 0.3)$.

[87] Por. str. 361-362 w *czarnym podręczniku* Jakubowskiego i Sztencla.

♠8 Zmierz 20-krotnie czas opadania metalowej kulki z ustalonej wysokość przy uzyciu stopera. Sprawdz czy histogram wyników przypomina rozklad normalny. Skomentuj wynik.

♠$_9$ Zmierz 20-krotnie długość swojego pokoju przy pomocy 20*cm*-owej linijki. Sprawdz czy histogram wyników przypomina rozklad normalny. Skomentuj wynik.

♠$_{10}$ Zmierz 20-krotnie średnicę jabłka. Sprawdz czy histogram wyników przypomina rozklad normalny. Skomentuj wynik.

♠$_{11}$ Zmierz 20-krotnie czas opadania metalowej kulki z ustalonej wysokość przy uzyciu stopera. Sprawdz czy histogram wyników przypomina rozklad normalny. Skomentuj wynik.

♠$_{12}$ Zmierz 20-krotnie długość swojego pokoju przy pomocy 20*cm*-owej linijki. Sprawdz czy histogram wyników przypomina rozklad normalny. Skomentuj wynik.

♠$_{13}$ Zmierz 20-krotnie średnicę jabłka. Sprawdz czy histogram wyników przypomina rozklad normalny. Skomentuj wynik.

♠$_{14}$ Rzuć 30 razy dwiema kostkami *k*6. Narysuj empiryczną dystrybuantę zmiennej losowej opisującej ich sumę.

♠$_{15}$ Rzuć 30 razy dwiema kostkami *k*6. Narysuj empiryczną dystrybuantę zmiennej losowej opisującej ich iloczyn.

W3: Czy tego oczekiwaliśmy?

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Definicja i podstawowe własności momentów zmiennej losowej.
- Czym są estymatory i dlaczego ich potrzebujemy?
- Prezentowanie danych – wykresy skrzynkowe i histogramy.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Czy każdy rozkład ciągły posiada skończony pierwszy moment? Jeśli nie to, jaki musi być rozkład aby go mieć?

$\heartsuit_2$ Czy każdy rozkład dyskretny posiada skończony pierwszy moment? Jeśli nie to, jaki musi być rozkład aby go mieć?

$\heartsuit_3$ Czy kazdy rozkład ciągły posiada skończony drugi moment? Jeśli nie to, jaki musi być rozkład aby go mieć?

$\heartsuit_4$ Czy kazdy rozkład dyskretny posiada skończony drugi moment? Jeśli nie to, jaki musi być rozkład aby go mieć?

$\heartsuit_5$ Czy rozkład dyskretny o ograniczonym nośniku może nie mieć skończonego pierwszego momentu? Dlaczego?

$\heartsuit_6$ Czy rozkład ciągły o ograniczonym nośniku może nie mieć skończonego pierwszego momentu? Dlaczego?

$\heartsuit_7$ Czy rozkład dyskretny o ograniczonym nośniku może nie mieć skończonego drugiego momentu? Dlaczego?

$\heartsuit_8$ Czy rozkład ciągły o ograniczonym nośniku może nie mieć skończonego drugiego momentu? Dlaczego?

$\heartsuit_9$ Podaj przykład[88] ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa, który nie ma skończonego drugiego momentu.

[88] Inny niż na wykładzie.

$\heartsuit_{10}$ Podaj przykład[89] dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa, który nie ma skończonego drugiego momentu.

[89] Inny niż na wykładzie.

$\heartsuit_{11}$ Czy dla próby wylosowanej z rozkładu bez skończonego pierwszego momentu można policzyć średnią? Czy należy ją liczyć? Dlaczego?

$\heartsuit_{12}$ Jaką informację niesie średnia arytmetyczna próby wylosowanej z rozkładu o skończonym pierwszym momencie?

$\heartsuit_{13}$ Jaką informację niesie średnia arytmetyczna próby wylosowanej z rozkładu o nieskończonym pierwszym momencie?

$\heartsuit_{14}$ Czy może istnieć rozkład ciągły, dla którego istnieje skończony drugi moment, ale nie istnieje skończony pierwszy?[90]

$\heartsuit_{15}$ Czy może istnieć rozkład dyskretny, dla którego istnieje skończony drugi moment, ale nie istnieje skończony pierwszy?[91]

[91] Jeśli tak, to go podaj, jeśli nie uzasadnij, że to niemożliwe.

$\diamondsuit_{1}$ Wyprowadź zwarty wzór na dowolny moment rozkładu dwupunktowego.

$\diamondsuit_{2}$ Wyprowadź zwarty wzór na dowolny moment dyskretnego rozkładu jednostajnego.

$\diamondsuit_{3}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu geometrycznego.

$\diamondsuit_{4}$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu geometrycznego.

$\diamondsuit_{5}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu Poissona.

$\diamondsuit_{6}$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu Poissona.

$\diamondsuit_{7}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu Bernoulliego.

$\diamondsuit_{8}$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu Bernoulliego.

$\diamondsuit_{9}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu Zipfa.

$\diamondsuit_{10}$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu Zipfa.

$\diamondsuit_{11}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu zeta.

$\diamondsuit_{12}$ Dlaczego, pomimo bardzo podobnych wzorów na funkcje masy prawdopodobieństwa rozkład Zipfa posiada skończone momenty, a rozkład zeta nie?

$\diamondsuit_{13}$ Dla jakich wartości wykładnika s rozkład zeta posiada skończony pierwszy moment?

$\diamondsuit_{14}$ Dla jakich wartości wykładnika s rozkład zeta posiada skończony drugi moment?

$\diamondsuit_{15}$ Dla jakich wartości wykładnika s rozkład zeta posiada skończony trzeci moment?

$\clubsuit_{1}$ Wyprowadź zwarty wzór na dowolny moment ciągłego rozkładu jednostajnego.

♣$_2$ Wyprowadź zwarty wzór na dowolny nieparzysty moment rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

♣$_3$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu wykładniczego.

♣$_4$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu wykładniczego.

♣$_5$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu log-normalnego.

♣$_6$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu log-normalnego.

♣$_7$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu gamma.

♣$_8$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu gamma.

♣$_9$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu chi.

♣$_{10}$ Wyprowadź zwarty wzór na drugi moment rozkładu chi.

♣$_{11}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu Cauchy'ego lub uzasadnij, że to niemożliwe.

♣$_{12}$ Wyprowadź zwarty wzór na pierwszy moment rozkładu Pareto.

♣$_{13}$ Dla jakich wartości wykładnika α rozkład Pareto posiada skończony pierwszy moment?

♣$_{14}$ Dla jakich wartości wykładnika α rozkład Pareto posiada skończony drugi moment?

♣$_{15}$ Dla jakich wartości wykładnika α rozkład Pareto posiada skończony trzeci moment?

♠$_{1-15}$ Dla uzyskanych przez siebie we wcześniejszych zadaniach danych[92] z rzutu kostką $k6$ narysuj wykres $S(n)$, gdzie

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

gdzie k to numer uzyskanego rzutu $a_k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Czy i do jakiej wartości zbiega uzyskany wykres? Narysuj wykres skrzynkowy dla pełnych danych (200 rzutów).

[92] Osoby, które jeszcze nie rzucały kostką proszone są o wyrzucenie 200 wyników i przesłanie ich na mój adres e-mail w pliku tekstowym.

W4: Po jednym warunkiem

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Prawdopodobieństwo warunkowe.
- Wzór Bayesa.
- Wnioskowanie Bayesowskie.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Czy z faktu, że trzy zdarzenia A, B i C są niezależne parami wynika, że są niezależne łącznie?

$\heartsuit_2$ Czym[93] jest prawdopodobieństwo warunkowe?

$\heartsuit_3$ O czym mówi[94] wzór Bayesa?

$\heartsuit_4$ Jak należy rozumieć [95] wzór na prawdopodobieństwo całkowite?

$\heartsuit_5$ Jak należy rozumieć [96] wzór łańcuchowy?

$\heartsuit_6$ Dlaczego wzór Bayesa nie zachodzi dla rodziny zmiennych H_i niebędącej rozbiciem? Podaj dwa różne[97] przykłady.

$\heartsuit_7$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[98]) można opisywać przy pomocy prawdopodobieństwa warunkowego?

$\heartsuit_8$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[99]) można opisywać przy pomocy wzoru Bayesa?

$\heartsuit_9$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[100]) można opisywać przy pomocy wzoru na prawdopodobieństwo całkowite?

$\heartsuit_{10}$ Jaki rzeczywisty proces lub zjawisko (min. 3 przykłady[101]) można opisywać przy pomocywzoru łańcuchowego?

$\heartsuit_{11}$ Uzasadnij poprawność metody drzewek wychodząc ze wzoru łańcuchowego.

$\heartsuit_{12}$ Czy jeśli zdarzenie B zwiększa szansę zajścia zdarzenia A, to zdarzenie A zwiększa szansę zajścia zdarzenia B?

$\heartsuit_{13}$ Czy jeśli zdarzenie B zmniejsza szansę zajścia zdarzenia A, to zdarzenie A zmniejsza szansę zajścia zdarzenia B?

$\heartsuit_{14}$ Narysuj graficzną reprezentację[102] $\mathbb{P}(A \cap B|C)$.

$\heartsuit_{15}$ Narysuj graficzną reprezentację[103] $\mathbb{P}(A|B \cap C)$.

---

[93] Proszę odpowiedzieć intuicyjnie, własnymi słowami, a nie przepisując definicję.

[94] Proszę odpowiedzieć intuicyjnie, własnymi słowami, a nie przepisując definicję.

[95] Proszę odpowiedzieć intuicyjnie, własnymi słowami, a nie przepisując definicję.

[96] Proszę odpowiedzieć intuicyjnie, własnymi słowami, a nie przepisując definicję.

[97] Wymagania definicji mogą być niespełnione z co najmniej dwóch podstawowych powodów.

[98] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[99] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[100] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[101] Przykłady powinny być różne od tych z wykładu.

[102] Podobną do tych z wykładu.

[103] Podobną do tych z wykładu.

$\diamondsuit_1$ Rozważmy grę, w której gracz wybiera jedną z trzech kart, dwie z znich skutkują nagrodą, a jedna nie. Gracz wybrał jedną z kart, po czym rozdający odsłania jedną z pozostałych dwóch, która kryje nagrodę. Gracz może zmienić swój pierwotny wybór na drugą nieodsłoniętą kartę. Czy i o ile taka zmiana zwiększa szanse zwycięstwa?

$\diamondsuit_2$ Alicja, Barbara i Cezary po napisaniu egzaminu w pewien sposób dowiedzieli się, że zdało go tylko jedno z nich. Alicja pyta Złośliwego Wykładowcę o to kim jest ta osoba, ale w odpowiedzi dostaje tylko informację[104], że egzaminu na pewno nie zaliczył Cezary, cieszy się więc, oceniając, że jej szanse na zaliczenie wzrosły z $1/3$ do $1/2$. Gdzie popełnia błąd?

[104] Zakładamy, że poza złośliwośćią wykładowca jest prawdomówny.

$\diamondsuit_3$ Rozważmy n monet, z których k jest asymetrycznych i reszka wypada na nich średnio 2 razy częściej niż orzeł. Wybieramy losowo monetę i w wyniku rzutu widzimy orła. Jaka jest szansa, że była to moneta asymetryczna?

$\diamondsuit_4$ W fabryce butów na $2n$ par k składa się z dwóch lewych butów, a pozostałe są dobre. Jak zapakować te buty do dwóch paczek po n par każda, żeby szansa na wykrycie błędu przez kontrolera[105] była jak najmniejsza?

[105] Kontroler sprawdza jedną parę z losowo wybranej paczki.45x

$\diamondsuit_5$ Po rzucie 3 kostkami $k10$ wiemy tylko, że na każdej z nich wypadła inna liczba oczek. Jakie są prawdopodobieństwa, że: a) na żadnej nie wypadła 9, b) na pewnej kostce wypadła 9?

$\diamondsuit_6$ Rozważmy grę, w której gracz wybiera jedną z trzech kart, dwie z znich skutkują nagrodą, a jedna nie. Gracz wybrał jedną z kart, po czym rozdający odsłania jedną z pozostałych dwóch, która kryje nagrodę. Gracz może zmienić swój pierwotny wybór na drugą nieodsłoniętą kartę. Czy i o ile taka zmiana zwiększa szanse zwycięstwa?

$\diamondsuit_7$ Alicja, Barbara i Cezary po napisaniu egzaminu w pewien sposób dowiedzieli się, że zdało go tylko jedno z nich. Alicja pyta Złośliwego Wykładowcę o to kim jest ta osoba, ale w odpowiedzi dostaje tylko informację[106], że egzaminu na pewno nie zaliczył Cezary, cieszy się więc, oceniając, że jej szanse na zaliczenie wzrosły z $1/3$ do $1/2$. Gdzie popełnia błąd?

[106] Zakładamy, że poza złośliwośćią wykładowca jest prawdomówny.

$\diamondsuit_8$ Rozważmy n monet, z których k jest asymetrycznych i reszka wypada na nich średnio 2 razy częściej niż orzeł. Wybieramy losowo monetę i w wyniku rzutu widzimy orła. Jaka jest szansa, że była to moneta asymetryczna?

$\diamondsuit_9$ W fabryce butów na $2n$ par k składa się z dwóch lewych butów, a pozostałe są dobre. Jak zapakować te buty do dwóch paczek po n par każda, żeby szansa na wykrycie błędu przez kontrolera[107] była jak najmniejsza?

[107] Kontroler sprawdza jedną parę z losowo wybranej paczki.45x

$\diamondsuit_{10}$ Po rzucie 3 kostkami $k10$ wiemy tylko, że na każdej z nich wypadła inna liczba oczek. Jakie są prawdopodobieństwa, że: a) na żadnej nie wypadła 9, b) na pewnej kostce wypadła 9?

$\diamondsuit_{11}$ Rozważmy grę, w której gracz wybiera jedną z trzech kart, dwie z znich skutkują nagrodą, a jedna nie. Gracz wybrał jedną z kart, po czym rozdający odsłania jedną z pozostałych dwóch, która kryje nagrodę. Gracz może zmienić swój pierwotny wybór na drugą nieodsłoniętą kartę. Czy i o ile taka zmiana zwiększa szanse zwycięstwa?

$\diamondsuit_{12}$ Alicja, Barbara i Cezary po napisaniu egzaminu w pewien sposób dowiedzieli się, że zdało go tylko jedno z nich. Alicja pyta Złośliwego Wykładowcę o to kim jest ta osoba, ale w odpowiedzi dostaje tylko informację[108], że egzaminu na pewno nie zaliczył Cezary, cieszy się więc, oceniając, że jej szanse na zaliczenie wzrosły z $1/3$ do $1/2$. Gdzie popełnia błąd?

[108] Zakładamy, że poza złośliwośćią wykładowca jest prawdomówny.

$\diamondsuit_{13}$ Rozważmy n monet, z których k jest asymetrycznych i reszka wypada na nich średnio 2 razy częściej niż orzeł. Wybieramy losowo monetę i w wyniku rzutu widzimy orła. Jaka jest szansa, że była to moneta asymetryczna?

$\diamondsuit_{14}$ W fabryce butów na $2n$ par k składa się z dwóch lewych butów, a pozostałe są dobre. Jak zapakować te buty do dwóch paczek po n par każda, żeby szansa na wykrycie błędu przez kontrolera[109] była jak najmniejsza?

[109] Kontroler sprawdza jedną parę z losowo wybranej paczki.

$\diamondsuit_{15}$ Po rzucie 3 kostkami $k10$ wiemy tylko, że na każdej z nich wypadła inna liczba oczek. Jakie są prawdopodobieństwa, że: a) na żadnej nie wypadła 9, b) na pewnej kostce wypadła 9?

---

[110]Test na rzadką chorobę[111] daje fałszywie pozytywną odpowiedź u p% zdrowych, a u chorych zawsze daje poprawną, pozytywną, odpowiedź[112]. Jaka jest szansa[113] S, że osoba z pozytywnym wynikiem jest zdrowa?

$\clubsuit_1$ Narysuj wykres $S(p)$ przy założeniu $N = 10^3$. Odczytaj wartości dla $p = 1, 5, 10\%$.

$\clubsuit_2$ Narysuj wykres $S(N)$ przy założeniu $p = 5\%$. Odczytaj wartości dla $N = 10$, 10^2, 10^3.

[110] Uwaga! Powyższe zadanie jest obowiązkowe dla wszystkich, poniżej zamieszczam indywidualne dodatki.

[111] To znacy, że chora jest średnio jedna osoba na N i N jest duże (np. ok. 10^3).

[112] To znaczy, że test ma czułość 100% i swoistość $(100 - p)$%.

[113] Przy wnioskowaniu tylko z wyniku testu

♣$_3$ Zakładając, że $N = 10^3$, a $p = 5\%$ narysuj proporcjonalny rysunek oznaczając każde ze zdarzeń elementarnych[114] figurą geometryczną o kształcie proporcjonalnym do prawdopodobieństwa

[114] Poprawna diagnoza pozytywna, poprawna diagnoza negatywna, fałszywie pozytywna i fałszywie negatywna.

♣$_4$ Narysuj wykres $S(p)$ przy założeniu $N = 10^3$. Odczytaj wartości dla $p = 1, 5, 10\%$.

♣$_5$ Narysuj wykres $S(N)$ przy założeniu $p = 5\%$. Odczytaj wartości dla $N = 10$, 10^2, 10^3.

♣$_6$ Zakładając, że $N = 10^3$, a $p = 5\%$ narysuj proporcjonalny rysunek oznaczając każde ze zdarzeń elementarnych[115] figurą geometryczną o kształcie proporcjonalnym do prawdopodobieństwa

[115] Poprawna diagnoza pozytywna, poprawna diagnoza negatywna, fałszywie pozytywna i fałszywie negatywna.

♣$_7$ Narysuj wykres $S(p)$ przy założeniu $N = 10^3$. Odczytaj wartości dla $p = 1, 5, 10\%$.

♣$_8$ Narysuj wykres $S(N)$ przy założeniu $p = 5\%$. Odczytaj wartości dla $N = 10$, 10^2, 10^3.

♣$_9$ Zakładając, że $N = 10^3$, a $p = 5\%$ narysuj proporcjonalny rysunek oznaczając każde ze zdarzeń elementarnych[116] figurą geometryczną o kształcie proporcjonalnym do prawdopodobieństwa

[116] Poprawna diagnoza pozytywna, poprawna diagnoza negatywna, fałszywie pozytywna i fałszywie negatywna.

♣$_{10}$ Narysuj wykres $S(p)$ przy założeniu $N = 10^3$. Odczytaj wartości dla $p = 1, 5, 10\%$.

♣$_{11}$ Narysuj wykres $S(N)$ przy założeniu $p = 5\%$. Odczytaj wartości dla $N = 10$, 10^2, 10^3.

♣$_{12}$ Zakładając, że $N = 10^3$, a $p = 5\%$ narysuj proporcjonalny rysunek oznaczając każde ze zdarzeń elementarnych[117] figurą geometryczną o kształcie proporcjonalnym do prawdopodobieństwa

[117] Poprawna diagnoza pozytywna, poprawna diagnoza negatywna, fałszywie pozytywna i fałszywie negatywna.

♣$_{13}$ Narysuj wykres $S(p)$ przy założeniu $N = 10^3$. Odczytaj wartości dla $p = 1, 5, 10\%$.

♣$_{14}$ Narysuj wykres $S(N)$ przy założeniu $p = 5\%$. Odczytaj wartości dla $N = 10$, 10^2, 10^3.

♣$_{15}$ Zakładając, że $N = 10^3$, a $p = 5\%$ narysuj proporcjonalny rysunek oznaczając każde ze zdarzeń elementarnych[118] figurą geometryczną o kształcie proporcjonalnym do prawdopodobieństwa

[118] Poprawna diagnoza pozytywna, poprawna diagnoza negatywna, fałszywie pozytywna i fałszywie negatywna.

♣$_{11-15}$ Dla wektora[119] stopni wierzchołków sąsiadów w sieci społecznościowej[120] $\{k_1, k_2, \ldots k_N\}$ narysuj wykres skrzynkowy. Opisz i skomentuj wykres, wyciągnij z niego wnioski o naturze rozkładu stopni wierzchołków w sieci społecznościowej.

[119] Sąsiadem nazywamy osobę połączoną krawędzią, stopień wierzchołka to liczba krawędzi jakie do/z niego trafiają.

[120] Można wykorzystać dane dotyczące własnych znajomych z wybranej sieci (minimum $N > 50$, proszę mi ich **nie** przesyłać.), a gdyby ktoś nie chciał/nie mógł pobierać takich danych na mojej stronie można pobrać dane syntetyczne.

W5: Porozmawiajmy o Centralnym

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Opis testów diagnostycznych.
- Prawa wielkich liczb.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Podaj przykłady dwóch ciągów[121], z których jeden spełnia, a drugi nie spełnia założeń SPWL.

$\heartsuit_2$ Wyjaśnij jak przy pomocy nierówności[122]

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n - \mathbb{E}S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathcal{D}^2 S_n}{\varepsilon^2 n^2},$$

udowodnić SPWL Markowa.

$\heartsuit_3$ Przy pomocy MPWL wyjaśnij wyniki zadania ♠ z listy $W3$.

$\heartsuit_4$ Udowodnij twierdzenie Poissona, przeliczając występującą w jego tezie granicę przy założeniu upraszczającym $np_n = \lambda$.

$\heartsuit_5$ Podaj przykłady dwóch ciągów[123], z których jeden spełnia, a drugi nie spełnia założeń SPWL.

$\heartsuit_6$ Wyjaśnij jak przy pomocy nierówności[124]

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n - \mathbb{E}S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathcal{D}^2 S_n}{\varepsilon^2 n^2},$$

udowodnić SPWL Markowa.

$\heartsuit_7$ Przy pomocy MPWL wyjaśnij wyniki zadania ♠ z listy $W3$.

$\heartsuit_8$ Udowodnij twierdzenie Poissona, przeliczając występującą w jego tezie granicę przy założeniu upraszczającym $np_n = \lambda$.

$\heartsuit_9$ Podaj przykłady dwóch ciągów[125], z których jeden spełnia, a drugi nie spełnia założeń SPWL.

$\heartsuit_{10}$ Wyjaśnij jak przy pomocy nierówności[126]

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n - \mathbb{E}S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathcal{D}^2 S_n}{\varepsilon^2 n^2},$$

udowodnić SPWL Markowa.

$\heartsuit_{11}$ Przy pomocy MPWL wyjaśnij wyniki zadania ♠ z listy $W3$.

$\heartsuit_{12}$ Udowodnij twierdzenie Poissona, przeliczając występującą w jego tezie granicę przy założeniu upraszczającym $np_n = \lambda$.

[121] Innych niż na wykładzie i ćwiczeniach

[122] Będąca wnioskiem z nierówności Markowa $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\varepsilon^p}$.

[123] Innych niż na wykładzie i ćwiczeniach

[124] Będąca wnioskiem z nierówności Markowa $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\varepsilon^p}$.

[125] Innych niż na wykładzie i ćwiczeniach

[126] Będąca wnioskiem z nierówności Markowa $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\varepsilon^p}$.

$\heartsuit_{13}$ Podaj przykłady dwóch ciągów[127], z których jeden spełnia, a drugi nie spełnia założeń SPWL.

$\heartsuit_{14}$ Przy pomocy MPWL wyjaśnij wyniki zadania ♠ z listy $W3$.

$\heartsuit_{15}$ Udowodnij twierdzenie Poissona, przeliczając występującą w jego tezie granicę przy założeniu upraszczającym $np_n = \lambda$.

$\diamondsuit_1$ Stosując twierdzenie Poissona wyznacz asymptotyczny rozkład prawdopodobieństwa pojawienia się n trafionych „szóstek" w jednym losowaniu Lotto.

$\diamondsuit_2$ Stosując twierdzenie Poissona[128] odpowiedz na pytanie jakie jest prawdopodobieństwa, że słodka bułka ma w środku (1) jeden rodzynek oraz (2) 5 rodzynków, jeśli średnio zawiera 3 rodzynki.

[128] Dlaczego możemy je tu stosować?

$\diamondsuit_3$ Wyznacz w przybliżeniu (z twierdzenia Poissona) jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 100 osób 5 urodziło się w jeden z dwóch dni Świąt Bożego Narodzenia.

$\diamondsuit_4$ Stosując twierdzenie Poissona[129] odpowiedz na pytanie ile średnio rodzynków powinna zawierać słodka bułka, żeby z prawdopodobieństwem 0.99 losowe ciastko zawierało co najmniej jeden rodzynek?

[129] Dlaczego możemy je tu stosować?

$\diamondsuit_5$ Dwóch korektorów przeczytało książkę. Pierwszy znalazł 191 błędów, drugi 152, przy czym błędów znalazionych przez obu było 99. Czy byli to dobrzy korektorzy (odpowiedz ilościowo)?

$\diamondsuit_6$ Stosując twierdzenie Poissona wyznacz asymptotyczny rozkład prawdopodobieństwa pojawienia się n trafionych „piątek" w jednym losowaniu Lotto.

$\diamondsuit_7$ Stosując twierdzenie Poissona[130] odpowiedz na pytanie jakie jest prawdopodobieństwa, że słodka bułka ma w środku (1) 2 rodzynki oraz (2) 10 rodzynków, jeśli średnio zawiera 2 rodzynki.

[130] Dlaczego możemy je tu stosować?

$\diamondsuit_8$ Wyznacz w przybliżeniu (z twierdzenia Poissona) jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 200 osób 3 urodziły się w jeden z dwóch dni Świąt Wielkanocnych.

$\diamondsuit_9$ Stosując twierdzenie Poissona[131] odpowiedz na pytanie ile średnio rodzynków powinna zawierać słodka bułka, żeby z prawdopodobieństwem 0.99 losowe ciastko zawierało co najmniej trzy rodzynki?

[131] Dlaczego możemy je tu stosować?

$\diamondsuit_{10}$ Dwóch korektorów przeczytało książkę. Pierwszy znalazł 181 błędów, drugi 143, przy czym błędów znalazionych przez obu było 95. Czy byli to dobrzy korektorzy (odpowiedz ilościowo)?

$\diamondsuit_{11}$ Stosując twierdzenie Poissona wyznacz asymptotyczny rozkład prawdopodobieństwa pojawienia się n trafionych „czwórek" w jednym losowaniu Lotto.

$\diamondsuit_{12}$ Stosując twierdzenie Poissona[132] odpowiedz na pytanie jakie jest prawdopodobieństwa, że słodka bułka ma w środku (1) 0 rodzynek oraz (2) 15 rodzynków, jeśli średnio zawiera 5 rodzynków.

[132] Dlaczego możemy je tu stosować?

$\diamondsuit_{13}$ Wyznacz w przybliżeniu (z twierdzenia Poissona) jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 400 osób 10 urodziło się w 5 sierpnia.

$\diamondsuit_{14}$ Stosując twierdzenie Poissona[133] odpowiedz na pytanie ile średnio rodzynków powinna zawierać słodka bułka, żeby z prawdopodobieństwem 0.99 losowe ciastko zawierało co najwyżej 5 rodzynków?

[133] Dlaczego możemy je tu stosować?

$\diamondsuit_{15}$ Dwóch korektorów przeczytało książkę. Pierwszy znalazł 151 błędów, drugi 182, przy czym błędów znalazionych przez obu było 94. Czy byli to dobrzy korektorzy (odpowiedz ilościowo)?

W pewnej grupie wiekowej na chorobę wieńcową cierpi 8% mężczyzn i 2% kobiet. Wylosowano z tej grupy mężczyznę i kobietę, by poddać ich próbie wysiłkowej[134]. Oblicz dla każdego z nich

[134] Tak jak w zadaniu z wykładu, czułość testu to 65%, a jego swoistość 85%.

$\clubsuit_1$ Prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa doprowadziła do prawidłowej diagnozy.

$\clubsuit_2$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem dodatnim jest chora.

$\clubsuit_3$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem ujemnym jest zdrowa.

$\clubsuit_4$ Prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa doprowadziła do prawidłowej diagnozy.

$\clubsuit_5$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem dodatnim jest chora.

$\clubsuit_6$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem ujemnym jest zdrowa.

$\clubsuit_7$ Prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa doprowadziła do prawidłowej diagnozy.

$\clubsuit_8$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem dodatnim jest chora.

$\clubsuit_9$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem ujemnym jest zdrowa.

$\clubsuit_{10}$ Prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa doprowadziła do prawidłowej diagnozy.

$\clubsuit_{11}$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem dodatnim jest chora.

♣$_{12}$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem ujemnym jest zdrowa.

♣$_{13}$ Prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa doprowadziła do prawidłowej diagnozy.

♣$_{14}$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem dodatnim jest chora.

♣$_{15}$ Prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem ujemnym jest zdrowa.

♠$_{1-15}$ Podziel swój zbiór 200 rzutów kostką $k6$ na 25 ciągów $X_1, \ldots, X_8$. Dla każdego takiego ciągu oblicz $S_1, \ldots, S_8$. Narysuj osiem histogramów dla każdej z tych wielkości. Oblicz też wartości średnie S_n i porównaj je z przewidywaniami praw wielkich liczb[135]

[135] Najlepiej na rysunku, podobnym do tego z wykładu.

W6: O estymie estymatora.

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- zastosowania Mocnego Prawa Wielkich Liczb.
- Centralne Twierdzenie Graniczne.
- Definicje estymatorów i ich najwazniejsze cechy.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest statystyka[136].

[136] Funkcja, a nie dziedzina matematyki.

$\heartsuit_2$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co to znaczy, że estymator jest obciążony.

$\heartsuit_3$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co to znaczy, że estymator jest nieobciążony.

$\heartsuit_4$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co to znaczy, że estymator jest asymptotycznie nieobciążony.

$\heartsuit_5$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co to znaczy, że estymator jest zgodny.

$\heartsuit_6$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co to znaczy, że estymator jest efektywny.

$\heartsuit_7$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) dlaczego od dobrego estymatora oczekujemy, żeby był zgodny.

$\heartsuit_8$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) dlaczego od dobrego estymatora oczekujemy, żeby był co najmniej asymptotycznie nieobciążony.

$\heartsuit_9$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) dlaczego od dobrego estymatora oczekujemy, żeby był efektywny.

$\heartsuit_{10}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym są metody Monte Carlo.

$\heartsuit_{11}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest dystrybuanta empiryczna.

$\heartsuit_{12}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) na czym polega częstościowa definicja prawdopodobieństwa.

$\heartsuit_{13}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co mówi Centralne Twierdzenie Graniczne.

$\heartsuit_{14}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) co mówi Mocne Prawo Wielkich Liczb.

$\heartsuit_{15}$ Wyjaśnij (własnymi słowami, nie przytaczając suchą definicję) czym jest estmator.

$\diamondsuit_1$ W Polsce jest $n = 24.6 \cdot 10^6$ podatników[137] i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma\sqrt{\mathcal{D}^2 X_i} = 10^2 PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą jeden grosz na podatnika? A 5 groszy?

[137] Dane za rok 1998.

$\diamondsuit_2$ W pewnym województwie jest $n = 10^4$ podatników i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}^2 X_i} = 10^2 PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą jeden grosz na podatnika? A 5 groszy?

$\diamondsuit_3$ W ramach prac domowych rzucili Państwo łącznie kostkami $k6$ ok. $n = 10^4$ razy. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek mieści się między 34500 a 35500?

$\diamondsuit_4$ W Polsce jest $n = 24.6 \cdot 10^6$ podatników[138] i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma\sqrt{\mathcal{D}^2 X_i} = 10^2 PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 2 grosz na podatnika? A 10 groszy?

[138] Dane za rok 1998.

$\diamondsuit_5$ W pewnym województwie jest $n = 10^4$ podatników i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}^2 X_i} = 10^2 PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 2 grosz na podatnika? A 10 groszy?

$\diamondsuit_6$ W ramach prac domowych rzucili Państwo łącznie kostkami $k6$ ok. $n = 10^4$ razy. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek mieści się między 34950 a 35050?

$\diamondsuit_7$ W Polsce jest $n = 24.6 \cdot 10^6$ podatników[139] i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}^2 X_i} = 50 PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa

[139] Dane za rok 1998.

w wyniku tych błędów przekroczą jeden grosz na podatnika? A 5 groszy?

$\diamondsuit_8$ W pewnym województwie jest $n = 10^4$ podatników i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma\sqrt{\mathcal{D}^2X_i} = 50PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą jeden grosz na podatnika? A 5 groszy?

$\diamondsuit_9$ W ramach prac domowych rzucili Państwo łącznie kostkami $k6$ ok. $n = 10^4$ razy. W jakim zbiorze z prawdopodobieństwem 0.9 zawiera się suma wszystkich tych kostek?

$\diamondsuit_{10}$ W Polsce jest $n = 24.6 \cdot 10^6$ podatników[140] i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma\sqrt{\mathcal{D}^2X_i} = 50PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 2 grosz na podatnika? A 10 groszy?

[140] Dane za rok 1998.

$\diamondsuit_{11}$ W pewnym województwie jest $n = 10^4$ podatników i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}^2X_i} = 50PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 2 grosz na podatnika? A 10 groszy?

$\diamondsuit_{12}$ W ramach prac domowych rzucili Państwo łącznie kostkami $k6$ ok. $n = 10^4$ razy. W jakim zbiorze z prawdopodobieństwem 0.99 zawiera się suma wszystkich tych kostek?

$\diamondsuit_{13}$ W Polsce jest $n = 24.6 \cdot 10^6$ podatników[141] i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma\sqrt{\mathcal{D}^2X_i} = 10^2PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 2 grosz na podatnika? A 10 groszy?

[141] Dane za rok 1998.

$\diamondsuit_{14}$ W pewnym województwie jest $n = 10^4$ podatników i każdy z nich może pomylić się przy wypełnianiu zeznania podatkowego, przy czym wartość pomyłki opisuje zmienna losowa X_i, dla której $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}^2X_i} = 10^2PLN$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 2 grosz na podatnika? A 10 groszy?

$\diamondsuit_{15}$ W ramach prac domowych rzucili Państwo łącznie kostkami $k6$ ok. $n = 10^4$ razy. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek mieści się między 34950 a 35050?

$\clubsuit_{1-15}$ Narysuj zamkniętą krzywą mieszczącą się w kwadracie jednostkowym. Oblicz przy pomocy metody Monte Carlo[142] pole powierzchni ograniczone tą krzywą. Spróbuj oszacować dokładność obliczeń.

[142] W wersji podstawowej możecie Państwo policzyć ile prób *wpadło* do zbioru "ręcznie".

$\spadesuit_{1-15}$ Do histogramów z poprzedniej pracy domowej dopasuj krzywą teoretyczną wynikającą z CTG.

W7: Teoretycznie tak.

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Rodzaje zbieżności.
- Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.
- Metody estymacji.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Wyjaśnij dlaczego zbieżność względem prawdopodobieństwa jest słabszym warunkiem od zbieżności prawie na pewno.

$\heartsuit_2$ Wyjaśnij dlaczego zbieżność prawie na pewno jest mocniejszym warunkiem od zbieżności względem prawdopodobieństwa.

$\heartsuit_3$ Wyjaśnij czy i dlaczego σ-ciało spełnia intuicyjne oczekiwania stawiane zbiorowi zdarzeń.

$\heartsuit_4$ Wyjaśnij czym, intuicyjnie, jest przestrzeń probabilistyczna.

$\heartsuit_5$ Wyjaśnij na czym polega metoda momentów.

$\heartsuit_6$ Wyjaśnij na czym polega metoda największej wiarogodności.

$\heartsuit_7$ Wyjaśnij czym są wszystkie składowe przestrzeni probabilistycznej opisującej rzut kostką $k6$.

$\heartsuit_8$ Wyjaśnij czym są wszystkie składowe przestrzeni probabilistycznej opisującej rzut monetą.

$\heartsuit_9$ Z czego składa się σ-ciało zdarzeń dla przestrzeni probabilistycznej opisanej ciągłym prawdopodobieństwa?

$\heartsuit_{10}$ Uzasadnij intuicyjnie aksjomaty prawdopodobieństwa.

$\heartsuit_{11}$ Jakiego intuicyjnego oczekiwania stawianego prawdopodobieństwu nie daloby się spełnić naruszając 1. aksjomat?

$\heartsuit_{12}$ Jakiego intuicyjnego oczekiwania stawianego prawdopodobieństwu nie daloby się spełnić naruszając 2. aksjomat?

$\heartsuit_{13}$ Jakiego intuicyjnego oczekiwania stawianego prawdopodobieństwu nie daloby się spełnić naruszając 3. aksjomat?

$\heartsuit_{14}$ Wyjaśnij czym są wszystkie składowe przestrzeni probabilistycznej opisującej rzut kostką $k8$.

$\heartsuit_{15}$ Wyjaśnij czym są wszystkie składowe przestrzeni probabilistycznej opisującej próbę Bernoulliego.

$\diamondsuit_1$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$\diamondsuit_2$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A_i $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

$\diamondsuit_3$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnego zdarzenia A $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

$\diamondsuit_4$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla $A, B \in \mathcal{F}$ jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

$\diamondsuit_5$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla $A, B \in \mathcal{F}$ jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

$\diamondsuit_6$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A i B $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$\diamondsuit_7$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla każdego zdarzenia $\mathbb{P}(A) < 1$.

$\diamondsuit_8$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$\diamondsuit_9$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A_i $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

$\diamondsuit_{10}$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnego zdarzenia A $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

$\diamondsuit_{11}$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla $A, B \in \mathcal{F}$ jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

$\diamondsuit_{12}$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla $A, B \in \mathcal{F}$ jeśli $A \subset B$ to $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

$\diamondsuit_{13}$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A i B $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$\diamondsuit_{14}$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla każdego zdarzenia $\mathbb{P}(A) < 1$.

$\diamondsuit_{15}$ Wychodząc z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A i B $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$\clubsuit_1$ Dla zmiennej z rozkładu jednostajnego $U([0, \theta])$ wyznacz estymator θ metodą momentów.

♣$_2$ Dla zmiennej z rozkładu jednostajnego $U([0,\theta])$ wyznacz estymator θ metodą największej wiarogodności.

♣$_3$ Dla zmiennej z rozkładu wykładniczego $Exp(\theta)$ wyznacz estymator θ metodą momentów.

♣$_4$ Dla zmiennej z rozkładu wykładniczego $Exp(\theta))$ wyznacz estymator θ metodą największej wiarogodności.

♣$_5$ Dla zmiennej z rozkładu jednostajnego dyskretnego z parametrem N wyznacz estymator N metodą momentów.

♣$_6$ Dla zmiennej z rozkładu geometrycznego z parametrem q wyznacz estymator q metodą momentów.

♣$_7$ Dla zmiennej z rozkładu Pareto oblicz estymatory α i x_m metodą największej wiarogodności.

♣$_8$ Dla zmiennej z rozkładu Pareto oblicz estymatory α i x_m metodą momentów (w zakresie parametrów, gdzie jest to możliwe).

♣$_9$ Wyznacz metodą momentów estymator parametru p monety, dla której $\mathbb{P}(O) = p$ i $\mathbb{P}(R) = 1 - p$.

♣$_{10}$ Dla zmiennej z rozkładu jednostajnego dyskretnego z parametrem N wyznacz estymator N metodą największej wiarogodności.

♣$_{11}$ Dla zmiennej z rozkładu geometrycznego z parametrem q wyznacz estymator q metodą największej wiarogodności.

♣$_{12}$ Dla zmiennej z rozkładu Bernoulliego z parametrami N i p wyznacz ich estymatory metodą największej wiarogodności.

♣$_{13}$ Dla zmiennej z rozkładu Bernoulliego z parametrami N i p wyznacz ich estymatory metodą momentów.

♣$_{14}$ Dla zmiennej z rozkładu normalnego z parametrami μ i σ wyznacz ich estymatory metodą momentów.

♣$_{15}$ Dla zmiennej z rozkładu normalnego z parametrami μ i σ wyznacz ich estymatory metodą największej wiarogodności.

♠$_{1-15}$ Rozstrzygnij empirycznie i uzasadnij czy dane umieszczone na stronie przedmiotu pochodzą z rozkładu spełniającego Centralne Twierdzenie Graniczne.

W8: Znaj rozkłady, nie ma rady!

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- wzór właczeń-wyłączeń oraz ciągłość prawdopodobieństwa.
- funkcje tworzące, charakterystyczne i generujące momenty.
- najważniejsze relacje pomiędzy typowymi rozkładami prawdopodobienstwa.
- funkcje zmiennych losowych.

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Udowodnij (ściśle) wzór włączeń-wyłączeń dla $n = 4$.

$\heartsuit_2$ Uzasadnij[143] prawdziwość subaddytywności prawdopodobieństwa, czyli $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

[143] Wystarczy intuicyjnie, nie musi być to ścisły dowód.

$\heartsuit_3$ Powtórz[144] rozumowanie z wykładu, w którym porównaliśmy zbieżność prawie na pewno ze zbieżnością względem prawdopodobieństwa.

[144] Obficie komentując wszystkie przekształcenia.

$\heartsuit_4$ Podaj przykład zmiennej losowej dla której nie istnieje (co najmniej w pewnym zakresie) funkcja generująca.

$\heartsuit_5$ Podaj przykład zmiennej losowej dla której nie istnieje (co najmniej w pewnym zakresie) funkcja generująca momenty.

$\heartsuit_6$ Wyprowadź wzór na funkcję charakterystyczną dla sumy zmiennych losowych $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, z których każda opisana jest funkcją charakterystyczną φ_{X_i}.

$\heartsuit_7$ Wyprowadź wzór na funkcję generującą momenty dla sumy zmiennych losowych $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, z których każda opisana jest funkcją generującą momenty M_{X_i}.

$\heartsuit_8$ Udowodnij twierdzenie o rozkładzie zmiennej losowej ciągłej przekształconej przez funkcję gładką.

$\heartsuit_9$ Udowodnij (ściśle) wzór włączeń-wyłączeń dla $n = 4$.

$\heartsuit_{10}$ Powtórz[145] rozumowanie z wykładu, w którym porównaliśmy zbieżność prawie na pewno ze zbieżnością względem prawdopodobieństwa.

[145] Obficie komentując wszystkie przekształcenia.

$\heartsuit_{11}$ Podaj przykład zmiennej losowej dla której nie istnieje (co najmniej w pewnym zakresie) funkcja generująca.

$\heartsuit_{12}$ Podaj przykład zmiennej losowej dla której nie istnieje (co najmniej w pewnym zakresie) funkcja generująca momenty.

$\heartsuit_{13}$ Wyprowadź wzór na funkcję charakterystyczną dla sumy zmiennych losowych $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, z których każda opisana jest funkcją charakterystyczną φ_{X_i}.

$\heartsuit_{14}$ Wyprowadź wzór na funkcję generującą momenty dla sumy zmiennych losowych $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, z których każda opisana jest funkcją generującą momenty M_{X_i}.

$\heartsuit_{15}$ Udowodnij twierdzenie o rozkładzie zmiennej losowej ciągłej przekształconej przez funkcję gładką.

$\diamondsuit_1$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu jednostajnego ciągłego.

$\diamondsuit_2$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu jednostajnego dyskretnego.

$\diamondsuit_3$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu geometrycznego.

$\diamondsuit_4$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu Poissona.

$\diamondsuit_5$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu dwupunktowego.

$\diamondsuit_6$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu Zipfa.

$\diamondsuit_7$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu Bernoulliego.

$\diamondsuit_8$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu zeta.

$\diamondsuit_9$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu normalnego.

$\diamondsuit_{10}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu wykladniczego.

$\diamondsuit_{11}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu gamma.

$\diamondsuit_{12}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu zmiennej losowej, dla kórej $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.

$\diamondsuit_{13}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu Pareto.

$\diamondsuit_{14}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu jednostajnego dyskretnego.

$\diamondsuit_{15}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą dla rozkładu geometrycznego.

$\clubsuit_1$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu jednostajnego ciągłego.

$\clubsuit_2$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu jednostajnego dyskretnego.

$\clubsuit_3$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu geometrycznego.

$\clubsuit_4$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu Poissona.

$\clubsuit_5$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu dwupunktowego.

$\clubsuit_6$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu Zipfa.

$\clubsuit_7$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu Bernoulliego.

$\clubsuit_8$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu zeta.

$\clubsuit_9$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu normalnego.

$\clubsuit_{10}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu wykladniczego.

$\clubsuit_{11}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu gamma.

$\clubsuit_{12}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu zmiennej losowej, dla kórej $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.

$\clubsuit_{13}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu Pareto.

$\clubsuit_{14}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu jednostajnego dyskretnego.

$\clubsuit_{15}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu geometrycznego.

♠$_1$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję generującą momenty dla rozkładu jednostajnego ciągłego.

♠$_2$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu jednostajnego dyskretnego.

♠$_3$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu geometrycznego.

♠$_4$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu Poissona.

♠$_5$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu dwupunktowego.

♠$_6$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu Zipfa.

♠$_7$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu Bernoulliego.

♠$_8$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu zeta.

♠$_9$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu normalnego.

♠$_{10}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu wykladniczego.

♠$_{11}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu gamma.

♠$_{12}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu zmiennej losowej, dla kórej $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.

♠$_{13}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu Pareto.

♠$_{14}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu jednostajnego dyskretnego.

♠$_{15}$ Wyznacz lub uzasadnij, że to niemożliwe funkcję charakterystyczną dla rozkładu geometrycznego.

W10: Postawmy sobie hipotezę.

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- Na czym polega testowanie hipotez statystycznych.
- Jak je rozstrzygać?

Praca domowa

$\heartsuit_1$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Dlaczego można je przedstawic jako problem estymacji przedziałowej?

$\heartsuit_2$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Czym jest moc testu?

$\heartsuit_3$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Co mierzy poziom istotności?

$\heartsuit_4$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Czym jest obszar krytyczny?

$\heartsuit_5$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Kiedy i dlaczego mamy podstawę do odrzucenia hipotezy zerowej?

$\heartsuit_6$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Dlaczego można je przedstawic jako problem estymacji przedziałowej?

$\heartsuit_7$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Czym jest moc testu?

$\heartsuit_8$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Co mierzy poziom istotności?

$\heartsuit_9$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Czym jest obszar krytyczny?

$\heartsuit_{10}$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Kiedy i dlaczego mamy podstawę do odrzucenia hipotezy zerowej?

$\heartsuit_{11}$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Dlaczego można je przedstawic jako problem estymacji przedziałowej?

$\heartsuit_{12}$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Czym jest moc testu?

$\heartsuit_{13}$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Co mierzy poziom istotności?

$\heartsuit_{14}$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Czym jest obszar krytyczny?

$\heartsuit_{15}$ Opisz w punktach na czym polega testowanie hipotez statystycznych. Kiedy i dlaczego mamy podstawę do odrzucenia hipotezy zerowej?

$\diamondsuit_{1-15}$ Wyjaśnij (oraz podaj przykład) czym są i czym się różnią między sobą błędy pierwszego i drugiego rodzaju. Dlaczego nie traktujemy ich tak samo?

$\clubsuit_1$ Stosując funkcje tworzące albo charakterystyczne albo generujące momenty znajdź rozkład sumy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrami λ_k, $k = 1, \ldots, n$.

$\clubsuit_2$ Stosując funkcje tworzące albo charakterystyczne albo generujące momenty znajdź rozkład sumy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Gamma z parametrami (a, p_k), $k = 1, \ldots, n$.

$\clubsuit_3$ Stosując funkcje tworzące albo charakterystyczne albo generujące momenty znajdź rozkład sumy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrami $\lambda_k = \lambda$, $k = 1, \ldots, n$.

$\clubsuit_4$ Stosując funkcje tworzące albo charakterystyczne albo generujące momenty znajdź rozkład sumy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym z parametrami (μ_k, σ_k), $k = 1, \ldots, n$.

$\clubsuit_5$ Stosując funkcję charakterystyczne albo generujące momenty znajdź wszystkie momenty wystandaryzowanego rozkładu normalnego.

$\clubsuit_6$ Stosując funkcję charakterystyczne albo generujące momenty znajdź pierwsze trzy momenty rozkładu Poissona.

$\clubsuit_7$ Stosując funkcję charakterystyczne albo generujące momenty znajdź pierwsze trzy momenty rozkładu wykładniczego.

$\clubsuit_8$ Niech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X^2.

$\clubsuit_9$ Niech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X^3.

$\clubsuit_{10}$ Niech X będzie zmienną losową z ciągłego rozkładu jednostajnego. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X^2.

$\clubsuit_{11}$ Niech X będzie zmienną losową z ciągłego rozkładu jednostajnego. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X^3.

$\clubsuit_{12}$ Niech X będzie zmienną losową z ciągłego rozkładu wykładniczego. Wyznacz rozkład zmiennej losowej e^{-X}.

$\clubsuit_{13}$ Niech X będzie zmienną losową z rozkładu normalnego. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $\ln(X)$.

$\clubsuit_{14}$ Niech X będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na $[0, 2\pi]$. Wyznacz rozkład zmiennej $\sin(X)$.

$\clubsuit_{15}$ Niech $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ niezależne. Znajdź rozkład zmiennej X/Y.

$\spadesuit_{1-15}$ Wiedząc, że dane umieszczone na stronie przedmiotu pochodzą z rozkładu o odchyleniu standardowym równym $\sigma = 1$ sprawdź, czy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ mamy podstawę do odrzucenia hipotezy o tym, że wartość oczekiwana wyjściowego rozkładu była równa zero na rzecz hipotezy przeciwnej.

W11: Czasami trzeba się dopasować.

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- korelacja i metody regresji to wspaniałe narzędzia, ale trzeba używać ich rozważnie.

Praca domowa

♡$_1$ Czy i dlaczego niezależność dwóch zmiennych losowych implikuje ich nieskorelowanie?

♡$_2$ Czy i dlaczego brak niezależności dwóch zmiennych losowych informuje o wartości współczynnika korelacji?

♡$_3$ Czy i dlaczego nieskorelowanie dwóch zmiennych losowych implikuje ich niezależność?

♡$_4$ Czy i dlaczego zerowanie współczynnika korelacji dla dwóch zmiennych losowych implikuje ich niezależność?

♡$_5$ Podaj przykład dwóch zmiennych losowych, które choć posiadają współczynnik korelacji 0 są ewidentnie skorelowane (niekoniecznie liniowo).

♡$_6$ Wyjaśnij intuicyjnie czym jest krzywa regresji.

♡$_7$ Co wiemy o krzywej regresji dla zmiennej niezależnej X i zmiennej zależnej Y, jeśli znamy krzywą dla zmiennej niezależnej Y i zależnej X?

♡$_8$ Czego przykładem jest kwartet Anscombe?

♡$_9$ Czy i dlaczego niezależność dwóch zmiennych losowych implikuje ich nieskorelowanie?

♡$_{10}$ Czy i dlaczego brak niezależności dwóch zmiennych losowych informuje o wartości współczynnika korelacji?

♡$_{11}$ Czy i dlaczego nieskorelowanie dwóch zmiennych losowych implikuje ich niezależność?

♡$_{12}$ Czy i dlaczego zerowanie współczynnika korelacji dla dwóch zmiennych losowych implikuje ich niezależność?

♡$_{13}$ Podaj przykład dwóch zmiennych losowych, które choć posiadają współczynnik korelacji 0 są ewidentnie skorelowane (niekoniecznie liniowo).

♡$_{14}$ Wyjaśnij intuicyjnie czym jest krzywa regresji.

$\heartsuit_{15}$ Co wiemy o krzywej regresji dla zmiennej niezależnej X i zmiennej zależnej Y, jeśli znamy krzywą dla zmiennej niezależnej Y i zależnej X?

$\diamondsuit_{1-15}$ Opierając się na twierdzeniu z wykładu (lub z podręcznika [2]) wyprowadź wzory na współczynniki a i b równania prostej w przypadku kiedy to prosta minimalizuje odpowiednią wartość oczekiwaną.

$\clubsuit_{1-15}$ Podaj (minimum trzy) przykłady rzeczywistych danych[146] dla których wysoka korelacja oznacza wynikania w jedną lub drugą stronę oraz brak wynikania

[146] Polecam narzędzia i strony prezentowane podczas wykładu.

$\spadesuit_{1-15}$ Wiedząc, że dane umieszczone na stronie przedmiotu pochodzą z rozkładu o nieznanych wariancji i wartości oczekiwanej sprawdź, czy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ mamy podstawę do odrzucenia hipotezy o tym, że wartość oczekiwana wyjściowego rozkładu była równa zero na rzecz hipotezy przeciwnej.

W12: Tyle o sobie wiemy ile nas sprawdzono.

Najważniejsze wnioski z wykładu:

- poznaliśmy typowe rodzaje testów statystycznych.

Praca domowa

$\heartsuit_{1-15}$ Udowodnij, że dla rzutów uczciwą monetą długości nieprzerwanych pasm zer albo jedynek mają rozkład geometryczny.

$\diamondsuit_{1-15}$ Przetestuj hipotezę, że długości ciagów zer i jedynek w wyrzuconej przez Ciebie próbce pochodzą z rozkładu geometrycznego. W oparciu o zadanie $\heartsuit$ wyciągnij z tego wnioski o uczciwości Twojej monety. Opisz dokładnie wszystkie kroki.

$\clubsuit_{1-15}$ Przetestuj czy dane uzyskane przez Ciebie rzutów kostką pochodzą z uczciwej kostki.

$\spadesuit_{1-15}$ Przetestuj hipotezę o równomiernym rozkładzie liczb w losowaniach lotto[147]. Opisz dokładnie wszystkie kroki.

[147] `www.lotto.pl/lotto/wyniki-i-wygrane/statystyki`

Literatura

[1] Jacek Jakubowski and Rafał Sztencel. *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*. SCRIPT, 2006.

[2] Agnieszka Plucińska and Edmund Pluciński. *Probabilistyka*. WNT, 2000.